УДК 517.53

А. П. Голуб

Сходимость знаменателей совместных аппроксимаций Паде набора вырожденных гипергеометрических функций

Настоящая работа продолжает исследование, начатое в [1], вопросов сходимости совместных аппроксимаций Паде набора вырожденных гипергеометрических функций $\{{}_1F_1(1;\ \nu_k + 1;\ z)\}_{k=1}^{n}$. Напомним основные определения и результаты.

Определение 1 (см. [2]). *Пусть* $F = \{f_k(z)\}_{k=1}^{n}$ — *набор аналитических в окрестности точки* $z = 0$ *функций, а* $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ — *вектор, координатами которого являются неотрицательные целые числа, сумма которых равна некоторому числу* $N = N(\vec{r}) \in \mathbb{N}^1$. *Совместными аппроксимациями Паде набора функций* $\{f_k(z)\}_{k=1}^{n}$ *порядка* $([N/N]; \vec{r})$ *называются* *рациональные полиномы* $\pi_{N,N}^{(k)}\{F;\vec{r};z\}$, $k=\overline{1,n}$, *порядка* $[N/N]$ *с общим знаменателем, для которых справедливы асимптотические равенства*:

$$f_k(z)-\pi_{N,N}^{(k)}\{F;\vec{r};z\}=O(z^{N+r_k+1}),\quad z\to 0;\qquad k=\overline{1,n}. \tag{1}$$

В [1] установлена следующая теорема.

Теорема 1. *Совместные аппроксимации Паде набора вырожденных гипергеометрических функций* $F=\{f_k(z)\}_{k=1}^n$

$$f_k(z)={}_1F_1(1;\nu_k+1;z),\quad k=\overline{1,n},\quad \nu_k-\nu_m\notin\mathbb{Z}\ \text{при}\ k\neq m;$$

$$\nu_k>-1:\qquad k=\overline{1,n}$$

порядка $([N/N];\vec{r})$ *равномерно сходятся к функциям* $f_k(z)$ *на любом компакте* K *комплексной плоскости при* $N\to\infty$.

Рассуждения, проведенные в процессе доказательства этой теоремы, позволяют заключить, что если нули многочленов $B_N(t)$, удовлетворяющих на $[0, 1]$ условиям биортогональности

$$\int_0^1 B_N(t)\,t^{i+\nu_k}dt=0,\quad i=\overline{0,r_k-1};\qquad k=\overline{1,n},$$

располагаются так, что их средние арифметические

$$\alpha_N=\frac{t_1^{(N)}+t_2^{(N)}+\ldots+t_N^{(N)}}{N}\to\varkappa\ \text{при}\ N\to\infty,$$

то знаменатели соответствующих совместных аппроксимаций

$$\frac{1}{N!}Q_N(z)\to\exp\{(\varkappa-1)z\}\ \text{при}\ N\to\infty \tag{2}$$

равномерно на компактах.

Итак, нам необходимо изучить поведение величины α_N при $N\to\infty$. Будем без ограничения общности считать старший коэффициент многочлена $B_N(t)$ единицей

$$B_N(t)=t^N+\lambda_N t^{N-1}+P_{N-2}(t), \tag{3}$$

где $P_{N-2}(t)$ — алгебраический полином степени $\leqslant N-2$. Очевидно, что $\alpha_N=-\lambda_N/N$. Построим обобщенный полином

$$A_{N-1}(t)=\sum_{k=1}^n\sum_{j=0}^{r_k-1}c_j^{(N,k)}t^{j+\nu_k}=\sum_{j=0}^{N-1}c_j^{(N)}t^{k_j} \tag{4}$$

из условий

$$\int_0^1 t^j A_{N-1}(t)\,dt=0\ \text{при}\ j<N-1.$$

При $\nu_k-\nu_m\notin\mathbb{Z}$ для $k\neq m$ такой полином действительно существует и имеет на $(0, 1)$ в точности $N-1$ простой корень. Умножая (3) на $A_{N-1}(t)$ и интегрируя на $[0, 1]$ по мере dt, получаем

$$\int_0^1 (t^N+\lambda_N t^{N-1})A_{N-1}(t)\,dt=0,$$

откуда

$$\lambda_N=-\frac{\int_0^1 t^N A_{N-1}(t)\,dt}{\int_0^1 t^{N-1}A_{N-1}(t)\,dt}. \tag{5}$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^1 t^N A_{N-1}(t)\,dt = (-1)^{N-1}\cdot N! \int_0^1 t \int_0^t \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{N-2}} A_{N-1}(t_{N-1})\,dt_{N-1}\ldots dt_1 dt =$$

$$= (-1)^{N-1}\cdot N! \int_0^1 t\psi_N(t)\,dt,$$

где

$$\psi_N(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{N-2}} A_{N-1}(t_{N-1})\,dt_{N-1}\ldots dt_2 dt_1 =$$

$$= (-1)^{N-2} \int_0^t \frac{\tau^{N-2}}{(N-2)!} A_{N-1}(\tau)\,d\tau. \qquad (6)$$

Аналогично

$$\int_0^1 t^{N-1} A_{N-1}(t)\,dt = (-1)^{N-1}\cdot(N-1)! \int_0^1 \psi_N(t)\,dt.$$

Таким образом,

$$\lambda_N = -N \frac{\int_0^1 t\psi_N(t)\,dt}{\int_0^1 \psi_N(t)\,dt}, \quad \alpha_N = \frac{\int_0^1 t\psi_N(t)\,dt}{\int_0^1 \psi_N(t)\,dt}.$$

Из (3) и (5) получаем

$$(-1)^{N-2}(N-2)!\,\psi_N(t) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j^{(N)} \frac{t^{N-1+k_j}}{N-1+k_j} =$$

$$= t^{N-1+k_0} \sum_{j=0}^{N-1} c_j^{(N)} \frac{t^{k_j-k_0}}{N-1+k_j}.$$

Отметим, что при $\nu_m - \nu_k \notin \mathbb{Z}$ система функций $\{t^{\nu_k}\}_{k=1}^n$ будет АТ-системой на $[0, 1+\varepsilon]$ (см. [2]), причем любой многочлен вида (4) будет иметь не более $N-1$ корня на $(0, 1+\varepsilon)$ с учетом кратности. Поэтому и $\psi_N(t)$ имеет на $(0, 1+\varepsilon)$ не более $N-1$ корня с учетом кратности. Но легко убедиться, что $\psi_N(t)$ имеет в точке $t=1$ корень кратности $N-1$. Следовательно, с точностью до постоянного множителя $\psi_N(t)$ принимает вид

$$\psi_N(t) = t^{N-1+k_0} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & k_1-k_0 & k_2-k_0 & \ldots & k_{N-1}-k_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & t^{k_1-k_0} & t^{k_2-k_0} & \ldots & t^{k_{N-1}-k_0} \end{vmatrix}.$$

В частности, когда $k_j - k_0 = j/n$, $j = \overline{0, \infty}$, что соответствует совместным аппроксимациям Паде функций $\{{}_1F_1(1; \nu_k+1; z)\}_{k=1}^n$, $\nu_k = \nu_1 + \frac{(k-1)}{N}$,

$\nu_1 > -1$, $k = \overline{1, n}$ порядка $([N/N]; \vec{r})$, $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ $r_k = \begin{cases} \left[\frac{N}{n}\right] + 1, & k = \overline{1, m} \\ \left[\frac{N}{n}\right], & k = \overline{m+1, n} \end{cases}$, где m — остаток от деления N на n, будем иметь $\psi_N(t) = t^{N-1+k_0}(t^{1/n} - 1)^{N-1}$. Тогда получим

$$\alpha_N = \frac{\int_0^1 t^{N+k_0}(t^{1/n}-1)^{N-1}dt}{\int_0^1 t^{N-1+k_0}(t^{1/n}-1)^{N-1}dt} = \frac{\int_0^1 u^{n(N+k_0)}(u-1)^{N-1}u^{n-1}du}{\int_0^1 u^{n(N+k_0-1)}(u-1)^{N-1}u^{n-1}du} =$$

$$= \frac{\Gamma(n(N+k_0+1))\,\Gamma(N)\,\Gamma(n(N+k_0)+N)}{\Gamma(n(N+k_0+1)+N)\,\Gamma(n(N+k_0))\,\Gamma(N)} =$$

$$= \frac{n(N+k_0)\,[n(N+k_0)+1]\ldots[n(N+k_0)+n-1]}{[n(N+k_0)+N]\,[n(N+k_0)+N+1]\ldots[n(N+k_0)+N+n-1]}.$$

Отсюда $\lim\limits_{N\to\infty}\alpha_N = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Знаменатели совместных аппроксимаций Паде набора вырожденных гипергеометрических функций* $F = \{f_k(z)\}_{k=1}^n$

$$f_k(z) = {}_1F_1(1;\nu_k+1;z),\quad k=\overline{1,n},\quad \nu_k = \nu_1 + \frac{(k-1)}{n},\quad k=\overline{1,n},$$

$$\nu_1 > -1,$$

порядка $([N/N], \vec{r})$, $\vec{r} = (r_1,\ldots,r_n)$, $r_k = \begin{cases} \left[\frac{N}{n}\right]+1, & k=\overline{1,m};\\ \left[\frac{N}{n}\right], & k=\overline{m+1,n}\end{cases}$ *где* m — *остаток от деления* N *на* n, *равномерно сходятся при* $N\to\infty$ *на любом компакте комплексной плоскости*

$$\frac{1}{N!}Q_N(z) \to \exp\left\{\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n - 1\right]z\right\}.$$

Замечание 1. Формула (5) позволяет элементарно получить результаты М. де Брюина [3] о сходимости знаменателей наддиагональных аппроксимаций Паде для ${}_1F_1(1;c;x)$, $c\in\mathbb{N}^-$. Для этого согласно [4] необходимо подставить в (5) выражения смещенных полиномов Якоби по формуле Родрига, а далее воспользоваться свойством (2).

1. *Голуб А. П.* О совместных аппроксимациях Паде набора вырожденных гипергеометрических функций // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 6.— С. 701—706.
2. *Никишин Е. М.* О совместных аппроксимациях Паде // Мат. сб.— 1980.— **113**, № 4.— С. 499—519.
3. *Bruin M. G. de.* Convergence of the Pade' table for ${}_1F_1(1;c;x)$ // Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Ser. A.— 1976.— **79**, N 5.— P. 408—418.
4. *Дзядык В. К., Голуб А. П.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде // Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде.— Киев, 1981.— С. 3—15.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.58).

Ин-т пробл. моделирования в энергетике
АН УССР, Киев

Получено 30.01.86