УДК 517.94

Р. В. Бобрик

О среднеквадратической устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений с гауссовскими коэффициентами

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{N} (a_{ij}(t)\, u_j(t) + \xi_{ij}(t)\, u_j(t), \quad t \in (0, \infty), \quad i = \overline{1, N}, \tag{1}$$

где неслучайные коэффициенты $a_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, N}$, абсолютно интегрируемы на любом конечном интервале. Гауссовские случайные процессы $\xi_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, N}$, имеют нулевое математическое ожидание и корреляционные функции $B_{i_1 i_2 j_1 j_2}(t_1, t_2) = \mathbf{M}[\xi_{i_1 i_2}(t_1)\, \xi_{j_1 j_2}(t_2)]$, $i_1, i_2, j_1, j_2 = \overline{1, N}$, для которых существуют такие постоянные $\beta \geqslant 0$, $\alpha > 0$, что для всех значений $t_1, t_2 \in [0, \infty)$

$$\max_{i_1, i_2 = \overline{1, N}} \sum_{j_1, j_2 = 1}^{N} |B_{i_1 i_2 j_1 j_2}(t_1, t_2)| \leqslant \beta \exp\{-\alpha |t_1 - t_2|\}. \tag{2}$$

В настоящей статье на основании результатов, полученных в [1], приведены достаточные условия экспоненциальной среднеквадратической устойчивости [2] тривиального решения системы (1), понимаемого как решение системы интегральных уравнений

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^t (a_{ij}(t_1)\, u_j(t_1) + \xi_{ij}(t_1)\, u_j(t_1))\, dt_1 + u_i(0), \quad i = \overline{1, N}.$$

Будем предполагать, что тривиальное решение невозмущенной ($\xi_{ij}(t) \equiv 0$, $i, j = \overline{1, N}$) системы (1) является экспоненциально устойчивым. Отсюда следует, что для матрицы Коши $X(t, s) = \{x_{ij}(t, s),\ i, j = \overline{1, N}\}$ невозмущенной системы (1) существуют такие постоянные $b_1 \geqslant 0$, $a_1 > 0$, что

$$\| X(t, s) \| \equiv \sum_{i,j=1}^{N} |x_{ij}(t, s)| \leqslant b_1 \exp\{-a_1 (t - s)\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t < \infty. \tag{3}$$

Из результатов работ [3—5] следует, что если выполняются указанные предположения, то при достаточно малых дисперсиях случайных коэффициентов и при достаточно малом отношении β/α тривиальное решение системы (1) будет экспоненциально среднеквадратически устойчивым. Ниже будет показано, что это утверждение имеет место и без требования малости дисперсий у случайных коэффициентов. Отметим, что доказательство этого факта нельзя получить с помощью методов работ [3—5], основанных на получении для гауссовских процессов оценки

$$\mathbf{M} \exp\left\{\int_0^t |\xi(s)|\, ds\right\} \leqslant L \exp\{kt\}, \quad L, k > 0.$$

Дело в том, что при $\mathbf{M}\xi(s) \equiv 0$ выражение в левой части этого неравенства всегда больше

$$\mathbf{M} \int_0^t |\xi(s)|\, ds = \int_0^t \sqrt{\frac{\mathbf{M}\xi^2(s)}{\pi}}\, ds$$

и поэтому при неограниченной дисперсии у гауссовского процесса является неограниченным.

Теорема. *Пусть выполняются условия* (2), (3) *и существует такое* σ, $0 < \sigma < 2a_1$, *что*

$$\max_{j=1,2,3,\ldots} \frac{jb_1^4\beta}{(2a_1 - \sigma + (j-1)\alpha)(2a_1 - \sigma + j\alpha)} \leqslant \frac{1}{16}. \tag{4}$$

Тогда для любого решения $u_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, *системы уравнений* (1) *имеет место оценка*

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}u_i^2(t) \leqslant 2b_1^2 \Big(\sum_{i=1}^{N} |u_i(0)|\Big)^2 \exp\{-\sigma t\}, \quad t \in [0, \infty). \tag{5}$$

Для доказательства теоремы заметим, что на основании (1) процессы $v_{i_1i_2}(t) \equiv u_{i_1}(t)\, u_{i_2}(t)$, $i_1, i_2 = \overline{1, N}$, удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений с гауссовскими коэффициентами

$$\frac{dv_{i_1i_2}(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{N} (a_{i_1j}(t)\, v_{i_2j}(t) + a_{i_2j}(t)\, v_{i_1j}(t)) + \sum_{j=1}^{N} (\xi_{i_1j}(t)\, v_{i_2j}(t) + \xi_{i_2j}(t)\, v_{i_1j}(t)),$$
$$i_1, i_2 = \overline{1, N}. \tag{6}$$

Из (3) следует, что для нормы матрицы Коши невозмущенной ($\xi_{ij}(t) \equiv 0$, $i, j = \overline{1, N}$) системы (6) имеет место оценка

$$\|Y(t, s)\| \leqslant b_1^2 \exp\{-2a_1(t - s)\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t < \infty. \tag{7}$$

Используя теорему работы [1], получаем, что при выполнении условий (2), (4), (7)

$$\sum_{i_1, i_2=1}^{N} e^{\sigma t} |\mathbf{M}v_{i_1i_2}(t) - \varphi_{i_1i_2}(t)| \leqslant \frac{(2b_1^2)^2\, b_1^2 4\beta}{(2a_1 - \sigma)(2a_1 - \sigma + \alpha)} \times$$
$$\times \sum_{i,j=1}^{N} |u_i(0)|\,|u_j(0)| \leqslant b_1^2 \Big(\sum_{i=1}^{N} |u_i(0)|\Big)^2, \tag{8}$$

где $\varphi_{i_1i_2}(t)$ является решением невозмущенной системы (6) с начальными условиями $\varphi_{i_1i_2}(0) = u_{i_1}(0)\, u_{i_2}(0)$, $i_1, i_2 = \overline{1, N}$.

Учитывая неравенства (7), (8), окончательно получаем

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}u_i^2(t) \leqslant \sum_{i_1, i_2=1}^{N} |\mathbf{M}v_{i_1i_2}(t) - \varphi_{i_1i_2}(t)| + \sum_{i_1, i_2=1}^{N} |\varphi_{i_1i_2}(t)| \leqslant b_1^2 \Big(\sum_{i=1}^{N} |u_i(0)|\Big)^2 \times$$
$$\times (e^{-\sigma t} + e^{-2a_1 t}) \leqslant 2b_1^2 \Big(\sum_{i=1}^{N} |u_i(0)|\Big)^2 e^{-\sigma t}.$$

Отметим, что, как следует из теоремы, выполнение условий (2), (3) и справедливость неравенства $a_1 \geqslant 8b_1^4\beta/\alpha$ достаточно для экспоненциальной среднеквадратической устойчивости тривиального решения системы (1).

Теорему можно обобщить и на моменты произвольного порядка решения системы (1), а именно если выполняются условия (2), (3) и существует такое σ_1, $0 < \sigma_1 < ma_1$, что

$$\max_{j=1,2,3,\ldots} \frac{jm^2b_1^4\beta}{(ma_1 - \sigma_1 + (j-1)\alpha)(ma_1 - \sigma_1 + j\alpha)} \leqslant \frac{1}{4},$$

то

$$\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} |\mathbf{M}[u_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot u_{i_m}(t)]| \leqslant 2b_1^m \Big(\sum_{i=1}^{N} |u_i(0)|\Big)^m e^{-\sigma_1 t}.$$

Доказательство этого утверждения проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы.

1. *Бобрик Р. В.* О бескумулянтном замыкании моментных уравнений для решения системы линейных дифференциальных уравнений со случайно возмущенными коэффициентами // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 5.— С. 551—558.
2. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М. : Наука, 1969.— 365 с.
3. *Шур М. Г.* О линейных дифференциальных уравнениях со случайно возмущенными параметрами // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1965.— **29**, № 4.— С. 783—808.
4. *Хасьминский Р. З.* Замечание к работе М. Г. Шура «О линейных дифференциальных уравнениях со случайно возмущенными параметрами» // Там же.— 1966.— **30**, № 6.— С. 1311—1314.
5. *Хасьминский Р. З.* Об устойчивости нелинейных стохастических систем // Прикл. математика и механика.— 1966.— **30**, вып. 5.— С. 915—921.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 30.05.85