УДК 517.982

Я. И. Альбер, А. И. Нотик

О неравенствах параллелограмма в банаховых пространствах и некоторых свойствах дуального отображения

Приведем известные определения геометрических характеристик банаховых пространств. Модулем выпуклости банахова пространства B называется функция $\delta_B(\varepsilon) = \inf(1 - \| x + y \| / 2, \quad \| x \| = 1, \quad \| y \| = 1, \quad \| x - y \| = \varepsilon)$. Пространство B является равномерно выпуклым, если $\delta_B(\varepsilon) > 0 \ \forall \varepsilon > 0$.

Модулем гладкости пространства B называется функция

$$\rho_B(\tau) = \sup(\| x + y \|/2 + \| x - y \|/2 - 1, \ \| x \| = 1, \ \| y \| = \tau).$$

Пространство B является равномерно гладким, если $\lim\limits_{\tau \to 0} \rho_B(\tau)/\tau = 0$. Известно [1], что $\rho_B(\tau)$ — непрерывная, выпуклая, возрастающая функция и $\rho_B(\tau) \leqslant \tau \ \forall \tau \geqslant 0$. Установлена полная двойственность между равномерно выпуклыми и равномерно гладкими пространствами.

Напомним, что оператор U, действующий из банахова пространства B в сопряженное пространство B^*, называется нормализованным дуальным отображением, если $\| Ux \|_{B^*} = \| x \|_B$ и $(Ux, x) = \| x \|_B^2$.

Здесь скобки (y, x) обозначают дуальное произведение в B, т. е. значение линейного функционала $y \in B^*$ на элементе $x \in B$. Если пространство B гладкое, т. е. норма в этом пространстве есть дифференцируемый по Гато функционал, то отображение U имеет вид $Ux = \mathrm{grad}\,(\| x \|^2/2)$ и является однозначным. Если же B — равномерно гладкое пространство, то U равномерно непрерывно на каждом ограниченном множестве, т. е. для любого $R > 0$ существует непрерывная функция $\omega_R(t)$, $\omega_R(0) = 0$, такая, что для всех $x, y \in B$, $\| x \| \leqslant R$, $\| y \| \leqslant R$ выполняется неравенство

$$\| Ux - Uy \| \leqslant \omega_R(\| x - y \|). \tag{1}$$

Отметим также, что дуальное отображение обладает свойством монотонности $(Ux - Uy, x - y) \geqslant 0 \ \forall x, y \in B$. В равномерно выпуклом пространстве дуальное отображение равномерно монотонно на каждом ограниченном множестве, иначе говоря, для любого $R > 0$ существует функция $\psi_R(t) > 0$, $\psi_R(0) = 0$, такая, что для любых $\| x \| \leqslant R$, $\| y \| \leqslant R$

$$(Ux - Uy, x - y) \geqslant \psi_R(\| x - y \|). \tag{2}$$

Наша цель — вычислить функции $\omega_R(\cdot)$, $\psi_R(\cdot)$ и $\tilde{\omega}_R(\cdot)$ из соотношения

$$(Ux - Uy, x - y) \leqslant \tilde{\omega}_R(\| x - y \|). \tag{3}$$

Вначале сделаем следующее замечание. Простое и вместе с тем фундаментальное соотношение

$$2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2 - \| x + y \|^2 = \| x - y \|^2, \tag{4}$$

известное в математическом анализе под названием равенства *параллелограмма*, является необходимым и достаточным условием гильбертовости пространства $H=B$. Оно полностью описывает геометрические характеристики этого пространства. В самом деле, используя (4), после несложных вычислений можно получить $\rho_H(\tau)=\sqrt{1+\tau^2}-1\leqslant\tau^2/2$, $\delta_H(\varepsilon)=1-\sqrt{1-(\varepsilon/2)^2}\geqslant\varepsilon^2/8$ и неравенства (1)—(3) превращаются в тривиальные равенства $\omega_R(t)=t$, $\psi_R(t)=\tilde{\omega}_R(t)=t^2$, $0\leqslant R\leqslant\infty$.

Многочисленные задачи, связанные с построением и исследованием итерационных методов решения нелинейных операторных уравнений, вариационных неравенств и задач оптимизации в банаховых пространствах (см., например, [2, 3]) требуют соотношений, подобных (1)—(4), в произвольных банаховых пространствах. С их помощью удается доказать сходимость этих методов, их устойчивость, и установить неасимптотические оценки скорости сходимости, которые зависят от геометрических характеристик банаховых пространств.

В работе [4] для пространств l^p, L^p, W^p_m, $1<p<\infty$, получены следующие «неравенства параллелограмма»: $2\|x\|^2+2\|y\|^2-\|x+y\|^2\geqslant(p-1)\|x-y\|^2$, $1<p\leqslant2$ (соответственно $\leqslant$ при $p\geqslant2$). В качестве следствия из них вытекает сильная монотонность дуального отображения при $1<p\leqslant2$, и его липшиц-непрерывность при $p\geqslant2$.

Оценки, полученные в настоящей работе, справедливы для произвольных банаховых пространств и позволяют оценить выражение, стоящее в левой части (4), как сверху, так и снизу. Из них, в частности, для пространств l^p, L^p, W^p_m при $1<p<\infty$ вытекают двухсторонние оценки дуального произведения $(Ux-Uy,\ x-y)$

Теорема 1. *Для произвольного банахова пространства B и любых $x, y\in B$*

$$2\|x\|^2+2\|y\|^2-\|x+y\|^2\leqslant4\|x-y\|^2+C_1(\|x\|,\|y\|)\rho_B(\|x-y\|),$$

$$C_1(\|x\|,\|y\|)=4\max(L,(\|x\|+\|y\|)/2)),\quad 0<L<3{,}18.$$

Наметим кратко схему доказательства теоремы 1. Обозначим $D=2^{-1}(\|x\|^2+\|y\|^2-\|x+y\|^2/2)$. При $\|x+y\|\leqslant\|x-y\|$ $D\leqslant2\|x-y\|^2$, а при $\|x+y\|>\|x-y\|$ $D\leqslant4^{-1}\|x-y\|^2+2^{-1}(\|x\|+\|y\|)\|x+y\|\times\rho_B(\|x-y\|/\|x+y\|)$. Далее, пользуясь свойствами $\rho_B(\tau)$ и неравенством Фигеля [5] для функции $\rho_B(\tau)$ $\rho_B(\sigma)\sigma^{-2}\leqslant L\rho_B(\tau)\tau^{-2}$, если $0<\tau\leqslant\sigma$, $0<L<3{,}18$, получаем окончательное утверждение.

Замечание 1. Для любых $\|x\|\leqslant R$, $\|y\|\leqslant R$

$$2\|x\|^2+2\|y\|^2-\|x+y\|^2\leqslant4\|x-y\|^2+C_1(R)\rho_B(\|x-y\|),$$

$$C_1(R)=4\max(L,R).$$

Следствие 1. *Пусть $U:B\to B^*$ и $\rho_B(\cdot)$ и $\rho_{B^*}(\cdot)$ — модули гладкости (гладких) пространств B и B^*. Тогда для произвольных $x, y\in B$*

$$(Ux-Uy,\ x-y)\leqslant4\|x-y\|^2+C_1(\|x\|,\|y\|)\rho_B(\|x-y\|)$$

и, если B — рефлексивное пространство, то

$$(Ux-Uy,\ x-y)\leqslant4\|Ux-Uy\|^2_{B^*}+C_1(\|x\|,\|y\|)\rho_{B^*}(\|Ux-Uy\|).$$

Если же $\|x\|\leqslant R$, $\|y\|\leqslant R$, то соответственно

$$(Ux-Uy,\ x-y)\leqslant4\|x-y\|^2_B+C_1(R)\rho_B(\|x-y\|_B),$$

$$(Ux-Uy,\ x-y)\leqslant4\|Ux-Uy\|^2_{B^*}+C_1(R)\rho_{B^*}(\|Ux-Uy\|_{B^*}).$$

Теорема 2. *Для произвольного банахова пространства B и любых $x, y\in B$*

$$2\|x\|^2+2\|y\|^2-\|x+y\|^2\geqslant L^{-1}\delta_B(\|x-y\|/C_2(\|x\|,\|y\|),$$

$$C_2(\|x\|,\|y\|)=2\max(1,\sqrt{2^{-1}(\|x\|^2+\|y\|^2)},\ 0<L<3{,}18.$$

Доказательство теоремы 2 проводится с помощью неравенства Линденштрауса $\| 2^{-1}(x+y)\|^2 \leqslant 1 - \delta_B(\| x-y\|/2)$, справедливого [6] для любых $x, y \in B$ таких, что $\| x\|^2 + \| y\|^2 = 2$, и неравенства Фигеля для $\delta_B(\varepsilon)$ [5]

$$\delta_B(\eta)\,\eta^{-2} \geqslant (4L)^{-1}\,\delta_B(\varepsilon)/\varepsilon^{-2}, \text{ если } \eta \geqslant \varepsilon > 0,\ 0 < L < 3{,}18.$$

Замечание 2. Для любых $\| x\| \leqslant R$, $\| y\| \leqslant R$

$$2\| x\|^2 + 2\| y\|^2 - \| x+y\|^2 \geqslant L^{-1}\delta_B(\| x-y\|/C_2(R)),\ C_2(R) = 2\max(1, R).$$

Следствие 2. *Для произвольного банахова пространства B и любых $x, y \in B$*

$$(Ux - Uy,\ x-y) \geqslant L^{-1}\delta_B(\| x-y\|/C_2(\| x\|, \| y\|)).$$

Если B — рефлексивное и строго выпуклое пространство вместе с B^*, то

$$(Ux - Uy,\ x-y) \geqslant L^{-1}\delta_{B^*}(\| Ux - Uy\|/C_2(\| x\|, \| y\|)).$$

Если же $\| x\| \leqslant R$ и $\| y\| \leqslant R$, то соответственно

$$(Ux - Uy,\ x-y) \geqslant L^{-1}\delta_B(\| x-y\|/C_2(R)),$$

$$(Ux - Uy,\ x-y) \geqslant L^{-1}\delta_{B^*}(\| Ux - Uy\|/C_2(R)).$$

Введем функцию $g_B(\varepsilon) = \delta_B(\varepsilon)/\varepsilon$. Известно [4], что $g_B(\varepsilon)$ неубывающая функция в любом банаховом пространстве и $g_B(0) = 0$

Следствие 3. *Пусть пространство B строго выпуклое и функция $g_{B^*}(\varepsilon)$ монотонно возрастает. Тогда для любых $\| x\| \leqslant R$, $\| y\| \leqslant R$*

$$\| Ux - Uy\| \leqslant C_2(R)\, g_{B^*}^{-1}(C_2(R)\, L\, \| x-y\|).$$

Если пространство B^* строго выпуклое и $g_B(\varepsilon)$ монотонно возрастает, то

$$\| x-y\| \leqslant g_B^{-1}(C_2(R)\, L\, \| Ux - Uy\|).$$

Следствие 4. *В условиях теоремы 1 для любых $x, h \in B$*

$$\| x+h\|^2 \leqslant \| x\|^2 + 2(Ux, h) + 8\| h\|^2 + 2C_1(\| x\|, \| h\|)\,\rho_B(\| h\|).$$

Приведем в заключение оценки модулей выпуклости и гладкости пространств l^p, L^p, W_m^p, $1 < p < \infty$. Воспользовавшись для этого результатами Линденштрауса [6] и Ханнера [1], получим

$$\rho(\tau) = \sqrt[p]{1+\tau^p} - 1 \leqslant p^{-1}\tau^p,\ \delta(\varepsilon) \geqslant ((p-1)/16)\,\varepsilon^2,\ 1 < p \leqslant 2,\ \rho(\tau) \leqslant (p - 1)\,\tau^2,\ \delta(\varepsilon) = 1 - (1 - (\varepsilon/2)^p)^{1/p} \geqslant p^{-1}(\varepsilon/2)^p,\ p \geqslant 2.$$

1. *Дистель Д.* Геометрия банаховых пространств.— Киев : Вища шк., 1980.— 216 с.
2. *Browder F. E.* On the constructive solution of nonlinear functional equations // J. Funct. Anal.— 1977.— 25, N 4.— P. 345—355.
3. *Альбер Я. И.* Приближенные методы решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах // Докл. и сообщ. II симп. по методам решения нелинейн. уравнений и задач оптимизации (Хаапсалу, июнь 1981 г.) — Таллин: Изд-во АН ЭССР, 1981.— С. 6—11.
4. *Bynum W. L.* Weak parallelogram lows for Banach spaces // Can. Math. Bull.— 1976.— 19, N 3.— P. 269—275.
5. *Figiel T.* On modull of convexity and smothness // Stud. math.— 1976.— 56, N 2.— P. 121—155.
6. *Lindenstrauss J., Tzabriri L.* Classical Banach spaces: In 2v.— Berlin etc.: Springer, 1979.— V. 2.— 243 p.

Н.-и. радиофиз. ин-т, Горький

Получено 13.01.86,
после доработки — 05.09.86