УДК 517.9

Я. С. Барис, О. Б. Лыкова

Об асимптотических разложениях инвариантных многообразий. II

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$d\theta/dt = \omega + F(\theta, x, y, \varepsilon), \quad dx/dt = Ax + H(\theta, x, y, \varepsilon),$$
$$dy/dt = By + Q(\theta, x, y, \varepsilon), \tag{1}$$

где ω — постоянный вектор размерности l, A и B — постоянные $m \times m$- и $n \times n$-матрицы, ε — малый параметр. Полагаем, что правые части (1) определены и непрерывны на множестве $R^l \times R^m \times R^n$ при каждом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и, кроме того, удовлетворяют условиям

$$F(\theta, 0, 0, \varepsilon) = 0, \quad H(\theta, 0, 0, \varepsilon) = 0, \quad Q(\theta, 0, 0, \varepsilon) = 0. \tag{2}$$

Будем исследовать инвариантные многообразия (ИМ) системы (1) вида

$$M = \{(\theta, x, y) : y = \varphi(\theta, x, \varepsilon), \quad \theta \in R^l, \ x \in R^m\}, \tag{3}$$

где φ — непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию $\varphi(\theta, 0, \varepsilon) = 0$ [1—4].

Инвариантное многообразие (3) будем называть центральным многообразием системы (1) и обозначать M^*, если спектр матрицы B не пересекается с мнимой осью, а спектр матрицы A лежит на мнимой оси, т. е.

$\mathrm{Re}\lambda(B) \neq 0$ $\mathrm{Re}\lambda(A) = 0$ [5—7]. Инвариантное многообразие (3) будем называть центр- устойчивым многообразием системы (1) и обозначать M^{*+}, если выполняются условия $\mathrm{Re}\lambda(B) > 0$, $\mathrm{Re}\lambda(A) \leqslant 0$. Инвариантное многообразие (3) будем называть центр- неустойчивым многообразием системы (1) и обозначать M_{*-}, если выполняются условия $\mathrm{Re}\lambda(B) < 0$, $\mathrm{Re}\lambda(A) \geqslant 0$ [7].

Будем строить асимптотические разложения [8] инвариантных многообразий системы (1) указанных типов при следующих предположениях:

1°. Соответствующая (1) порождающая система имеет инвариантное многообразие M_0: $y = \overline{\varphi}(\theta, x)$, принадлежащее одному из указанных типов.

2°. Вектор-функции $F(\theta, x, \overline{\varphi}(\theta, x) + \varepsilon z, \varepsilon)$, $H(\theta, x, \overline{\varphi}(\theta, x) + \varepsilon z, \varepsilon)$, $Q(\theta, x, \overline{\varphi}(\theta, x) + \varepsilon z, \varepsilon)$ допускают асимптотические разложения порядка $k+1$, при этом выражение $Q_1 - \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\theta} F_1 - \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x} H_1$ не зависит от z (Q_1 — коэффициент при ε в первой степени в разложении Q по степеням ε; аналогично определяются коэффициенты F_1, H_1).

3°. Спектр матрицы B не пересекается с мнимой осью.

Согласно [9, 10] приближенным инвариантным многообразием с невязкой $b(\theta, x, \varepsilon)$ системы (1) является инвариантное многообразие системы

$$d\theta/dt = \omega + F(\theta, x, y, \varepsilon), \quad dx/dt = Ax + H(\theta, x, y, \varepsilon),$$
$$dy/dt = By + Q(\theta, x, y, \varepsilon) + b.$$

Центральное (центр-устойчивое, центр-неустойчивое) многообразие этой системы будем называть приближенным центральным (центр-устойчивым, центр-неустойчивым) многообразием системы (1) и обобзначать соответственно $M^*_{\text{пр}}$, $M^{*+}_{\text{пр}}$, $M^{*-}_{\text{пр}}$.

При сделанных предположениях относительно системы (1) построим приближенные многообразия указанных типов и покажем, что они являются асимптотическими разложениями соответствующих инвариантных многообразий.

Полагая в системе (1)

$$y = \overline{\varphi}(\theta, x) + \varepsilon z, \tag{4}$$

получаем

$$d\theta/dt = \omega + f(\theta, x, \varepsilon z, \varepsilon), \quad dx/dt = Ax + h(\theta, x, \varepsilon z, \varepsilon),$$
$$dz/dt = Bz + g(\theta, x, \varepsilon z, \varepsilon), \tag{5}$$

где $f(\theta, x, \varepsilon z, \varepsilon) = F(\theta, x, \overline{\varphi}(\theta, x) + \varepsilon z, \varepsilon)$, $h(\theta, x, \varepsilon z, \varepsilon) = H(\theta, x, \overline{\varphi}(\theta, x) + \varepsilon z, \varepsilon)$, $\varepsilon g(\theta, x, \varepsilon z, \varepsilon) = Q(\theta, x, \overline{\varphi}(\theta, x) + \varepsilon z, \varepsilon) - Q(\theta, x, \overline{\varphi}(\theta, x), 0) - \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\theta}[F(\theta, x, \overline{\varphi}(\theta, x) + \varepsilon z, \varepsilon) - F(\theta, x, \overline{\varphi}(\theta, x), 0)] - \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}[H(\theta, x, \overline{\varphi}(\theta, x) + \varepsilon z, \varepsilon) - H(\theta, x, \overline{\varphi}(\theta, x), 0)]$.

Вектор-функция $z = \Phi(\theta, x, \varepsilon)$ задает $M_{\text{пр}}$ с невязкой $b(\theta, x, \varepsilon)$ системы (5), если она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}[\omega + \tilde{f}] + \frac{\partial\Phi}{\partial x}[Ax + \tilde{h}] = B\Phi + \tilde{g} + b(\theta, x, \varepsilon), \tag{6}$$

где через $\tilde{f}$, $\tilde{h}$, $\tilde{g}$ обозначены вектор-функции f, h, g при $z = \Phi(\theta, x, \varepsilon)$.

2. Будем искать решение уравнения (6) в виде

$$\Phi = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \varphi_i(\theta, x), \tag{7}$$

Из условия 2° следуют асимптотические разложения

$$\tilde{f}(\theta, x, \varepsilon) = f(\theta, x, \varepsilon\Phi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i f_i(\theta, x) + R_k(\tilde{f}),$$

$$\tilde{h}(\theta, x, \varepsilon) = h(\theta, x, \varepsilon\Phi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i h_i(\theta, x) + R_k(\tilde{f}), \tag{8}$$

$$\tilde{g}(\theta, x, \varepsilon) = g(\theta, x, \varepsilon\Phi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i g_i(\theta, x) + R_k(\tilde{f}),$$

где через $R_k(\cdot)$ обозначен остаток асимптотического разложения указанной в скобках функции, при этом f_i, h_i, g_i не зависят от φ_j при $j \geqslant i$.

Подставляя (7) и (8) в уравнение (6), получаем

$$\sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta} \omega + \sum_{j+r=i} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\theta} f_r + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta} R_k(\tilde{f}) + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} Ax + \sum_{j+r=i} \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} h_r + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} R_k(\tilde{g}) \right] = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i [B\varphi_i + g_i] + R_k(\tilde{g}) + b. \tag{9}$$

Приравнивая в (9) коэффициенты при ε^i, $i = 0, 1, \ldots, k$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta} \omega + \sum_{j+r=i} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\theta} f_r + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} Ax + \sum_{j+r=i} \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} h_r = B\varphi_i + g_i. \tag{10}$$

Приравнивая в (9) оставшиеся члены в правой и левой частях, получаем следующее выражение для определения невязки:

$$b = R_k \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \tilde{f} - \frac{\partial\Phi}{\partial x} \tilde{h} - \tilde{g} \right). \tag{11}$$

Запишем уравнение (10) в виде

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta} [\omega + f_0(\theta, x)] - \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} [Ax + h_0(\theta, x)] = B\varphi_i + v_i, \quad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{12}$$

где

$$v_i = g_i(\theta, x) - \sum_{\substack{j+r=i \\ r\neq 0}} \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\theta} f_r + \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} h_r \right), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$v_0 = g_0(\theta, x) = g(\theta, x, \bar{\varphi}(\theta, x), 0). \tag{13}$$

Из уравнения (12) следует, что функция φ_i задает инвариантное многообразие M системы уравнений

$$d\theta/dt = \omega + f_0(\theta, x), \quad dx/dt = Ax + h_0(\theta, x), \quad dz/dt = Bz + v_i(\theta, x),$$
$$i = 0, 1, \ldots, k. \tag{14}$$

Таким образом, задача построения приближенных инвариантных многообразий системы (5) свелась к задаче построения инвариантных многообразий системы (14) при $i = 0, 1, \ldots, k$.

Будем строить инвариантное многообразие системы (14) при следующих предположениях:

а) для любых начальных данных t, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ задача Коши

$$d\theta/dt = \omega + f_0(\theta, x), \quad \theta|_{t=\tau} = \zeta_1; \qquad dx/dt = Ax + h_0(\theta, x), \quad x|_{t=\tau} = \zeta_2$$

имеет единственное решение

$$\theta = \Psi_1(t-\tau, \zeta), \quad x = \Psi_2(t-\tau, \zeta), \quad \zeta = \zeta_1, \zeta_2,$$

на всей вещественной оси R;

б) выполняется неравенство $\| v_i (\theta, x) \| \leqslant \text{const} < \infty$, $i = 0, 1, \dots, k$;
в) спектр матрицы B не пересекается с мнимой осью.

Обозначим через $G(t - s)$ функцию Грина задачи об ограниченных решениях уравнения

$$dz/dt = Bz + v_i(\Psi(t - \tau, \zeta), \quad \Psi = (\Psi_1, \Psi_2), \tag{15}$$

определяемую соотношением

$$G(t, s) = \begin{cases} e^{B(t-s)}P, & t > s, \\ e^{B(t-s)}(P - E), & t < s, \end{cases} \tag{16}$$

где P — соответствующий проектср, E — единичная матрица.

Функция $G(t - s)$ удовлетворяет неравенству

$$\| G(t - s) \| \leqslant Ne^{-\nu|t-s|}, \quad N > 0, \quad \nu > 0. \tag{17}$$

Тогда формула для ограниченного на всей оси R решения уравнения (15) примет вид

$$z_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - s) v_i(\Psi(s - \tau, \zeta))\, ds.$$

Полагая здесь $z_i(t) = \varphi_i(\Psi(t - \tau, \zeta))$, $\tau = t$, $\zeta = (\theta, x)$, получаем равенство $\varphi_i(\theta, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - s) v_i(\Psi(s - t, \theta, x))\, ds$. Совершая замену $s - t = \sigma$, окончательно получаем

$$\varphi_i(\theta, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(-\sigma) v_i(\Psi(\sigma, \theta, x))\, d\sigma \tag{18}$$

Можно показать, что график вектор-функции (18) является инвариантным многообразием системы (14).

В силу условий (2) выполняются соотношения $f_0(\theta, 0) = 0$, $h_\upsilon(\theta, 0) = 0$. $v_i(\theta, 0) = 0$. Тогда имеем $\Psi_1(\sigma, \zeta_1, 0) = \omega\sigma + \zeta_1$, $\Psi_2(\sigma, \zeta_1, 0) = 0$, $v_i(\omega\sigma + \theta, 0) = 0$. Отсюда и из (18) получаем тождество $\varphi_i(\theta, 0) \equiv 0$.

Если выполняются условия $\operatorname{Re}\lambda(B) \neq 0$, $\operatorname{Re}\lambda(A) = 0$, то график функции (18) является центральным многообразием системы (14).

Предположим теперь, что относительно системы (14) выполняются условия а)—б), а спектр матрицы B лежит в правой полуплоскости: $\operatorname{Re}\lambda(B) > 0$. Тогда для построения функции Грина $G(t - s)$ следует положить в (16) $P = 0$. В результате формула (18) примет вид

$$\varphi_i(\theta, x) = -\int_0^{\infty} e^{-B\sigma} v_i(\Psi(\sigma, \theta, x))\, d\sigma. \tag{19}$$

Если при этом $\operatorname{Re}\lambda(A) \leqslant 0$, то график этой функции является центр-устойчивым многообразием системы (14).

Пусть выполняются условия а), б), а спектр матрицы B лежит в левой полуплоскости. Тогда функция Грина определяется соотношением (16), в котором $P = E$ и формула (18) принимает вид

$$\varphi_i(\theta, x) = \int_{-\infty}^{0} e^{-B\sigma} v_i(\Psi(\sigma, \theta, x))\, d\sigma. \tag{20}$$

Если при этом $\operatorname{Re}\lambda(A) \geqslant 0$, то график функции (20) является центр-неустойчивым многообразием системы (14).

В результате можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть относительно системы* (1) *выполняются условия* 1°—3° *и формулы* (18)—(20) *определяют непрерывные вектор-функции* $\varphi_i(\theta, x)$ *при каждом* $i = 0, 1, \dots, k$*. *Тогда система* (1) *имеет приближен-*

* Для этого достаточно выполнения условий а)—в) и непрерывности v_i.

ное инвариантное многообразие:

$$M_{\text{пр}}: y = \bar{\varphi}(\theta, x) + \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^{i+1}\varphi_i(\theta, x) \tag{21}$$

с невязкой $(0, \varepsilon b)$, *где* b *определяется формулой* (11). *Если при этом инвариантное многообразие порождающей системы и инвариантные многообразия, задаваемые вектор-функциями* φ_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, *являются одновременно центральными* (*центр-устойчивыми, центр-неустойчивыми*), *то многообразие* (21) *также является соответственно приближенным центральным* (*центр-устойчивым, центр-неустойчивым*) *многообразием*.

3. Обоснование предложенного алгоритма сводится к доказательству существования инвариантного многообразия системы (1) и к оценке отклонения построенного приближенного многообразия $M_{\text{пр}}$ от инвариантного многообразия M данной системы.

Будем полагать, что относительно системы (1) выполнено условие 1° и, следовательно, известно инвариантное многообразие $M_0 : y = \bar{\varphi}(\theta, x)$ соответствующей порождающей системы. Тогда вопрос о существовании инвариантного многообразия системы (1) сводится к вопросу существования инвариантного многообразия системы (5).

Обозначим через $C_\rho(\eta)$ множество непрерывных на $R^l \times R^m$ при каждом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ вектор-функций $\varphi(\theta, x, \varepsilon)$ со значениями в шаре $\| z \| \leqslant \rho$ пространства R^n, удовлетворяющих условию Липшица относительно θ, x с постоянной η. Расстояние на $C_\rho(\eta)$ определим посредством нормы $|\cdot| = \sup \|\cdot\|$. Тогда $C_\rho(\eta)$ — полное метрическое пространство.

Установим вначале условия существования центрального инвариантного многообразия $M^* : z = \varphi(\theta, x, \varepsilon)$ системы (5), где $\varphi \in C_\rho(\eta)$.

Для этого рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{aligned} d\theta/ds &= \omega + f(\theta, x, \varepsilon\varphi, \varepsilon), \quad \theta|_{s=t} = \zeta_1, \\ dx/ds &= Ax + h(\theta, x, \varepsilon\varphi, \varepsilon), \quad x|_{s=t} = \zeta_2. \end{aligned} \tag{22}$$

Пусть вектор-функции в правой части системы уравнений (5) непрерывны и удовлетворяют условию Липшица

$$f = \text{Lip}\{\theta, x, \varepsilon z; \Lambda_1\}, \quad h = \text{Lip}\{\theta, x, \varepsilon z; \lambda_2\}, \quad g = \text{Lip}\{\theta, x, \varepsilon z; \mathscr{L}\}. \tag{23}$$

Тогда задача Коши (22) имеет единственное на R решение $\theta_t = \Psi_1(s - t, \zeta/\varphi)$, $x_t = \Psi_2(s - t, \zeta/\varphi)$, где $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$.

Вопрос о существовании инвариантного многообразия M системы (5) сводится к вопросу о существовании неподвижной точки отображения S, определяемого равенством

$$S\varphi(\theta, x, \varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} G(-\sigma)\, g(\Psi, \varepsilon\varphi(\Psi, \varepsilon), \varepsilon)\, d\sigma,$$

где $\varphi \in C_\rho(\eta)$, $\Psi = (\Psi_1(\sigma, \theta, x/\varphi), \Psi_2(\sigma, \theta, x(\varphi))$.

Потребуем выполнения следующих неравенств:

$$\| g(\theta, x, 0, \varepsilon) \| \leqslant \mu, \tag{24}$$

$$\| e^{At} \| \leqslant K, \quad K = \text{const}. \tag{25}$$

Тогда, принимая во внимание оценку (17), получаем

$$\| S\varphi \| \leqslant (\mathscr{L}\varepsilon\rho + \mu)\frac{2NK}{\nu}. \tag{26}$$

Далее имеем

$$S\varphi(\bar{\theta}, \bar{x}, \varepsilon) - S\varphi(\theta, x, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G(-\sigma)\,[g(\bar{\Psi}, \bar{x}, \varepsilon\varphi(\bar{\Psi}, \bar{x}, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- g(\Psi, x, \varepsilon\varphi(\Psi, x, \varepsilon), \varepsilon)]\, d\sigma,$$

где $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$, $\Psi_i = \Psi_i(\sigma, \theta, x/\varphi)$, $\bar{\Psi} = (\bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2)$, $\bar{\Psi}_i = \Psi_i(\sigma, \bar{\theta}, \bar{x}/\varphi)$, $i = 1, 2$.

Отсюда находим

$$\| S\varphi(\bar{\theta}, \bar{x}, \varepsilon) - S\varphi(\theta, x, \varepsilon) \| \leqslant \mathcal{L} N (1 + \varepsilon\eta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu|\sigma|} \| \bar{\Psi} - \Psi \| d\sigma. \quad (27)$$

Из (22), принимая во внимание (23) и (25), имеем при $t \geqslant \tau$:

$$\| \bar{\theta}_t - \theta_t \| \leqslant \| \bar{\zeta}_1 - \zeta_1 \| + \Lambda_1 (1 + \varepsilon\eta) \int_{\tau}^{t} u_s ds,$$

$$\| \bar{x}_t - x_t \| \leqslant K \| \bar{\zeta}_2 - \zeta_2 \| + \Lambda_2 (1 + \varepsilon\eta) K \int_{\tau}^{t} u_s ds, \quad (28)$$

где $u_t = \| \bar{\theta}_t - \theta_t \| + \| x_t - x_t \|$. Складывая эти неравенства, получаем, учитывая, что $k \geqslant 1$:

$$u_t \leqslant K \| \bar{\zeta} - \zeta \| + K_1 (1 + \varepsilon\eta) \int_{\tau}^{t} u_s ds,$$

где $K_1 = (\Lambda_1 + \Lambda_2 K)$.

Применяя к этому неравенству лемму Беллмана—Гронуолла, находим $u_t \leqslant \leqslant K u_\tau e^{K_1(1+\varepsilon\eta)|t-\tau|}$. Аналогичное неравенство справедливо при $t \leqslant \tau$. Отсюда с учетом того, что $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$, следует $\| \bar{\Psi} - \Psi \| \leqslant K (\| \bar{\theta} - \theta \| + \| \bar{x} - x \|) e^{K_1(1+\varepsilon\eta)|\sigma|}$, $\sigma = s - t$. Предположим еще, что выполняется неравенство

$$K_1 (1 + \varepsilon\eta) < \nu. \quad (29)$$

Тогда из (27) следует

$$\| S\varphi(\bar{\theta}, \bar{x}, \varepsilon) - S\varphi(\theta, x, \varepsilon) \| \leqslant K \mathcal{L} N (1 + \varepsilon\eta) (\| \bar{\theta} - \theta \| + \| \bar{x} - x \|) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{[K_1(1+\varepsilon\eta) - \nu]\sigma} d\sigma \leqslant 2K \mathcal{L} N (1 + \varepsilon\eta) / [\nu - K_1 (1 + \varepsilon\eta)] (\| \bar{\theta} - \theta \| + \| \bar{x} - x \|). \quad (30)$$

С помощью аналогичных рассуждений приходим к неравенству

$$\| S\bar{\varphi}(\theta, x, \varepsilon) - S\varphi(\theta, x, \varepsilon) \| \leqslant \frac{2K \mathcal{L} N \varepsilon}{\nu - K_1 (1 + \varepsilon\eta)} \| \bar{\varphi} - \varphi \|. \quad (31)$$

Пусть при всех положительных значениях $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ существуют такие $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ и $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, что выполняются неравенства

$$2KN (\mathcal{L} \varepsilon \rho + \mu) \leqslant \nu\rho, \quad 2KN\mathcal{L} (1 + \varepsilon\eta) \leqslant \eta [\nu - (1 + \varepsilon\eta) K_1]. \quad (32)$$

Тогда из (26) и (31) получаем $\| S\varphi \| \leqslant \rho$, $\| S\varphi(\theta, x, \varepsilon) - S\varphi(\theta, x, \varepsilon) \| \leqslant \leqslant \eta (\| \bar{\theta} - \theta \| + \| \bar{x} - x \|)$, откуда следует, что отображение S переводит множество $C_\rho(\eta)$ в себя: $S : C_\rho(\eta) \to C_\rho(\eta)$.

Второе из неравенств (32) можно представить в виде

$$\frac{2K \mathcal{L} N \varepsilon}{\nu - K_1 (1 + \varepsilon\eta)} \leqslant 1 - \frac{2K \mathcal{L} N}{[\nu - K_1 (1 + \varepsilon\eta)] \eta}.$$

Отсюда и из (31) вытекает неравенство $\| S\bar{\varphi} - S\varphi \| \leqslant q \| \bar{\varphi} - \varphi \|$.

Следовательно, отображение S является сжимающим, и значит оно имеет неподвижную точку $\varphi(\theta, x, \varepsilon) \in C_\rho(\eta)$. График вектор-функции φ является инвариантным многообразием системы (5).

Таким образом, мы установили условия существования центрального многообразия системы (1).

Рассмотрим случай центр-устойчивого многообразия. В этом случае $\mathrm{Re}\lambda(B) > 0$, $\mathrm{Re}\lambda(A) \leqslant 0$ и соответствующий оператор S определяется равенством

$$S\varphi = -\int_{0}^{\infty} e^{-B\sigma} g(\Psi, \varepsilon\varphi(\Psi, \varepsilon), \varepsilon) d\sigma.$$

Если при этом собственные значения матрицы A с нулевыми вещественными частями все простые, то выполняется оценка (25) при $t = \sigma > 0$. В рассматриваемом случае будем требовать выполнения этой оценки:

$$\| e^{A\sigma} \| \leqslant K, \quad K = \text{const}, \quad \sigma > 0. \tag{33}$$

Аналогичные рассуждения справедливы для центр-неустойчивого многообразия; при этом следует предположить выполнение оценки

$$\| e^{A\sigma} \| \leqslant K, \quad K = \text{const}, \quad \sigma < 0. \tag{34}$$

В результате можем сформулировать следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть относительно системы* (1) *выполняются условия* 1°—3° *теоремы* 1, *а также следующие условия*:

а) *вектор-функции* f, h, g *удовлетворяют условию Липшица* (23) *и имеют место неравенства* (24), (25), *а также равенства* (2);

б) *при некоторых* $\rho(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *выполняются неравенства* (32).

Тогда для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *система уравнений* (1) *имеет центральное многообразие*

$$M^* : h = \bar{\varphi}^*(\theta, x) + \varepsilon\varphi^*(\theta, x, \varepsilon), \ \varphi \in C_\rho(\eta), \ \bar{\varphi}^*(\theta, 0) \equiv 0, \ \varphi^*(\theta, 0, \varepsilon) \equiv 0. \tag{35}$$

Теорема 3. *Пусть относительно системы* (1) *выполняются условия* 1°, 2° *теоремы* 1, *а вместо* 3° *условие* $\operatorname{Re}\lambda(B) > 0$ (*или* $\operatorname{Re}\lambda(B) < 0$). *Пусть также выполняются условия* а) *и* б) *теоремы* 2, *при этом в условии* а) *неравенство* (25) *заменено неравенством* (33) (*или* (34)).

Тогда для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *система уравнений* (1) *имеет центр-устойчивое* (*или центр-неустойчивое*) *инвариантное многообразие вида* (35).

4. Из того, что вектор-функции φ и Φ задают соответственно центральное и приближенное центральное многообразие системы (5), следуют соотношения

$$\varphi(\theta, x, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G(-\sigma)\, g(\Psi, \varepsilon\varphi(\Psi, \varepsilon), \varepsilon)\, d\sigma,$$

$$\Phi(\theta, x, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G(-\sigma)\, [g(\tilde{\Psi}, \varepsilon\Phi(\tilde{\Psi}, \varepsilon), \varepsilon) + b(\tilde{\Psi}, \varepsilon)]\, d\sigma,$$

где $\tilde{\Psi} = \Psi(\sigma, \theta/\Phi)$, из которых получаем

$$| \varphi - \Phi | \leqslant (1 - q)^{-1} \frac{2KN}{\nu} \sup_{\theta, x} \| b \|, \tag{36}$$

где $q = \dfrac{2KN\mathcal{L}\varepsilon}{\nu - K_1(1 + \varepsilon\eta)} < 1$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть относительно системы* (1) *выполняются условия теорем* 1, 2 (*или* 1, 3).

Тогда имеет место оценка (36), *характеризующая погрешность приближенных инвариантных многообразий, существование которых установлено в теореме* 1. *При этом, если вектор-функция* $b(\theta, x, \varepsilon)$, *характеризующая невязку, равномерно ограничена, то приближенные инвариантные многообразия являются равномерными асимптотическими разложениями с точностью до порядка* ε^k *соответствующих инвариантных многообразий.*

5. В качестве примера рассмотрим уравнение колебаний маятника

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{d\tau} + \frac{g}{l}\sin x = 0, \tag{37}$$

где l — длина маятника, m — масса, k — коэффициент затухания, g — ускорение силы тяжести. Введя замену $t = \dfrac{k}{m}\tau$ и обозначение $\varepsilon = \dfrac{gm^2}{k^2l^2}$, вместо (37) получим уравнение

$$d^2x/dt^2 + dx/dt + \varepsilon \sin x = 0, \tag{38}$$

эквивалентное системе типа (5), когда отсутствует переменная θ:

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = y = -\varepsilon \sin x. \tag{39}$$

Соответствующая (39) порождающая система ($\varepsilon = 0$) имеет инвариантное многообразие $M_0 : y = 0$. Замена $y = \varepsilon z$ приводит систему (39) к виду

$$dx/dt = \varepsilon z, \quad dz/dt = -z - \sin x. \tag{40}$$

Функция $z = \Phi(x, \varepsilon)$, задающая приближенное ИМ системы (40), удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Phi = -\Phi - \sin x + b, \tag{41}$$

где b — соответствующая невязка.

Будем искать решение уравнения (41) в виде полинома первой степени:

$$\Phi = \varphi_0(x) + \varepsilon \varphi_1(x). \tag{42}$$

Подставляя (42) в (41), после приравнивания коэффициентов при ε^0, ε и оставшихся членов получаем

$$\varphi_0 = -\sin x, \quad \varphi_1 = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \varphi_0, \quad b = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_0 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \varphi_1 \right) + \varepsilon^3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \varphi_1. \tag{43}$$

Таким образом, приближенное ИМ системы (40) имеет вид $\tilde{M}_{\text{пр}} : \Phi = -\sin x - \varepsilon/2 \times \times \sin 2x$. а его невязка b удовлетворяет неравенству

$$|b| \leqslant \varepsilon^2 (3/2 + \varepsilon/4). \tag{44}$$

С помощью рассуждений, аналогичных применяемым при доказательстве теоремы 2, убеждаемся, что система (40) имеет ИМ: $M : z = \varphi(x, \varepsilon)$, $\varphi \in C_\rho(\eta)$, где $\rho = 1$, $\eta = 1/2\varepsilon$, если $0 < \varepsilon \leqslant 1/4$.

Согласно теореме 4 находим оценку погрешности построенного приближенного ИМ:

$$|\varphi(x, \varepsilon) - \Phi(x, \varepsilon)| \leqslant \frac{\varepsilon^3}{1 - 2\varepsilon} (3/2 + \varepsilon/4). \tag{45}$$

Принимая во внимание замену $y = \varepsilon z$, приходим к заключению, что исходная система (39) имеет приближенное ИМ, $M_{\text{пр}}$: $y = -\varepsilon \sin x - \dfrac{\varepsilon^2}{2} \sin 2x$ с невязкой εb, где b удовлетворяет оценке (44). Кроме того, при каждом $0 < \varepsilon \leqslant 1/4$ система (39) имеет ИМ $M : y = \varepsilon\varphi(x, \varepsilon)$, $\varphi \in C_\rho(\eta)$, где $\rho = \varepsilon$, $\eta = 1/2$, при этом имеет место следующая оценка погрешности построенного $M_{\text{пр}} : |\varepsilon\varphi(x, \varepsilon) + \varepsilon \sin x + \varepsilon^2/2 \sin 2x| \leqslant \dfrac{\varepsilon^4}{1 - 2\varepsilon} (3/2 + \varepsilon/4)$.

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике.— Львов: Изд-во АН УССР, 1945.— 137 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Метод интегральных многообразий в нелинейной механике // Тр. Междунар. симп. по нелинейн. колебаниям.— Киев: Изд-во АН УССР, 1963.— 1.— С. 93—154.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
4. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Об асимптотических разложениях инвариантных многообразий. I // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 5.— С. 411—418.
5. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения.— М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950.— 471 с.
6. *Лыкова О. Б.* О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности изолированного статистического решения // Докл. АН СССР.— 1957.— **115**, № 3.— С. 447—449.
7. *Kelley A.* The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds // J. Different. Equat.— 1967.— **3**.— P. 546—570.
8. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного.— М. : Наука, 1965.— 124 с.
9. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Приближенные интегральные многообразия систем дифференциальных уравнений.— Киев. 1979.— 19 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики. 79.15).
10. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* О приближенных интегральных многообразиях систем нелинейных дифференциальных уравнений.— Киев, 1980.— 31 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.5).

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 06.05.87