УДК 517.9:519.6

*И. М. Черевко, И. В. Якимов*

# Численный метод решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

1. Введение. В настоящей работе излагается численный метод решения краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений, основанный на аппроксимации решения кубическими сплайнами. Для обыкновенных дифференциальных уравнений метод сплайн-коллокаций обсуждался в [1—3]. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению и применение к ее решению проекционно-итеративных методов рассмотрено в [4]. Данная статья продолжает исследования, анонсированные в [2]. Применение аппарата $B$-сплайнов позволяет построить алгоритмы, наиболее простые по реализации и в то же время пригодные для решения широкого круга задач.

Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$L[y] = y''(x) + p(x)\,y'(x) + q_1(x)\,y(x) + q_2(x)\,y(x-\tau(x)) + \\ + \sum_{i,j=0}^{1}\int_a^b K_{ij}(x,s)\,y^{(i)}(s-\tau_{ij}(s))\,ds = r(x),\quad x\in[a,b], \tag{1}$$

$$y(x) = \varphi(x) \ \text{при}\ x\notin[a,b],\quad y(a)=\varphi(a)=\gamma_1,\quad y(b)=\varphi(b)=\gamma_2, \tag{2}$$

где $p(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$, $\tau(x)$, $\tau_{01}(x)$ — непрерывные функции на $[a, b]$, $\tau_{00}(x) = \tau_{10}(x) = 0$, $\tau_{11} = \mathrm{const}$, $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция при $x \notin [a, b]$.

Пусть $K_{ij}(x, s)$, $\partial K_{1j}(x, s)/\partial s$ — непрерывные функции по обоим аргументам в квадрате $[a, b]\times[a, b]$. Тогда существуют непрерывные на $[a, b]$ функции

$$J_{ij}(x) = \int_a^b |K_{ij}(x,s)|\,ds,\qquad I_j(x) = \int_a^b \left|\frac{\partial K_{1j}(x,s)}{\partial s}\right| ds,\quad i,j=0,1,$$

$$M_0(x) = |K_{10}(x,b)| + |K_{10}(x,a)|,\quad M_1(x) = 2\max_{s\in[a,b]}|K_{11}(x,s)|.$$

Вопросы существования и единственности решения поставленной задачи в случае, когда уравнение (1) является дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом, изучались в [4, 5]. В дальнейшем будем предполагать, что существует единственное дважды непрерывно дифференцируемое решение задачи (1), (2).

2. Вычислительная схема. Ищем приближенное решение задачи (1), (2) в виде кубического сплайна $S(x)$ [6]

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} b_i B_i(x) \tag{3}$$

на равномерной сетке

$$\Delta: x_{-1} < x_0 < \ldots < x_n < x_{n+1},\quad x_k = a + kh,\quad k = \overline{-1, n+1},\ h = \frac{b-a}{n}. \tag{4}$$

Подставляя $S(x)$ в уравнение (1) и краевые условия (2), в узлах $x_k\in[a,b]$ получаем

$$L[S(x_k)] = S''(x_k) + p(x_k)\,S'(x_k) + q_1(x_k)\,S(x_k) + q_2(x_k)\,S(x_k-\tau(x_k)) + \\ + \sum_{i,j=0}^{1}\int_a^b K_{ij}(x_k,s)\,S^{(i)}(s-\tau_{ij}(s))\,ds = r(x_k),\quad k=\overline{0,n}, \tag{5}$$

$$S(x_0) = \gamma_1,\quad S(x_n) = \gamma_2. \tag{6}$$

Заменяя значения сплайна и его производных соотношениями

$$S(x_k)=\frac{b_{k-1}+4b_k+b_{k+1}}{6},\qquad S'(x_k)=\frac{b_{k+1}-b_{k-1}}{2h},$$

$$S''(x_k)=\frac{b_{k-1}-2b_k+b_{k+1}}{h^2},\quad k=\overline{0,n},\tag{7}$$

и вводя для сокращения записей обозначения $p(x_k)=p_k$, $q_1(x_k)=q_{1k}$, $q_2(x_k)=q_{2k}$, $r(x_k)=r_k$, перепишем (5) и (6) в следующем виде:

$$\frac{b_{k-1}-2b_k+b_{k+1}}{h^2}+p_k\frac{b_{k+1}-b_{k-1}}{2h}+q_{1k}\frac{b_{k-1}+4b_k+b_{k+1}}{6}+$$

$$+q_{2k}\sum_{m=-1}^{n+1}b_mB_m(x_k-\tau(x_k))+\sum_{i,j=0}^{1}\int_a^b K_{ij}(x_k,s)\sum_{m=-1}^{n+1}b_mB_m^{(i)}(s-\tau_{ij}(s))\,ds=r_k,$$

$$k=\overline{0,n},\tag{8}$$

$$\frac{b_{-1}+4b_0+b_1}{6}=\gamma_1,\qquad \frac{b_{n-1}+4b_n+b_{n+1}}{6}=\gamma_2.\tag{9}$$

Соотношения (8), (9) — это система $n+3$ линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов сплайна $b_k$, $k=\overline{-1,n+1}$. Запишем эту систему в матричном виде

$$A\cdot b=r,\tag{10}$$

где $b=(b_{-1},b_0,\ldots,b_{n+1})^T$, $A$ — матрица размерности $(n+3)\times(n+3)$.

Введем обозначения

$$A_{ij}=\{x:x-\tau_{ij}(x)\in[a,b]\},\quad B_{ij}=[a,b]/A_{ij},\quad i,j=0,1,$$

$$t_k=\begin{cases}0, & x_k-\tau(x_k)\notin(a,b),\\ 1, & x_k-\tau(x_k)\in(a,b),\quad k=\overline{0,n}.\end{cases}$$

Тогда элементы $a_{ij}$ находятся по формулам, которые несложно получить из (8), (9):

$$a_{-1,-1}=1,\quad a_{-1,0}=4,\quad a_{-1,1}=1,\quad a_{-1,j}=0,\quad j=\overline{2,n+1},$$

$$a_{n+1,j}=0,\quad j=-\overline{1,n-2},\quad a_{n+1,n-1}=1,\quad a_{n+1,n}=4,\quad a_{n+1,n+1}=1,$$

$$a_{k,k}=-2+\frac{2}{3}h^2q_{1k}+t_kh^2q_{2k}B_k(x_k-\tau(x_k))+h^2\sum_{i,j=0}^{1}\int_{A_{ij}}K_{ij}(x_k,s)\times$$

$$\times B_k^{(i)}(s-\tau_{ij}(s))\,ds,$$

$$a_{k,k+l}=1-\frac{1}{2}hp_k+\frac{1}{6}h^2q_{1k}+t_kh^2q_{2k}B_{k+l}(x_k-\tau(x_k))+$$

$$+h^2\sum_{i,j=0}^{1}\int_{A_{ij}}K_{ij}(x_k,s)B_{k+l}^{(i)}(s-\tau_{ij}(s))\,ds,\quad l=-1,1,\tag{11}$$

$$a_{k,l}=t_kh^2q_{2k}B_l(x_k-\tau(x_k))+h^2\sum_{i,j=0}^{1}\int_{A_{ij}}K_{ij}(x_k,s)B_l^{(i)}(s-\tau_{ij}(s))\,ds,$$

$$k=\overline{0,n},\quad l=-1,0,\ldots,k-2,k+2,\ldots,n+1.$$

Элементы вектора $r=(r_{-1},r_0,\ldots,r_{n+1})^T$, содержащегося в правой части системы (10), определяются следующим образом:

$$r_{-1} = 6\gamma_1,$$

$$r_k = h^2 r(x_k) - (1 - t_k) h^2 \varphi(x_k - \tau(x_k)) - h^2 \sum_{i,j=0}^{1} \int_{B_{ij}} K_{ij}(x_k, s)\, \varphi^{(i)}(s - \tau_{ij}(s)) ds,$$

$$k = \overline{0, n},$$

$$r_{n+1} = 6\gamma_2.$$

Таким образом, построение приближенного решения краевой задачи (1), (2) в виде (3) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений вида (10).

3. Достаточные условия сходимости алгоритма.

Теорема. *Пусть существует единственное решение краевой задачи* (1), (2) *и выполняется одно из условий*:

A) $\max [|q_1(x)| + |q_2(x)| + J_{00}(x) + J_{01}(x) + M_0(x) + M_1(x) + I_1(x) + I_2(x)] < 8\left[(b-a)^2 + \frac{4}{3}h^2\right]^{-1}$,

B) $q_1(x) + \frac{5}{3}|q_2(x)| + J_{00}(x) + J_{01}(x) + \frac{5}{3}[M_1(x) + M_2(x)] + I_1(x) + I_2(x) < -M < 0$, *где* $M$ — *положительная постоянная. Тогда существует* $h_0 > 0$ *такое, что при* $0 < h < h_0$ *система* (10) *имеет единственное решение и справедлива оценка*

$$\| S(x) - y(x) \|_{C[a,b]} \leqslant \alpha(h) \to 0, \quad h \to 0.$$

Доказательство. Пусть $S(x, y)$ — кубический сплайн, интерполирующий на сетке (4) решение $y(x)$ краевой задачи (1), (2), а $S(x)$ — сплайн, определенный решением системы (10). Тогда имеем $\| S(x) - y(x) \| \leqslant \| S(x) - S(x, y) \| + \| S(x, y) - y(x) \|$. Для второго слагаемого согласно теореме 3.5 [7] справедлива оценка $\| S(x, y) - y(x) \| \leqslant K_0 h^2 \omega(y'')$, где $\omega(f)$ — модуль непрерывности функции $f$, причем $\omega(f) \to 0$ при $h \to 0$, если функция $f(x)$ непрерывна.

Оценим первое слагаемое. Для этого представим сплайн $S(x, y)$ через $B$-сплайны: $S(x, y) = \sum_{m=-1}^{n+1} d_m B_m(x)$. Тогда

$$\| S(x) - S(x, y) \| = \left\| \sum_{m=-1}^{n+1} (b_m - d_m) B_m(x) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{-1 \leqslant m \leqslant n+1} |d_m - b_m| \left\| \sum_{m=-1}^{n+1} B_m(x) \right\| = \max_{-1 \leqslant m \leqslant n+1} |d_m - b_m|.$$

Подставляя разницу $S(x, y) - y(x)$ в уравнение (1) и используя теорему 3.5 [7], получаем

$$|L[S(x, y) - y(x)]| = \alpha(x, h) \leqslant K\omega(y''),$$

где $K = \max_{x \in [a,b]} \left[K_2 + |p(x)| K_1 h + |q_1(x)| K_0 h^2 + \sum_{i,j=0}^{1} \int_a^b |K_{ij}(x, s)| K_i h^{2-i} ds\right]$.

При этом $\omega(y'') \to 0$ при $h \to 0$, а значит, и $\alpha(x, h) \to 0$ при $h \to 0$ для всех $x \in [a, b]$, в том числе и для $x = x_k$, $k = \overline{0, n}$. Таким образом, имеем $L[S(x_k, y) - y(x_k)] = \alpha_k(h)$, $k = \overline{0, n}$, откуда, учитывая, что $L[y(x_k)] = r(x_k)$, находим $L[S(x_k, y)] = r_k + \alpha_k(h)$, $k = \overline{0, n}$, $|\alpha_k(h)| = \alpha(x_k, h)$. Для определения коэффициентов $d_m$, $m = -\overline{1, n+1}$, получим систему уравнений, аналогичную (10):

$$Ad = r + \varepsilon, \tag{12}$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n+1})^T$ и $\varepsilon_{-1} = 0$, $\varepsilon_k = h^2 \alpha_k(h)$, $k = \overline{0, n}$, $\varepsilon_{n+1} = 0$.

Вычитая из (12) равенство (10), получаем

$$A(d - b) = \varepsilon. \tag{13}$$

Покажем справедливость теоремы при выполнении условия А. Заметим, что заменой переменных $y = u \exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right]$ уравнение (1) сводится к уравнению, в котором отсутствует слагаемое с производной от неизвестной функции. Поэтому, не теряя общности, далее вместо уравнения (1) можно рассматривать уравнение

$$y''(x) + q_1(x)\,y(x) + q_2(x)\,y(x - \tau(x)) + \sum_{i,j=0}^{1} \int\limits_a^b K_{ij}(x, s)\,y^{(i)}(s - \tau_{ij}(s)) \times$$

$$\times\, ds = r(x).$$

При этом в формулах (11) будут отсутствовать слагаемые, содержащие функцию $p(x)$, и учитывая их вид, матрицу $A$ системы (10) можно представить в виде $A = D + h^2 C$, где элементы матриц $D$ и $C$ определяются соотношениями

$$d_{-1,1} = 1, \quad d_{-1,0} = 4, \quad d_{-1,1} = 1, \quad d_{-1,j} = 0, \quad j = \overline{2, n+1},$$

$$d_{n+1,j} = 0, \quad j = -\overline{1, n-2}, \quad d_{n+1,n-1} = 1, \quad d_{n+1,n} = 4, \quad d_{n+1,n+1} = 1, \tag{14}$$

$$d_{ii} = -2, \quad d_{i,i+1} = 1, \quad d_{i,i-1} = 1, \ d_{ij} = 0, \ i = \overline{0, n}, \quad j = -1, 0, \dots, i-2,$$

$$i+2, \dots, n+1,$$

$$h^2 c_{ij} = a_{ij} - d_{ij}, \quad i, j = -\overline{1, n+1}.$$

Учитывая структуру матрицы $D$, несложно получить утверждения, аналогичные приведенным в [3].

Л е м м а. *Матрица $D$ невырождена и справедливы следующие соотношения*:

$$\det D = (-1)^{n+1} \cdot 36h = (-1)^{n+1} 36 \frac{b-a}{n}, \quad \| D^{-1} \| \leqslant \left[\frac{4}{3} h^2 + (b-a)^2\right] \times$$

$$\times (8h^2)^{-1}.$$

Покажем теперь, что матрица $A$ невырождена и найдем оценку для $\| A^{-1} \|$. Имеем

$$A^{-1} = (E + h^2 D^{-1} C)^{-1} D^{-1}, \quad \| A^{-1} \| \leqslant \| (E + h^2 D^{-1} C)^{-1} \| \| D^{-1} \|.$$

Следовательно, если

$$\| h^2 D^{-1} C \| = \nu < 1, \tag{15}$$

то условия теоремы 7.1.1 [8] выполняются и матрица $A$ невырождена. При этом $\| A^{-1} \| \leqslant \left[\frac{4}{3} h^2 + (b-a)^2\right] [(1-\nu)\, 8h^2]^{-1}$. Из соотношения (13) следует

$$\| d - b \| \leqslant \| A^{-1} \| \| \varepsilon \| \leqslant \left[\frac{4}{3} h^2 + (b-a)^2\right] [(1-\nu)\, 8h^2]^{-1} h^2 K \omega(y'') =$$

$$= \frac{1}{1-\nu}\left[\frac{4}{3} h^2 + (b-a)^2\right] \frac{1}{8} K \omega(y'') \to 0, \quad h \to 0.$$

Найдем величину $\nu$, обеспечивающую выполнение условия (15), непосредственно через коэффициенты уравнения (1). Для этого оценим $\| C \| = \max\limits_{-1 \leqslant k \leqslant n+1} \sum\limits_{j=-1}^{n+1} | c_{kj} |$. Учитывая соотношения (14), а также свойства $B$-сплайнов, получаем

$$\| C \| \leqslant \max_{x \in [a, b]} [ | q_1 (x) | + | q_2 (x) | + J_{00} (x) + J_{01} (x) + M_0 (x) + M_1 (x) + l_0 (x) + l_1 (x)].$$

Следовательно, (15) имеет место, если будет выполнено условие

$$\| h^2 D^{-1} C \| \leqslant h^2 \| D^{-1} \| \| C \| \leqslant \left[ \frac{4}{3} h^2 + (b - a)^2 \right] \frac{1}{8} \max_{x \in [a, b]} [ | q_1(x) | + | q_2 (x) | + J_{00} (x) + J_{01} (x) + M_0 (x) + M_1 (x) + l_0 (x) + l_1 (x)] < 1.$$

Из последнего неравенства получаем ограничения на коэффициенты уравнения, совпадающие с условием А теоремы.

Докажем теперь теорему при выполнении условия В. Преобразуем систему (10) к системе с матрицей, имеющей диагональное преобладание, так как система (10) не обладает этим свойством. Обозначим вектор $d - b$ в системе (13) через $f$ и исключим из системы неизвестные $f_{-1}$ и $f_{n+1}$. Учитывая соотношения (9), имеем

$$f_{-1} = - 4 f_0 - f_{-1}, \quad f_{n+1} = - 4 f_n - f_{n-1}. \tag{16}$$

После исключения неизвестных $f_{-1}$ и $f_{n+1}$ из системы (13) получаем систему

$$\bar{A} (\bar{b} - \bar{d}) = \bar{\varepsilon}, \tag{17}$$

для которой каждая из величин $\eta_k = | \bar{a}_{kk} | - \sum\limits_{k \neq j} | \bar{a}_{kj} |$ при достаточно малых $h$ удовлетворяет неравенству

$$\eta_k \geqslant - h^2 q_{1k} - \frac{5}{3} h^2 | q_{2k} | - h^2 J_{00} (x_k) - h^2 \left[ \frac{5}{3} M_0 (x_k) + l_0 (x_k) \right] - h^2 J_{01} (x_k) - h^2 \left[ \frac{5}{3} M_1 (x_k) + l_1 (x_k) \right].$$

Из последнего неравенства следует, что при выполнении условия В теоремы $\eta_k > 0$, т. е. система (17) будет иметь преобладающую диагональ. Применяя теперь теорему Д.2 [7], получаем

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant n} | f_k | = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} | d_k - b_k | \leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{\varepsilon_k}{\eta_k} \leqslant \frac{K}{M} \omega (y'') \to 0, \quad h \to 0. \tag{18}$$

Таким образом, из неравенства (18) и соотношения (16) следует, что теорема справедлива при выполнении условия В.

Замечание. Предложенную вычислительную схему можно применить к уравнениям вида

$$y'' (x) + p (x) y' (x) + q_1 (x) y (x) + \sum_{k=1}^{m} q_{2k} (x) y (x - \tau_k (x)) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{i, j=0}^{1} \int_a^b K_{ijl} (x, s) y^{(i)} (s - \tau_{ijl} (s)) ds = r (x),$$

а также к уравнениям, содержащим интеграл с переменным верхним пределом.

4. Примеры. Рассмотрим численные примеры, иллюстрирующие предложенную вычислительную схему, и сравним полученные приближенные решения $y_{np}$ с точными решениями $y_m$ краевых задач. Результаты вычислений приведены в таблице.

| $x$ | Пример 1 | | | Пример 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $y_m$ | $y_{np}$ | $\Delta$ | $y_m$ | $y_{np}$ | $\Delta$ |
| $x_0$ | 2,0 | 2,0 | 0,0 | 7,38906 | 7,38904 | 0,00002 |
| $x_2$ | 2,4568 | 2,53513 | 0,07826 | 9,02501 | 9,02141 | 0,00360 |
| $x_4$ | 3,03507 | 3,16016 | 0,12509 | 11,02317 | 11,01644 | 0,00673 |
| $x_6$ | 3,75324 | 3,92851 | 0,17527 | 13,46373 | 13,45440 | 0,00933 |
| $x_8$ | 4,63821 | 4,85080 | 0,21259 | 16,44464 | 16,43332 | 0,01132 |
| $x_{10}$ | 5,72453 | 5,99806 | 0,25276 | 20,08551 | 20,07303 | 0,01248 |
| $x_{12}$ | 7,05932 | 7,39175 | 0,33243 | 24,53250 | 24,51982 | 0,01268 |
| $x_{14}$ | 8,68774 | 9,09543 | 0,40769 | 29,96407 | 29,95230 | 0,01177 |
| $x_{16}$ | 10,67772 | 11,17550 | 0,49778 | 36,59822 | 36,58882 | 0,00940 |
| $x_{18}$ | 13,10747 | 13,71397 | 0,60650 | 44,70116 | 44,69556 | 0,00560 |
| $x_{20}$ | 16,07227 | 16,07225 | 0,00002 | 54,59810 | 54,59810 | 0,0 |

Пример 1. Пусть на отрезке [1, 3] необходимо найти решение дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) + \frac{x}{5}\, y\left(x - \frac{x}{2}\right) = x \tag{19}$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered} y(x) = 2x, \quad x \in [0{,}5;\ 1], \\ y(1) = 2, \quad y(3) = y_m(3). \end{gathered} \tag{20}$$

Методом шагов найдено точное решение данной задачи

$$y_m = \frac{11}{5} e^{x-1} + \frac{1}{32} e^{4-4x} + \frac{1}{20} x^2 - \frac{7}{40} x - \frac{17}{100}, \quad x \in [1, 2],$$

$$y_m = \frac{1}{1600} x^3 - \frac{19}{6400} x^2 - \frac{3313}{12800} x - \frac{2003}{10240} + \left(\frac{44}{225} x + \frac{704}{2025}\right) e^{x/2-1} +$$

$$+ \left(\frac{x}{960} - \frac{1}{5760}\right) e^{4-2x} + \frac{11}{5} e^{x-1} - \frac{1639}{6000} e^{x-2} + \frac{1}{32} e^{4-4x} + \frac{4099}{20736000} e^{8-4x}, \quad x \in [2,3].$$

Уравнение (19) удовлетворяет условию В теоремы. Анализируя приближенное решение краевой задачи (19), (20), найденное на сетке с шагом $h = 0,1$, заключаем, что абсолютная погрешность не превышает 0,7, а относительная погрешность — 5 %.

Пример 2. Найдем решение интегро-дифференциального уравнения

$$y''(x) - \frac{1}{x} y(x) + \frac{1}{x^2}\, y\left(x - \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{30} \int_2^4 \sin(xs)\, y(s)\, ds = r(x), \quad x \in [2,4], \tag{21}$$

где $r(x) = e^x \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} e^{x/2} + \frac{e^4(\sin 4x - x\cos 4x) - e^2(\sin 2x - x\cos 2x)}{30(1 + x^2)}$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{gathered} y(x) = e^x, \quad x \in [1, 2], \\ y(2) = e^2, \quad y(4) = e^4. \end{gathered} \tag{22}$$

Функция $y_m = e^x$ является точным решением задачи (21), (22). Уравнение (21) удовлетворяет условию А теоремы. Приближенное решение найдено при шаге $h = 0,1$. Абсолютная погрешность не превышает 0,02.


1. *Мирошниченко В. Л.* Решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом методом сплайн-функций // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат.— 1972.— № 5.— С. 46—50.
2. *Черевко И. М., Якимов И. В.* Численный метод решения краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Функционально-дифференциальные уравнения и их прил.— Махачкала: Даг. ун-т, 1986.— С. 218—220.

3. *Burkowski F. J., Cowan D. D.* The numerical derivation of a periodic solution of a second order differential-difference equation // SIAM J. Numer. Anal.— 1973.— **10**, N 3.— P. 489—495.
4. *Лучка А. Ю.* О краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Дифференциально-функциональные и разностные уравнения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 35—56.
5. *Эльсгольц Л. Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М. : Наука, 1971.— 296 с.
6. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике.— М. : Наука, 1976.— 248 с.
7. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. Н., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций.— М. : Наука, 1980.— 352 с.
8. *Ланкастер П.* Теория матриц.— М. : Наука, 1982.— 269 с.

Черновиц. ун-т Получено 16.10.86