УДК 517.574

А. А. Кондратюк

О росте интегральных q-средних и дефекте субгармонических в $\mathbb{R}^m$ функций

В первой части статьи исследуется рост интегральных q-средних субгармонической функции $u^+ = \max(u, 0)$, где u — субгармоническая в $\mathbb{R}^m$ функция порядка меньше единицы. Во второй — находится дефект субгармонической функции вполне регулярного роста в терминах ее индикатора и дается оценка сверху для дефекта.

1. Пусть u — субгармоническая в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$, функция, μ_u — ассоциированная с ней по Риссу мера [1, с. 132], $n(t, u) = \mu_u(\{y : y \in \mathbb{R}^m, |y| \leqslant t\})$, $N(r, u) = (m-2)\int_0^r \frac{n(t,u)}{t^{m-1}}\,dt$. Пусть далее S^{m-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^m$, σ_{m-1} — площадь ее поверхности, $d\sigma$ — элемент площади, $x_1 = \cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, при $(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x \in S^{m-1}$. Обозначим

$$\psi_\rho(x) = \frac{\rho(\rho+m-2)}{m-2}\int_0^\infty \{t^{2-m} - (1 + 2t\cos\varphi + t^2)^{1-m/2}\}\, t^{\rho+m-3}\,dt, \quad 0<\rho<1.$$

Основным результатом настоящего пункта является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть u — субгармоническая в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$, функция порядка ρ, $0 < \rho < 1$. Тогда для любой выпуклой неубывающей на $\mathbb{R}_+$ функ-*

ции Φ выполняется

$$\varlimsup_{r\to\infty}\int\limits_{S^{m-1}}\Phi\left(\frac{u^+(rx)}{N(r,u)}\right)d\sigma(x)\leqslant\int\limits_{S^{m-1}}\Phi(\psi_\rho^+(x))\,d\sigma(x). \tag{1}$$

Существует субгармоническая в $\mathbb{R}^m$ функция u, для которой в (1) *имеет место равенство.*

Интегральное q-среднее функции $f\in L^q(S^{m-1})$ будем обозначать через $m_q[f]$, $m_q[f]=\left\{\frac{1}{\sigma_{m-1}}\int\limits_{S^{m-1}}|f(x)|^q d\sigma(x)\right\}^{1/q}$, $q\geqslant 1$.

При $\Phi(t)=t^q$, $t\geqslant 0$, из теоремы 1 получаем такое следствие.

Следствие. *Для любой субгармонической в $\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 3$, функции u порядка ρ, $0<\rho<1$, выполняется*

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{m_q[u^+(rx)]}{N(r,u)}\leqslant m_p[\psi_\rho^+]. \tag{2}$$

Существует субгармоническая в $\mathbb{R}^m$ функция u, для которой в (2) *имеет место равенство.*

Заметим, что $m_1[u^+(rx)]=T(r,u)$, где $T(r,u)$ — неванлинновская характеристика [1, с. 145] функции u. Тогда левая часть соотношения (2) равна $\delta(u)/(1-\delta(u))$, где $\delta(u)$—дефект [1, с. 171] функции u. Из соотношения (2) получается, таким образом, точная оценка для дефекта [1, с. 180]. Эта оценка обобщает результат из [2]. При $q>1$ для субгармонических в $\mathbb{R}^2$ функций результат, аналогичный следствию из теоремы 1, получен в [3] с использованием ряда Фурье функции u. Для субгармонических в $\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 3$, функций использование для этой цели ряда Фурье—Лапласа функции $u(rx)$ неэффективно, так как в $L^2(S^{m-1})$ он может не сходиться к $u(rx)$ [4].

При доказательстве теоремы 1 используем понятие сферической стар-функции и ее свойства.

Пусть $C(\theta)$ — сферическая шапочка, $C(\theta)=\{x: x\in S^{m-1},\ 0\leqslant\varphi<\theta\}$.

Определение 1 [5]. *Стар-функцией функции $f\in L^1(S^{m-1})$ называется функция $f^*(\theta)=\sup\limits_E\int\limits_E f(x)\,d\sigma(x)$, где $\sup$ берется по всевозможным множествам $E\subset S^{m-1}$ таким, что $\operatorname{mes}E=\operatorname{mes}C(\theta)$.*

Лемма 1 [5, 6]. *Пусть $f,\ g\in L^1(S^{m-1})$. Тогда эквивалентны утверждения:*

а) $f^*(\theta)\leqslant g^*(\theta)\ \forall\ \theta\in[0,\pi]$;

б) *для любой выпуклой неубывающей на $\mathbb{R}$ функции Φ*

$$\int\limits_{S^{m-1}}\Phi(f(x))\,d\sigma(x)\leqslant\int\limits_{S^{m-1}}\Phi(g(x))\,d\sigma(x).$$

Доказательство теоремы 1. Предположим, не умаляя общности, что $u(0)=0$, и обозначим $N(t,u)=N(t)$.

В [1, с. 185, 186] (см. также [2]) доказано, что для произвольного измеримого множества $E\subset S^{m-1}$ такого, что $\operatorname{mes}E=\operatorname{mes}C(\theta)$, $\theta<\pi$, выполняется неравенство

$$\int\limits_E u(rx)\,d\sigma(x)\leqslant\sigma_{m-2}\int\limits_0^\infty Q_m(t,r,\theta)\,N(t)\,dt,$$

где

$$Q_m(t,r,\theta)=\int\limits_0^\theta\frac{P_m(t,r,\varphi)}{(r^2+2rt\cos\varphi+t^2)^{1+m/2}}(\sin\varphi)^{m-2}d\varphi,$$

$$P_m(t, r, \varphi) = (m-1) r^3 t^{m-2} \cos\varphi + r^2 t^{m-1} (m + (m-2)\cos^2\varphi) +$$
$$+ r t^m (m-1) \cos\varphi.$$

Используя лемму Пойя о пиках (см., например, [1, с. 171]) и учитывая, что $Q_m(t, r, \theta) \geqslant 0$, как и в [1, с. 186] получаем, что для произвольного ε, $0 < \varepsilon \leqslant \min(\rho/2, (1-\rho)/2) = \varepsilon_0$ существует последовательность $\{r_n\}$ такая, для которой при $r = r_n$ выполняется

$$\int\limits_E u(rx)\, d\sigma(x) = \sigma_{m-2} N(r) \left\{ \int\limits_0^1 \left(\frac{t}{r}\right)^{\rho-\varepsilon} Q_m(t, 1, \theta)\, dt + \int\limits_1^\infty t^{\rho+\varepsilon} Q_m(t, 1, \theta)\, dt \right\}. \quad (3)$$

При $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ обозначим

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int\limits_0^1 t^{\rho-\varepsilon} \frac{P_m(t, 1, \varphi)}{(1 + 2t\cos\varphi + t^2)^{1+m/2}}\, dt +$$
$$+ \int\limits_1^\infty t^{\rho+\varepsilon} \frac{P_m(t, 1, \varphi)}{(1 + 2t\cos\varphi + t^2)^{1+m/2}}\, dt. \quad (4)$$

Интегрируя дважды по частям, находим

$$I_\varepsilon(\varphi) = \frac{(\rho-\varepsilon)(m-2+\rho-\varepsilon)}{m-2} \int\limits_0^1 \{t^{2-m} - (1 + 2t\cos\varphi + t)^{1-m/2}\} \times$$
$$\times t^{m-3+\rho-\varepsilon} dt + \frac{(\rho+\varepsilon)(m-2+\rho+\varepsilon)}{m-2} \int\limits_1^\infty \{t^{2-m} - (1 + 2t\cos\varphi +$$
$$+ t)^{1-m/2}\} t^{m-3+\rho+\varepsilon} dt + \frac{2\varepsilon}{m-2} \{1 - (2 + 2\cos\varphi)^{1-m/2}\}. \quad (4')$$

Применяя теорему Фубини, из (3) при $\theta < \pi$ получаем

$$\int\limits_E u(rx)\, d\sigma(x) \leqslant \sigma_{m-2} N(r) \int\limits_0^\theta I_\varepsilon(\varphi)(\sin\varphi)^{m-2} d\varphi \leqslant \sigma_{m-2} N(r) \times$$
$$\times \int\limits_0^\theta I_\varepsilon^+(\varphi)(\sin\varphi)^{m-2} d\varphi \leqslant \sigma_{m-2} N(r) \int\limits_0^\pi I_\varepsilon^+(\varphi)(\sin\varphi)^{m-2} d\varphi. \quad (5)$$

В частности,

$$\int\limits_{C(\theta)} u(rx)\, d\sigma(x) \leqslant \sigma_{m-2} N(r) \int\limits_0^\pi I_\varepsilon^+(\varphi)(\sin\varphi)^{m-2} d\varphi, \quad \theta < \pi. \quad (6)$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега неравенство (6) справедливо и при $\theta = \pi$.

Обозначим $J_\varepsilon(x) = I_\varepsilon(\varphi)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Тогда (см., например, [1, с. 181])

$$\int\limits_{C(\theta)} J_\varepsilon(x)\, d\sigma(x) = \sigma_{m-2} \int\limits_0^\theta I_\varepsilon(\varphi)(\sin\varphi)^{m-2} d\varphi.$$

Так как $I_\varepsilon(\varphi)$ убывает по φ на $[0, \pi]$, то, учитывая определение 1, из (5) и (6) находим $u^*(r, \theta)/N(r) \leqslant J_\varepsilon^{+*}(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, где слева и справа стоят стар-функции функций $u(rx)$ и $J_\varepsilon^+(x)$ соответственно. Отсюда в силу леммы 1 следует

$$\int_{S^{m-1}} \Phi\left(\frac{u(rx)}{N(r)}\right) d\sigma(x) \leqslant \int_{S^{m-1}} \Phi(J_\varepsilon^+(x))\, d\sigma(x)$$

для любой выпуклой неубывающей на $\mathbb{R}$ функции $\Phi(t)$. Следовательно, и для функции $\Phi(t^+)$. Таким образом,

$$\varlimsup_{r\to\infty} \int_{S^{m-1}} \Phi\left(\frac{u^+(rx)}{N(r)}\right) d\sigma(x) \leqslant \int_{S^{m-1}} \Phi(J_\varepsilon^+(x))\, d\sigma(x).$$

Так как $J(x) = \psi_\rho(x)$, что следует из (4′), то для доказательства (1) осталось показать, что для любой выпуклой неубывающей на $\mathbb{R}_+$ функции Φ выполняется

$$\int_{S^{m-1}} \Phi(J_\varepsilon^+(x))\, d\sigma(x) \to \int_{S^{m-1}} \Phi(J_0^+(x))\, d\sigma(x), \quad \varepsilon \to 0. \tag{7}$$

Для этого заметим, что $I_\varepsilon(\varphi)$ стремится при $\varepsilon \to 0$ к $I_0(\varphi)$ равномерно на каждом промежутке $[0, \varphi_0]$, $\varphi_0 < \pi$. Действительно, последний интеграл в (4) сходится равномерно по φ и ε, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, а функции $t^{\rho-\varepsilon}$ и $t^{\rho+\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$ стремятся к функции t^ρ равномерно на каждом промежутке $[0, A]$. Учитывая ограниченность и равномерную непрерывность функции Φ на промежутке $[0, M]$, $M = \max\{I_\varepsilon(0),\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}$, получаем (7).

Если u — субгармоническая в $\mathbb{R}^m$ функция порядка ρ, $0 < \rho < 1$, массы которой распределены на отрицательной полуоси x_1 так, что $N(r, u) = r^\rho$, то [1, с. 178] $u(rx) = r^\rho \psi_\rho(x)$, и в соотношении (1) имеет место равенство.

2. Пусть u — субгармоническая в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$, функция, $u(0) = 0$, $u(rx) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x, r; u)$, $x \in S^{m-1}$, — разложение [7] по ортонормированной в $L^2(S^{m-1})$ системе сферических гармоник. Пусть λ — непрерывная, неубывающая, положительная на $\mathbb{R}_+$ функция, удовлетворяющая при некотором $M > 0$ для всех $r > 0$ условию $\lambda(2r) \leqslant M\lambda(r)$. Такую функцию назовем функцией роста.

Определение 2 [7]. *Субгармоническая в $\mathbb{R}^m$ функция u называется функцией вполне регулярного роста, если существует постоянная a такая, что $T(r, u) \leqslant a\lambda(r)$ $\forall r > 0$ и для каждого $k \in Z_+$ при любом $x \in S^{m-1}$ существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_k(x, r; u)}{\lambda(r)} = c_k(x). \tag{8}$$

Класс таких функций обозначим через Λ_S^0. Как показано в [4], при $\lambda(r) = r^\alpha$, $\alpha > 0$, классы Λ_S^0 совпадают с введенными в [8].

Пусть

$$\lambda(r) = \int_0^r t^{1-m} \left\{\int_0^t \lambda(\tau)\, \tau^{m-3} d\tau\right\} dt,$$

$$\rho(\rho + m - 2) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\lambda(r)}{\lambda_m(r)}, \qquad \varkappa(\varkappa + m - 2) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\lambda(r)}{\lambda_m(r)}.$$

Полунепрерывная сверху функция, определенная в [7] как $h(x, u) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x)$, $x \in S^{m-1}$, называется индикатором функции $u \in \Lambda_S^0$ и является $[\varkappa, \rho]$-субсферической, т. е. $\mathcal{L}_\omega h \geqslant 0$ в смысле обобщенных функций на

S^{m-1} при каждом ω, $\varkappa \leqslant \omega \leqslant \rho$, где $\mathscr{L}_\omega = \Delta_S + \omega(\omega + m - 2)$, Δ_S — оператор Лапласа на S^{m-1}.

Класс Λ_S^0 называется нетривиальным, если в нем существует функция с отличным от тождественного нуля индикатором.

Теорема 2. *Если $u \in \Lambda_S^0$ и класс Λ_S^0 нетривиален, то*

$$T(r, u) = \frac{\lambda(r)}{\sigma_{m-1}} \int_{S^{m-1}} h^+(x, u)\, d\sigma(x) + o(\lambda(r)), \quad r \to \infty. \tag{9}$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся две леммы.

Лемма 2. *Если функция роста выпукла относительно r^{2-m}, то существует постоянная B_m такая, что при $1 < \gamma < 2$ для всех $r > 0$ выполняется $\lambda(\gamma r)/\lambda(r) \leqslant 1 + B_m(\gamma - 1)$.*

Доказательство. Функцию λ можно представить в виде [1, с. 84]

$$\lambda(r) = \int_0^r \frac{\nu(t)}{t^{m-1}}\, dt,$$

где $\nu(t)$ не убывает. Тогда

$$\lambda(2r) \geqslant \int_r^{2r} \frac{\nu(t)}{t^{m-1}}\, dt \geqslant \nu(r) \int_r^{2r} \frac{dt}{t^{m-1}} \geqslant \frac{\nu(r)}{2(m-2)\, r^{m-2}}.$$

Следовательно, $\dfrac{\nu(\gamma r)}{(\gamma r)^{m-2}} \leqslant 2(m-2)\,\lambda(2\gamma r) \leqslant 2(m-2)\, M^2 \lambda(r)$. Но

$$\lambda(\gamma r) = \int_0^{\gamma r} \frac{\nu(t)}{t^{m-1}}\, dt \leqslant \lambda(r) + \nu(\gamma r) \int_r^{\gamma r} \frac{dt}{t^{m-1}} = \lambda(r) + \frac{\nu(\gamma r)(\gamma^{m-2} - 1)}{(m-2)(\gamma r)^{m-2}}.$$

Таким образом,

$$\lambda(\gamma r) \leqslant \lambda(r)\,[1 + 2M^2 \lambda(r)(\gamma^{m-2} - 1)] \leqslant \lambda(r)\,[1 + (m-2)\, 2^{m-2} M^2 (\gamma - 1)].$$

Лемма 3. *Для того чтобы класс Λ_S^0 был нетривиальным, необходимо и достаточно, чтобы существовала выпуклая относительно r^{2-m} функция роста $\tilde{\lambda}(r)$ такая, что $\lambda(r)/\tilde{\lambda}(r) \to 1$ при $r \to \infty$.*

Доказательство. Достаточность доказана в [7]. Необходимость докажем, предполагая противное. Тогда $c_0(x) = 0$, ибо функция $N(r, u)$ выпукла относительно r^{2-m}.

Если $\varkappa = 0$, то, используя обратные формулы для сферических гармоник функции u (формулы (2.5) из [4]), получаем $c_k(x) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in S^{m-1}$. Если же $\varkappa > 0$, то $\varkappa \neq \rho$, так как функция $\lambda_m(r)$ выпукла относительно r^{2-m}.

При нецелом ω, $\varkappa \leqslant \omega \leqslant \rho$, индикатор $h(x, u)$ имеет [7] в силу своей $[\varkappa, \rho]$-субсферичности представление

$$h(x, u) \sim \omega(m-2)\,\sigma_{m-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega + m - 2}{\omega(\omega + m - 2) - k(k + m - 2)}\, Y^{(k)}(x),$$

где $Y^{(k)}(x)$ — сферические гармоники некоторой меры на S^{m-1}. Поскольку $Y^{(0)}(x) = c_0(x)$, $|Y^{(k)}(x)| \leqslant d_k |Y^{(0)}(x)|$, $x \in S^{m-1}$, при некотором d_k, зависящем лишь от m и k [7], то из равенства $c_0(x) = 0$ следует $Y^{(k)}(x) = 0$, $x \in S^{m-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, $h(x, u) \equiv 0$ для любой функции $u \in \Lambda_S^0$, что противоречит нетривиальности класса Λ_S^0.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим на пространстве $C(S^{m-1})$ непрерывных на S^{m-1} функций с равномерной нормой семейство функционалов

$$F_r[\psi] = \frac{1}{\lambda(r)\sigma_{m-1}} \int\limits_{S^{m-1}} u(rx)\psi(x)\,d\sigma(x), \quad r > 0.$$

Семейство норм

$$\| F_r \| = \frac{1}{\lambda(r)\sigma_{m-1}} \int\limits_{S^{m-1}} |u(rx)|\,d\sigma(x) = m_1(r, u)/\lambda(r)$$

этих функционалов является ограниченным. Действительно, в силу первой основной теоремы Неванлинны [1, с. 146]

$$m_1(r, u) = 2T(r, u) - N(r, u). \tag{10}$$

Используя определение 2, получаем $m_1(r, u)/\lambda(r) \leqslant 2a$.

В силу плотности линейной оболочки системы сферических гармоник в $C(S^{m-1})$ из (8) и ограниченности системы норм семейства $\{F_r\}$ следует [9, с. 272] существование непрерывного линейного функционала $\tilde{F}$ на $C(S^{m-1})$ такого, что $\lim\limits_{r\to\infty} F_r[\psi] = \tilde{F}[\psi]$ для любой функции $\psi \in C(S^{m-1})$, а также

$$\|\tilde{F}\| \leqslant \varliminf_{r\to\infty} \| F_r \|. \tag{11}$$

В силу своей непрерывности функционал $\tilde{F}$ совпадает согласно (8) с функционалом $F[\psi] = \frac{1}{\sigma_{m-1}} \int\limits_{S^{m-1}} h(x, u)\psi(x)\,d\sigma(x)$. Таким образом, из (11) следует

$$\frac{1}{\sigma_{m-1}} \int\limits_{S^{m-1}} |h(x, u)|\,d\sigma(x) < \varliminf_{r\to\infty} \frac{m_1(r, u)}{\lambda(r)}.$$

Используя (10) и равенство $c_0(x, r; u) = N(r, u)$, находим

$$\frac{1}{\sigma_{m-1}} \int\limits_{S^{m-1}} h^+(x, u)\,d\sigma(x) \leqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{T(r, u)}{\lambda(r)}. \tag{12}$$

Пусть теперь $R = r\gamma$, $\gamma > 1$, $u_\gamma(rx)$ — интеграл Пуассона,

$$u_\gamma(rx) = \frac{R^{m-2}}{\sigma_{m-1}} \int\limits_{S^{m-1}} \frac{R^2 - r^2}{(R^2 - 2Rr(x, \xi) + r^2)^{\frac{m}{2}}} u(r\xi)\,d\sigma(\xi),$$

где $x \in S^{m-1}$, (x, ξ) — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. Тогда [1, с. 66] $u(rx) \leqslant u_\gamma(rx)$ и, следовательно, $u^+(rx) \leqslant u_\gamma^+(rx)$, а также [7] $u_\gamma(rx) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma^{-k} c_k(x, r; u)$.

Обозначим $h_\gamma(x, u) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma^{-k} c_k(x)$. При $r \to \infty$ выполняется $u_\gamma(rx)/\lambda(\gamma r) \to h_\gamma(x, u)$ равномерно на S^{m-1}. Это вытекает из оценки [7] $|c_k(x, r; u)| \leqslant A(k+1)^{m-3}\lambda(r)$ при некотором $A > 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\lambda(\gamma r)} \int\limits_{S^{m-1}} |u_\gamma(rx)|\,d\sigma(x) = \int\limits_{S^{m-1}} |h_\gamma(x, u)|\,d\sigma(x). \tag{13}$$

В свою очередь [10],

$$\lim_{\gamma\to 1+0}\int\limits_{S^{m-1}}|h_\gamma(x,u)|\,d\sigma(x)=\int\limits_{S^{m-1}}|h(x,u)|\,d\sigma(x). \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что для произвольного $\varepsilon>0$ при всех γ, достаточно близких к единице, выполняется

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\lambda(\gamma r)}\int\limits_{S^{m-1}}|u_\gamma(rx)|\,d\sigma(x)\leqslant\int\limits_{S^{m-1}}|h(x,u)|\,d\sigma(x)+\varepsilon. \tag{15}$$

Поскольку

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\lambda(\gamma r)}\int\limits_{S^{m-1}}u_\gamma(rx)\,d\sigma(x)=\sigma_{m-1}\lim_{r\to\infty}\frac{c_0(x,\gamma r;u)}{\lambda(\gamma r)}=\int\limits_{S^{m-1}}h(x,u)\,d\sigma(x),$$

то из (15) вытекает

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\lambda(\gamma r)}\int\limits_{S^{m-1}}u_\gamma^+(rx)\,d\sigma(x)\leqslant\int\limits_{S^{m-1}}h^+(x,u)\,d\sigma(x)+\varepsilon.$$

Используя леммы 2, 3, находим

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{\lambda(r)}\int\limits_{S^{m-1}}u^+(rx)\,d\sigma(x)\leqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\tilde\lambda(\gamma r)}{\tilde\lambda(r)\lambda(\gamma r)}\int\limits_{S^{m-1}}u_\gamma^+(rx)\,d\sigma(x)\leqslant$$

$$\leqslant[1+B_m(\gamma-1)]\left\{\int\limits_{S^{m-1}}h^+(x,u)\,d\sigma(x)+\varepsilon\right\}.$$

Отсюда следует

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r,u)}{\lambda(r)}\leqslant\frac{1}{\sigma_{m-1}}\int\limits_{S^{m-1}}h^+(x,u)\,d\sigma(x). \tag{16}$$

Из (12) и (16) вытекает (9).

С помощью теоремы 2 нетрудно найти дефект функции $u\in\Lambda_S^0$. Для этого установим еще одну лемму.

Лемма 4. *Если* $h(x,u)\not\equiv 0$, $u\in\Lambda_S^0$, *то* $\int\limits_{S^{m-1}}h^+(x,u)\,d\sigma(x)>0$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда

$$0\leqslant c_0(x)=\int\limits_{S^{m-1}}h(x,u)\,d\sigma(x)\leqslant\int\limits_{S^{m-1}}h^+(x,u)\,d\sigma(x)=0.$$

Отсюда $h^+(x,u)=0$ и $h(x,u)=0$ почти всюду, а следовательно, и всюду в силу полунепрерывности индикатора.

Теорема 3. *Если* $u\in\Lambda_S^0$ и $h(x,u)\not\equiv 0$, *то*

$$\delta(u)=\int\limits_{S^{m-1}}h^-(x,u)\,d\sigma(x)\Big/\int\limits_{S^{m-1}}h^+(x,u)\,d\sigma(x), \tag{17}$$

и при $\rho>0$ *выполняется*

$$\delta(u)\leqslant\inf_{\varkappa\leqslant\omega\leqslant\rho}\delta(u_\omega), \tag{18}$$

где u_ω — *субгармоническая в* $\mathbb{R}^m$ *функция порядка* ω, *массы которой сосредоточены вдоль отрицательной полуоси* x_1 *так, что* $N(r,u_\omega)=r^\omega$, $\omega>0$.

Доказательство. Используя (9), находим

$$\frac{1}{\lambda(r)\sigma_{m-1}} \int_{S^{m-1}} u^-(rx)\,d\sigma(x) = \frac{1}{\sigma_{m-1}} \int_{S^{m-1}} h^-(x,u)\,d\sigma(x) + o(1), \quad r \to \infty.$$

Отсюда и из (9) вытекает (17).

Неравенство (18) доказывается аналогично неравенству (5.1) из [4] с использованием соотношения (17) и теоремы 6 из [7].

1. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции.— М. : Мир, 1980.— 304 с.
2. *Edrei A., Fuchs W. H. J.* The deficiencies of meromorphic functions of order less that one // Duke Math. J.— 1960.— **27**, N 2.— P. 233—249.
3. *Abi-Khuzam F. F.* On the growth of the integral means of subharmonic functions of order less that one // Trans. Amer. Math. Soc.— 1978.— **241**.— P. 239—252.
4. *Кондратюк А. А.* О методе сферических гармоник для субгармонических функций // Мат. сб.— 1981.— **116**.— С. 147—165.
5. *Baernstein A.* Integral means, univalent functions and circular symmetrization // Acta math.— 1974.— **133**.— P. 139—169.
6. *Baernstein A., Taylor B. A.* Spherical rearrangements, subharmonic functions, and *-function in *n*-space // Duke Math. J.— 1976.— **43**, N 2.— P. 245—268.
7. *Кондратюк А. А.* Сферические гармоники и субгармонические функции // Мат. сб.— 1984.— **125**.— С. 147—166.
8. *Азарин В. С.* О субгармонических функциях вполне регулярного роста в многомерном пространстве // Докл. АН СССР.— 1962.— **146**, № 4.— С. 743—746.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 744 с.
10. *Berens H., Butzer P. L., Pawelke S.* Limitirungsverfahren von Reihen mehrdimensionalen Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten // Publ. Res. Inst. Math. Sci.— 1968.— **A4**, N 2.— S. 201—268.

Львов. ун-т

Получено 17.09.86