УДК 519.21

В. В. Анисимов

Оценки отклонений переходных характеристик неоднородных марковских процессов

Пусть $x^{(i)}(t)$, $t \geqslant 0$, $i = 1, 2$,— два необрывающихся марковских процесса (МП) со значениями в измеримом пространстве $(X, \mathfrak{B}_X)$, начальными распределениями $\rho^i(A)$ и вероятностями переходов $p^i(t, x, s, A)$, $x \in X$, $A \in \mathfrak{B}_X$, $0 \leqslant t \leqslant s$ (здесь t и s принимают значения на промежутке $[0, \infty)$ для непрерывного времени и значения 0, 1, 2 ... — для дискретного). Введем коэффициент равномерно сильного перемешивания

$$\varphi^{(i)}(t, s) = \sup\{|p^{(i)}(t, x_1, s, A) - p^{(i)}(t, x_2, s, A)|: x_1, x_2 \in X, \quad A \in \mathfrak{B}_X\}, \quad t \leqslant s.$$

Теорема 1. *Пусть существуют числа $\tau > 0$, $0 < q_1 < 1$ такие, что для некоторого $d < \tau$*

$$\sup_{k \geqslant 0} \varphi^{(1)}(d + k\tau, d + (k+1)\tau) \leqslant q_1 \tag{1}$$

и

$$\sup_{k \geqslant 0} \sup_{x,A} |p^{(1)}(d + k\tau, x, d + (k+1)\tau, A) - p^{(2)}(d + k\tau, x, d + (k+1)\tau, A)| \leqslant \alpha, \tag{2}$$

где α таково, что

$$q_1 + 2\alpha = q_2 < 1. \tag{3}$$

Тогда для любых $t < s$

$$\varphi^{(2)}(t, s) \leqslant q_2^{[\tau^{-1}(s-t)]-1}. \tag{4}$$

Доказательство. Покажем вначале, что для любых $t<s<v$

$$\varphi^{(1)}(t, v) \leqslant \varphi^{(1)}(t, s)\, \varphi^{(1)}(s, v) \tag{5}$$

(для дискретного времени аналогичное соотношение приведено в [1, 2]).

Приведем известное неравенство: для любой $\mathfrak{B}_X$-измеримой $f(x)$ и мер $P(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ на $\mathfrak{B}_X$

$$\left|\int_X f(x) P(dx) - \int_X f(x) Q(dx)\right| \leqslant 2 \sup_X |f(x)| \sup_A |P(A) - Q(A)| \tag{6}$$

(см., например, [3, с. 237]); при этом если $f(x) \geqslant 0$, сомножитель 2 в правой части (6) можно опустить.

Тогда из уравнения Чепмена—Колмогорова

$$|p^{(1)}(t, x_1, v, A) - p^{(1)}(t, x_2, v, A)| = \left|\int_X (p^{(1)}(t, x_1, s, dz) - p^{(1)}(t, x_2, s, dz)) \times\right.$$

$$\left.\times\, p^{(1)}(s, z, v, A)\right| = \left|\int_X (p^{(1)}(t, x_1, s, dz) - p^{(1)}(t, x_2, s, dz)) \times\right.$$

$$\left.\times\, (p^{(1)}(s, z, v, A) - g(s, v, A))\right| \leqslant 2 \sup_z |p^{(1)}(s, z, v, A) - g(s, v, A)| \times$$

$$\times \sup_B |p^{(1)}(t, x_1, s, B) - p^{(1)}(t, x_2, s, B)|,$$

откуда следует (5). Здесь

$$g(s, v, A) = \frac{1}{2}(\sup_x p^{(1)}(s, x, v, A) + \inf_x p^{(1)}(s, x, v, A)) \tag{7}$$

и очевидно $|p^{(1)}(s, z, v, A) - g(s, v, A)| \leqslant \frac{1}{2}\varphi^{(1)}(s, v)$. Далее пусть для некоторых целых a и b

$$d + a\tau < t \leqslant d + (a+1)\tau,\ d + b\tau \leqslant s < d + (b+1)\tau,\ a \leqslant b.$$

Тогда в силу (4)

$$\varphi^{(2)}(t, s) \leqslant \prod_{k=a+1}^{b} \varphi^{(2)}(d + k\tau,\quad d + (k+1)\tau) \tag{8}$$

$\left(\text{при } k > m \text{ полагаем } \prod_k^m = 1\right)$. Теперь из соотношения

$$|p^{(2)}(t, x_1, s, A) - p^{(2)}(t, x_2, s, A)| \leqslant |p^{(1)}(t, x_1, s, A) -$$

$$- p^{(1)}(t, x_2, s, A)| + 2 \max_{x=x_1,x_2} |p^{(1)}(t, x, s, A) - p^{(2)}(t, x, s, A)|$$

и условий (2), (3) получим, что $\sup_{k\geqslant 0} \varphi^{(2)}(d + k\tau, d + (k+1)\tau) \leqslant q_2$, откуда согласно (8) следует (4), что доказывает теорему 1.

Следствие 1. *Если существуют* $\tau > 0$, $0 < q_1 < 1$ *такие, что*

$$\sup_{t\geqslant 0} \varphi^{(1)}(t, t+\tau) \leqslant q_1, \tag{9}$$

$$\sup_{t\geqslant 0} \sup_A |p^{(1)}(t, x, t+\tau, A) - p^{(2)}(t, x, t+\tau, A)| \leqslant \alpha \tag{10}$$

и выполнено (3), *то для любых* $t<s$ $\varphi^{(2)}(t, s) \leqslant q_2^{[\tau^{-1}(s-t)]}$.

Укажем теперь условия в терминах локальных характеристик процесса, при которых выполняется (2) (либо (10)). Введем величину отклонения переходных вероятностей $\psi^{(1,2)}(t, s) = \sup_{x,A} |p^{(1)}(t, x, s, A) - p^{(2)}(t, x, s, A)|$. Рассмотрим случай дискретного времени. Обозначим $p^{(i)}(x, k, A) = p^{(i)}(k, x, k+1, A)$, $x \in X$, $A \in \mathfrak{B}_X$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2$.

Лемма 1. *Если*

$$\sup\{|p^{(1)}(x, k, A) - p^{(2)}(x, k, A)| : x \in X,\ A \in \mathfrak{B}_X,\quad k \geqslant 0\} \leqslant \varepsilon, \tag{11}$$

то для любого целого $\tau > 0$

$$\psi^{(1,2)}(k, k+\tau) \leqslant \tau\varepsilon. \tag{12}$$

Доказательство. Для любых $k \leqslant j$ в силу неравенства (6) (без сомножителя 2)

$$|p^{(1)}(k, x, j+1, A) - p^{(2)}(k, x, j+1, A)| = \Big|\int_X p^{(1)}(k, x, j, dz) \times$$

$$\times (p^{(1)}(z, j, A) - p^{(2)}(z, j, A)) + \int_X (p^{(1)}(k, x, j, dz) - p^{(2)}(k, x, j, dz)) \times$$

$$\times p^{(2)}(z, j, A)\Big| \leqslant \sup_z |p^{(1)}(z, j, A) - p^{(2)}(z, j, A)| + \sup_B |p^{(1)}(p, x, j, B) -$$

$$- p^{(2)}(k, x, j, B)|,$$

откуда следует (12). Лемма доказана.

Отметим, что для непрерывного времени и дискретного множества состояний аналогичное утверждение в терминах локальных интенсивностей вероятностей переходов приведено в [4].

Приведем теперь оценки отклонений переходных характеристик на произвольном интервале времени.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (9) *и*

$$\sup_{t \geqslant 0} \sup_{u \leqslant \tau} \psi^{(1,2)}(t, t+u) \leqslant \alpha. \tag{13}$$

Тогда для любых $t < s$

$$\psi^{(1,2)}(t, s) \leqslant \alpha(1 - q_1)^{-1}(1 - q_1^{[\tau^{-1}(s-t)]+1}). \tag{14}$$

Доказательство. Используя выражение (7) и неравенство (6), получаем

$$|p^{(1)}(t, x, s+\tau, A) - p^{(2)}(t, x, s+\tau, A)| = \Big|\int_X (p^{(1)}(t, x, s, dz) -$$

$$- p^{(2)}(t, x, s, dz))(p^{(1)}(s, z, s+\tau, A) - g(s, s+\tau, A)) +$$

$$+ \int_X p^{(2)}(t, x, s, dz)(p^{(1)}(s, z, s+\tau, A) - p^{(2)}(s, z, s+\tau, A))\Big| \leqslant$$

$$\leqslant q_1 \sup_B |p^{(1)}(t, x, s, B) - p^{(2)}(t, x, s, B)| + \alpha.$$

Тем самым $\varphi^{(1,2)}(t, s+\tau) \leqslant q_1\varphi^{(1,2)}(t, s) + \alpha$, откуда в силу (13) нетрудно получить (14). Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Пусть процессы* $x^i(\cdot)$, $i = 1, 2$,— *однородны по времени и выполнены условия* (9), (13) *и* (3). *Тогда существуют стационарные меры* $\pi^{(i)}(\cdot)$ *процессов* $x^i(\cdot)$ *и*

$$\sup_A |\pi^{(1)}(A) - \pi^{(2)}(A)| \leqslant \alpha(1 - q_1)^{-1}.$$

Рассмотрим приложения полученных результатов к задаче построения оценок отклонений распределения момента первого выхода из подмножества состояний от обобщенного геометрического или показательного распределения. Ограничимся случаем дискретного времени. Пусть $x(k)$, $k \geqslant 0$,— МП со значениями в X, переходными вероятностями на k-м шаге $p(x, k, A)$ и начальным распределением $\rho(A)$; при этом $X = X_1 \cup \{0\}$ и $\rho(X_1) = 1$. Предположим, что

$$p(x, k, A) = p^{(1)}(x, k, A) + b(x, k, A), \quad x \in X_1, \quad A \in \mathfrak{B}_X, \quad k \geqslant 0, \tag{15}$$

а МП $x^{(1)}(k)$, $k \geqslant 0$, на X_1 с вероятностями переходов $p^{(1)}(x, k, A)$ и начальным распределением $\rho(A)$ соответствует один существенный класс.

Тем самым $p(x, k, \{0\}) = b(x, k, \{0\})$, $x \in X_1$. Обозначим

$$b_k = \sup\{|b(x, k, A)| : x \in X_1, \ A \in \mathfrak{B}_{X_1}\}, \quad p_k = \sup_{x \in X_1} p(x, k, \{0\}),$$

$$d_k = \inf_{x \in X_1} p(x, k, \{0\}), \quad \lambda_k = Mp(x^{(1)}(k), k, \{0\}), \quad \varepsilon_k = \sup_{x \in X_1} |p(x, k, \{0\}) - \lambda_k|,$$

$$\Lambda(n) = -\sum_{k=0}^{n} \ln(1 - \lambda_k), \quad D(n) = \sum_{k=0}^{n} d_k.$$

Введем случайный момент $\nu = \min\{k : k > 0, \ x(k) = 0\}$.

Теорема 3. *Если для некоторого целого $\tau > 0$ выполнено* (9), *для любого $k \geqslant 0$*

$$q_1 + 4 \sum_{i=k}^{k+\tau-1} (b_i + p_i) \leqslant q < 1, \tag{16}$$

то для любого $n > 0$ при $p_k \leqslant 1/2$, $k \leqslant n$

$$|P\{\nu > n\} - \exp\{-\Lambda(n)\}| \leqslant 8 \exp\{-\Lambda(n)\} \cdot \sum_{i=0}^{n} (p_i + b_i)\varepsilon_i +$$

$$+ 2\exp\{-D(n)\} \left(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2 + 64 \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (p_i + b_i)\varepsilon_i (p_j + b_j)\varepsilon_j + \right.$$

$$\left. + \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} q^{[\tau^{-1}(j-i)]} \varepsilon_i \varepsilon_j + 2\left(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2\right)^2\right). \tag{17}$$

Следствие 3. *Пусть процесс $x(k)$ однороден по времени, для некоторого целого $\tau > 0$ выполнено* (9) *и $q_1 + 4\tau(b_1 + p_1) \leqslant q < 1$.*

Тогда для любого $n > 0$ при $p \leqslant 1/2$

$$|P\{\nu \geqslant n\} - \exp\{n \ln(1 - \tilde{\lambda})\}| \leqslant 8 \exp\{n \ln(1 - \tilde{\lambda})\} n (p_1 + b_1)\tilde{\varepsilon} +$$

$$+ 2\exp\{-nd_1\}(n\tilde{\varepsilon}^2(1 + 8\tau(1 - q)^{-1}(1 + 2(p_1 + b_1))) + 2\tilde{\varepsilon}\tau(1 - q)^{-1} +$$

$$+ (6n\tilde{\varepsilon}(p_1 + b_1))^2), \tag{18}$$

где $\tilde{\lambda} = \int_{X_1} p(x, 1, \{0\})\pi(dx)$, $\tilde{\varepsilon} = \sup_{x \in X_1} |p(x, 1, \{0\}) - \tilde{\lambda}|$, $\pi(\cdot)$ — стационарная мера процесса $x^{(1)}(\cdot)$.

Доказательство. В работах [5, 6] показано, что имеет место представление

$$P\{\nu > n\} = M \prod_{k=0}^{n} p(\tilde{x}(k), k, X_1),$$

где $\tilde{x}(k)$, $k \geqslant 0$, — МП на X_1 с начальным распределением $\rho(A)$ и вероятностями переходов на k-м шаге $\tilde{p}(x, k, A) = p(x, k, A)\, p(x, k, X_1)^{-1}$, $x \in X_1$, $A \in \mathfrak{B}_{X_1}$, $k \geqslant 0$. Далее, используя формулу Тейлора до 2-го порядка с остаточным членом в форме Лагранжа, нетрудно получить, что для любых

$x \geqslant a,\ y \geqslant a \geqslant 0\ \ |e^{-x} - e^{-y} - e^{-y}(y-x)| \leqslant \frac{1}{2} e^{-a}(y-x)^2$, а при $0 \leqslant x \leqslant$ $\leqslant 1/2,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/2\ \ |\ln(1-x) - \ln(1-y) - (1-y)^{-1}(y-x)| \leqslant 2\,(y-x)^2$. Использовав приведенные неравенства, после преобразований для любых чисел $0 \leqslant \gamma_i \leqslant \alpha_i \leqslant 1/2,\ 0 \leqslant \gamma_i \leqslant \beta_i \leqslant 1/2,\ i = \overline{0, n}$, получим

$$\left|\prod_{k=0}^{n}(1-\alpha_i) - \prod_{i=0}^{n}(1-\beta_i) - \prod_{i=0}^{n}(1-\beta_i)\sum_{i=0}^{n}(1-\beta_i)^{-1}(\beta_i-\alpha_i)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} e^{-\Gamma_n}\left(\sum_{i=0}^{n}(\ln(1-\alpha_i) - \ln(1-\beta_i))\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\Gamma_n}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}(1-\beta_i)^{-1}(\beta_i-\alpha_i)\right)^2 + 4\left(\sum_{i=0}^{n}(\beta_i-\alpha_i)^2\right)^2\right), \qquad (19)$$

где $\Gamma_n = -\sum_{i=0}^{n}\ln(1-\gamma_i)$.

Обозначим $\alpha_i = 1 - p(\tilde{x}(i),\ i,\ X_1),\ \beta_i = 1 - \lambda_i,\ i \geqslant 0$. По построению процесса $\tilde{x}(k)$ при $p_k \leqslant 1/2$

$$|\tilde{p}(x,\ k,\ A) - p^{(1)}(x,\ k,\ A)| \leqslant 2(p_k + b_h),\ x \in X_1,\ A \in \mathfrak{B}_{X_1},$$

и согласно (6) $|M\alpha_k - \beta_k| \leqslant 4\varepsilon_k\,(p_k + b_k)$. При этом если через $\tilde{\varphi}_{i,j}$ обозначить коэффициент равномерно сильного перемешивания для МП $\tilde{x}(\cdot)$, то в силу теоремы 1 и леммы 1 для любого $k \geqslant 0$ $\varphi_{i,i+\tau} \leqslant q_1 + 4\sum_{i=k}^{k+\tau-1}(b_i + p_i) \leqslant$ $\leqslant q$. Далее из неравенства (6) имеем $|M(\beta_i - \alpha_i)(\beta_j - \alpha_j)| \leqslant |M(\beta_i - \alpha_i) \times$ $\times M(\beta_j - \alpha_j)| + 2\tilde{\varphi}_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j$. Теперь переписывая (19) в виде двусторонних неравенств, используя соотношение $\ln(1-\gamma_i) \geqslant -\gamma_i$ и переходя к математическим ожиданиям, на базе полученных оценок после преобразований получаем (17), что доказывает теорему 3.

Отметим, что из оценки (17) вытекают также результаты о неасимптотическом укрупнении цепей Маркова, поскольку при $p(x,\ k,\ \{0\}) \equiv p(x_1,$ $k,\ \{0\}),\ x,\ x_1 \in X_1,\ k \geqslant 0,\ \varepsilon_k \equiv 0$ и величина ν имеет неоднородное геометрическое распределение.

Рассмотрим теперь схему серий и предположим, что характеристики процесса $x(\cdot)$ меняются таким образом, что (9) выполняется при фиксированных q_1 и τ, а

$$b_i + p_i \leqslant C_1\varepsilon,\quad d_i \geqslant a\varepsilon,\quad \varepsilon_i \leqslant C_2\delta(\varepsilon) \qquad (20)$$

и существует функция Λ_t такая, что $|\Lambda([\varepsilon^{-1}t]) - \Lambda_t| \leqslant C_3\varepsilon,\ t > 0$, где $C_1,\ C_2,\ C_3,\ a$ фиксированы, а $\varepsilon \to 0,\ \delta(\varepsilon) \to 0$. Тогда справедливо такое утверждение.

Следствие 4. *При указанных предположениях при достаточно малом ε для любого $t > 0$*

$$|P\{\varepsilon\nu > t\} - \exp\{-\Lambda_t\}| \leqslant \delta(\varepsilon)\,e^{-at}(A_1 + A_2 t + A_3\delta(\varepsilon)\,t^2) + \varepsilon A_4 e^{-\Lambda_t}, \quad (21)$$

где $A_i,\ i = \overline{1, 4}$,— не зависящие от t константы, явные выражения которых могут быть указаны согласно (17).

Из (21) вытекают предельные теоремы для ν, которые согласуются с [6, 7], а в однородном случае — с [8, 9]. Отметим также, что оценки близости ν к показательному закону другими методами изучались в [10—14].

Заметим, что соотношения (17), (18) позволяют получать оценки близости к обобщенному показательному в схеме серий и для значительно более общих систем, у которых время перемешивания τ может расти, к примеру для s-множеств [6].

Пример 1. Пусть процесс $x(\cdot)$ однороден по времени и его характеристики зависят от параметра ε так, что выполнено (20) и при этом $X_1 = X^{(1)} \cup X^{(2)}$ $(X^{(1)} \cap X^{(2)} = \varnothing)$, выполнено (15), где МП $x^{(1)}(k)$ на X_1 соответствуют два существенных класса на множествах $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, при этом на каждом множестве МП $x^{(1)}(\cdot)$ удовлетворяет условию (9), а $b(x, 1, X^{(2)}) \leqslant C_1 \varepsilon^{\alpha}$, $x \in X^{(1)}$, $b(x, 1, X^{(1)}) \leqslant C_2 \varepsilon^{\beta}$, $x \in X^{(2)}$.

Обозначим через $\pi^{(i)}(\cdot)$ стационарную меру на $X^{(i)}$, а через $\pi(\cdot)$ — стационарную меру МП $\tilde{x}(\cdot)$ на X_1. Положим $b_{12} = \int\limits_{X^{(1)}} \pi^{(1)}(dx)\, b(x, 1, X^{(2)})$ (аналогично b_{21}). Тогда если $b_{12} \geqslant C_3 \varepsilon^{\alpha} > 0$, $b_{21} \geqslant C_4 \varepsilon^{\beta} > 0$ и $\gamma = \alpha \wedge \beta < 1$, то можно показать, что для любого $q_1 < 1$ найдутся $L = L_{q_1}$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что процесс $\tilde{x}(\cdot)$ на X_1 удовлетворяет условию (9) при $\tau = L\varepsilon^{-\gamma}$ для всех $\varepsilon < \varepsilon_0$. Тем самым из (18), (22) получим, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$|P\{\varepsilon\nu > t\} - e^{-\varepsilon^{-1} t \tilde{\lambda}}| \leqslant \delta(\varepsilon)\, \varepsilon^{-\gamma} e^{-at} (A_1 + A_2 t + A_3 \varepsilon^{\gamma} \delta(\varepsilon) t^2) + \varepsilon A_4 e^{-\varepsilon^{-1} t \tilde{\lambda}}.$$

Пример 2. Пусть выполнено (15), при этом $b_k \leqslant b/k$, $p(x, k, \{0\}) = p(x)/k$, $p(x) \leqslant a$, $x \in X_1$, а $p^{(1)}(x, k, A) \equiv p(x, A)$, где $p(x, A)$ — переходные вероятности некоторого МП на X_1, который удовлетворяет условию (9). Через $\pi(\cdot)$ обозначим его стационарную меру, а $p = \int\limits_{X_1} p(x)\, \pi(dx)$. Положим $\alpha = \sup\limits_{x \in X_1} |p(x) - p|$, $d = \inf\limits_{x \in X_1} p(x)$. Тогда для любого $s > 0$, достаточно большого n такого, что $ns > 1$, $p/ns \leqslant 1$, $a/n \leqslant 1/2$ и любого $t > s$

$$\left| P\{\nu > nt/\nu > ns\} - \left(\frac{s}{t}\right)^p \right| \leqslant \left(\frac{s}{t}\right)^d \frac{A\alpha}{ns}, \tag{22}$$

где A зависит только от величин a, α, τ, q_1.

Заметим, что (22) вытекает из оценки, подобной (17), с учетом, что $P\{\nu > m/\nu > n\} = M \prod\limits_{k=n+1}^{m} p(\tilde{x}(k), k, X_1)$.

1. *Добрушин Р. Л.* Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I, II // Теория вероятностей и ее применения.— 1956.- **1**, вып. 1, 4.— С. 72—89, 365—425.
2. *Лоэв М.* Теория вероятностей.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 720 с.
3. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер.— М. : Наука, 1977.— 352 с.
4. *Анисимов В. В., Таиров М. Ф.* Оценки сближения переходных характеристик марковских цепей // Тез. докл. 4-й Междунар. конф. по теории вероятностей и мат. статистике.— 1985.— **1**.— С. 28—29.
5. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для случайных процессов и их применения к дискретным схемам суммирования.— Киев : Изд-во Киев. ун-та 1976.— 80 с.
6. *Анисимов В. В.* Асимптотические методы анализа стохастических систем.— Тбилиси : Мецниереба, 1984.— 180 с.
7. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для неоднородных слабозависимых схем суммирования // Теория вероятностей и мат. статистика. Киев.— 1982.— Вып. 27.— С. 10—22.
8. *Королюк В. С.* Асимптотическое поведение времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний // Укр. мат. журн.— 1969.— **21**, № 6.— С. 842—845.
9. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1976.— 184 с.
10. *Зубков А. М.* Неравенства для вероятностей переходов с запрещениями и их применения // Мат. сб.— 1979.— **109**, вып. 4.— С. 491—532.
11. *Соловьев А. Д.* Аналитические методы расчета и оценки надежности // Вопросы мат. теории надежности.— М. : Радио и связь, 1983.— С. 9—112.
12. *Коваленко И. Н.* Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем.— М. : Сов. радио, 1980.— 208 с.
13. *Aldous D. J.* Markov chains with almost exponential hitting times // Stochast. Process. and Appl.— 1982.— **13**, № 3.— P. 305—310.
14. *Карташов Н. В.* Оценки геометрической асимптотики моментов первого достижения для цепей Маркова // Теория вероятностей и ее применения.— 1985.— **30**, вып. 1.— С. 202—203.

Киев. ун-т

Получено 19.03.86