УДК 517.91

Д. Я. Хусаинов, А. Г. Жуйкова

Исследование устойчивости нелинейных систем регулирования нейтрального типа

Рассмотрим систему регулирования с отклоняющимся аргументом нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = D\dot{x}(t-\tau) + Ax(t) + Bx(t-\tau) + bf(\sigma[t]),\ \sigma[t] = c_1^T x(t) + c_2^T x(t-\tau), \tag{1}$$

где $x(t)$ — n-мерный вектор состояния системы; c_1, c_2 — параметры регулятора; σ — закон регулирования; b — заданный вектор, характеризующий действие органа регулирования на объект; A, B, D — постоянные квадратные матрицы; $f(\sigma)$ — нелинейная функция, удовлетворяющая условию Липшица с постоянной L и $0 \leqslant f(\sigma)\sigma \leqslant K\sigma^2$, $f(0) = 0$.

Если отклонение аргумента τ мало, то при выполнении условия «устойчивости» $\| D \| < 1$ поведение системы регулирования с отклоняющимся аргументом (1) близко к поведению системы без отклонения [1—3]

$$\dot{x}(t) = (E-D)^{-1}(A+B)x(t) + (E-D)^{-1}bf(\sigma(t)),\ \sigma(t) = (c_1+c_2)^T x(t). \tag{2}$$

В частности, из абсолютной устойчивости системы (2) следует абсолютная устойчивость (1). Под абсолютной устойчивостью понимается асимптотическая устойчивость в целом решения $x(t) \equiv 0$ для произвольной функции $f(\sigma)$ [4], удовлетворяющей заданным условиям. Решение $x(t) \equiv 0$ системы (1) асимптотически устойчиво, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $x(t)$ будет выполняться $\| x(t) \|_1 < \varepsilon$ при $t > t_0$, лишь только $\| x(t) \|_1 < \delta(\varepsilon)$ при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \| x(t) \|_1 = 0$.

Здесь и в дальнейшем под нормами будем понимать следующее:

$$\| x(t) \| = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)\right\}^{1/2},\ \| A \| = \{\lambda_{\max}(A^TA)\}^{1/2},\ \| x(t) \|_1 =$$

$$= \max\{\| x(t) \|,\ \| \dot{x}(t) \|\},$$

где $\lambda_{\max}(\cdot)$ — наибольшее собственное число соответствующей матрицы, под производной в точках $t_0 + k\tau$, $k = 0, 1, \ldots$, понимается максимальная из предельных слева и справа.

Целью данной работы является оценка величины τ, при которой справедливо приведенное утверждение. Для ее получения используется второй метод Ляпунова с применением функции вида Лурье—Постникова

$$v(x) = x^T Hx + \beta \int_0^{\sigma(x)} f(\sigma)\,d\sigma,\ \sigma(x) = (c_1+c_2)^T x. \tag{3}$$

Предполагаем, что матрица $(E-D)^{-1}(A+B)$ асимптотически устойчива. Тогда для произвольной положительно определенной матрицы C уравнение

$$[(E-D)^{-1}(A+B)]^T H + H[(E-D)^{-1}(A+B)] = -C \tag{4}$$

имеет единственное решение—положительно определенную матрицу H. Обозначим поверхность уровня $v(x) = \alpha$ функции Ляпунова (3) через ∂v^α, а область, ограниченную этой поверхностью, через v^α, т. е. $\partial v^\alpha = \{x{:}v(x) = \alpha\}$, $v^\alpha = \{x{:}v(x) < \alpha\}$. Для функции Ляпунова вида (3) справедливы оценки

$$\tilde{\lambda}_{\min}(H)\cdot\|x\|^2 \leqslant v(x) \leqslant \tilde{\lambda}_{\max}(H)\cdot\|x\|^2,$$

где

$$\tilde{\lambda}_{\min}(H) = \begin{cases} \lambda_{\min}(H), & \beta \geqslant 0; \\ \lambda_{\min}\left(H + \frac{1}{2}\beta K c c^T\right), & \beta < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\lambda}_{\max}(H) = \begin{cases} \lambda_{\max}\left(H + \frac{1}{2}\beta K c c^T\right) & \beta \geqslant 0; \\ \lambda_{\max}(H), & \beta < 0, \end{cases}$$

$\lambda_{\min}(\cdot)$ — наименьшее собственное число матрицы.

Теорема. *Пусть выполнено условие устойчивости* $\|D\| < 1$ *и матрица* $(E-D)^{-1}(A+B)$ *асимптотически устойчива. Если матрица*

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C & -\left[H(E-D)^{-1}b + \frac{\beta}{2}(E-D)^{-1} \times (A+B))^T(c_1+c_2) + \frac{1}{2}(c_1+c_2)\right] \\ -\left[H(E-D)^{-1}b + \frac{\beta}{2}((E-D)^{-1} \times (A+B))^T(c_1+c_2) + \frac{1}{2}(c_1+c_2)\right]^T & -\beta(c_1+c_2)^T(E-D)^{-1}b + \frac{1}{K} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где H — *решение уравнения Ляпунова* (4), *положительно определена, то при* $\tau < \tau_0$, *где*

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{\min}(\tilde{C})}{R_k(MR_L+N)}\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}{\tilde{\lambda}_{\max}(H)}}, \tag{6}$$

система (1) *асимптотически устойчива в целом. Причем для произвольного решения* $x(t)$ *системы* (1) *будет выполняться* $\|x(t)\|_1 < \varepsilon$ *при* $t > t_0$, *лишь только* $\|x(t)\|_1 < \delta(\varepsilon)$, *при* $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$, $\tau < \tau_0$, *где*

$$\delta(\varepsilon,\tau) = \min\left\{\min\left[\frac{\lambda_{\min}(\tilde{C})(1-\xi)}{2\|D\|(1+\|D\|)[M(1+R_L)+N]},\right.\right.$$
$$\left.\frac{\exp\{-(\|A\|+K\|b\|\|c_1\|)\tau\}}{1+2\|D\|+(\|B\|+K\|b\|\|c_2\|)\tau}\right]\min\left[1, \frac{1-\zeta}{R_k}\right]\times$$
$$\left.\times\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}{\tilde{\lambda}_{\max}(H)}}, \frac{\zeta}{\|D\|}\right\}\varepsilon. \tag{7}$$

Здесь

$$\begin{gathered} M = 2\|H(E-D)^{-1}D\| + K\|c_1+c_2\|\,\|(c_1+c_2)^T(E-D)^{-1}D\|, \\ N = 2\|H(E-D)^{-1}B\| + 2\|H(E-D)^{-1}b\|L\|c_2\| + K\|(c_1+c_2)^T \times \\ \times(E-D)^{-1}B\| + KL\|c_1+c_2\|\,|(c_1+c_2)^T(E-D)^{-1}b|\,\|c_2\|, \\ R_L = [\|A\|+\|B\|+L\|b\|(\|c_1\|+\|c_2\|)]/(1-\|D\|), \\ R_k = [\|A\|+\|B\|+K\|b\|(\|c_1\|+\|c_2\|)]/(1-\|D\|), \end{gathered} \tag{8}$$

$\xi = \tau/\tau_0$, $0 < \zeta < 1$ — *произвольная фиксированная величина.*

Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть для решения* $x(t)$ *системы* (1) *выполняется* $\| x(t) \| < \delta$ *при* $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$. *Тогда при* $t_0 < t \leqslant t_0 + \tau$ *справедливо*

$$\| x(t) \| < [1 + 2 \| D \| + (\| B \| + K \| b \| \| c_2 \|) \tau] \delta e^{(\| A \| + K \| b \| \| c_1 \|) \tau}. \tag{9}$$

Доказательство. Представим систему (1) в виде

$$x(t) = x(t_0) + D[x(t-\tau) - x(t_0-\tau)] + \int_{t_0}^{t} [Ax(s) + Bx(s-\tau) + bf(c_1^T x(s) + c_2^T x(s-\tau))] \, ds.$$

Отсюда при $t_0 < t \leqslant t_0 + \tau$ справедливо $\| x(t) \| < [1 + 2 \| D \| + (\| B \| + K \| b \| \| c_2 \|) \tau] \delta + (\| A \| + K \| b \| \| c_1 \|) \int_{t_0}^{t} \| x(s) \| ds$. Используя неравенство Гронуолла — Беллмана, получаем, что при $t_0 < t \leqslant t_0 + \tau$ справедлива оценка (9).

Лемма 2. *Пусть для произвольного* $\alpha > 0$ *для решения* $x(t)$ *системы* (1) *существует момент времени* $t > t_0 + \tau$ *такой, что* $x(t) \in \partial v^\alpha$, $x(s) \in v^\alpha$ *при* $t_0 - \tau \leqslant s < t$ *и* $\| x(s) \| < \delta$ *при* $t_0 - \tau \leqslant s \leqslant t_0$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\| x(t) - x(t-\tau) \| < 2 \| D \| (1 + \| D \|) \delta + \frac{\| A \| + \| B \| + K \| b \| (\| c_1 \| + \| c_2 \|)}{1 - \| D \|} \sqrt{\frac{\alpha}{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}} \tau. \tag{10}$$

Доказательство. Запишем систему (1) в виде

$$x(t) = x(t-\tau) + D[x(t-\tau) - x(t-2\tau)] + \int_{t-\tau}^{t} [Ax(s) + Bx(s-\tau) + bf(c_1^T x(s) + c_2^T x(s-\tau))] \, ds.$$

Отсюда получаем

$$\| x(t) - x(t-\tau) \| \leqslant \| D \| \| x(t-\tau) - x(t-2\tau) \| + \| A \| \int_{t-\tau}^{t} \| x(s) \| ds + \| B \| \int_{t-\tau}^{t} \| x(s-\tau) \| ds + K \| b \| \int_{t-\tau}^{t} | c_1^T x(s) + c_2^T x(s-\tau) | \, ds.$$

Поскольку $x(s) \in v^\alpha$, $x(s-\tau) \in v^\alpha$, то, учитывая оценки функции Ляпунова, получаем $\| x(s) \| < \sqrt{\dfrac{\alpha}{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}}$, $\| x(s-\tau) \| < \sqrt{\dfrac{\alpha}{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}}$. Отсюда

$$\| x(t) - x(t-\tau) \| < \| D \| \| x(t-\tau) - x(t-2\tau) \| + [\| A \| + \| B \| + K \| b \| (\| c_1 \| + \| c_2 \|)] \sqrt{\frac{\alpha}{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}} \tau.$$

Аналогично, оценивая $\| x(t-\tau) - x(t-2\tau) \|$, находим

$$\| x(t) - x(t-\tau) \| < \| D \|^2 \| x(t-2\tau) - x(t-3\tau) \| + (1 + \| D \|) \times [\| A \| + \| B \| + K \| b \| (\| c_1 \| + \| c_2 \|)] \sqrt{\frac{\alpha}{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}} \tau.$$

Пусть $t = n\tau + \theta + t_0$, $0 \leqslant \theta < \tau$. Тогда, проводя процесс оценки дальше, имеем

$$\| x(t)-x(t-\tau)\| < \|D\|^n \| x(t-n\tau)-x(t-(n+1)\tau)\| + (1+\|D\|+\ldots$$
$$\ldots+\|D\|^{n-1})[\|A\|+\|B\|+K\|b\|(\|c_1\|+\|c_2\|)]\sqrt{\frac{\alpha}{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}}\,\tau \leqslant$$
$$\leqslant \|D\|^n\|x(t-n\tau)-x(t_0)\| + \|D\|^n\|x(t_0)-x(t-(n+1)\tau)\| +$$
$$+(1+\|D\|+\ldots+\|D\|^{n-1})[\|A\|+\|B\|+K\|b\|(\|c_1\|+\|c_2\|)]\times$$
$$\times\sqrt{\frac{\alpha}{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}}\,\tau < 2\|D\|^{n+1}\delta + 2\|D\|^n\delta +$$
$$+\frac{\|A\|+\|B\|+K\|b\|(\|c_1\|+\|c_2\|)}{1-\|D\|}\sqrt{\frac{\alpha}{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}}\,\tau.$$

Отсюда следует неравенство (10).

Лемма 3. *Пусть для произвольного $\alpha>0$ для решения $x(t)$ системы* (1) *существует момент времени $t>t_0+\tau$ такой, что $x(t)\in\partial v^\alpha$, $x(s)\in v^\alpha$ при $t_0-\tau\leqslant s<t$ и $\|x(s)\|_1<\delta$ при $t_0-\tau\leqslant s\leqslant t_0$. Тогда справедливо неравенство*

$$\|\dot{x}(t)-\dot{x}(t-\tau)\| < 2\|D\|(1+\|D\|)\delta +$$
$$+\frac{\|A\|+\|B\|+L\|b\|(\|c_1\|+\|c_2\|)}{1-\|D\|}\times$$
$$\times\left[2\|D\|(1+\|D\|)\delta+\frac{\|A\|+\|B\|+K\|b\|(\|c_1\|+\|c_2\|)}{1-\|D\|}\times\right.$$
$$\left.\times\sqrt{\frac{\alpha}{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}}\,\tau\right]. \tag{11}$$

Доказательство. Учитывая вид системы (1), имеем

$$\|\dot{x}(t)-\dot{x}(t-\tau)\| \leqslant \|D\|\|\dot{x}(t-\tau)-\dot{x}(t-2\tau)\| + \|A\|\|x(t)-$$
$$-x(t-\tau)\| + \|B\|\|x(t-\tau)-x(t-2\tau)\| + L\|b\|[\|c_1\|\|x(t)-$$
$$-x(t-\tau)\|+\|c_2\|\|x(t-\tau)-x(t-2\tau)\|].$$

Поскольку выполняются условия леммы 2, то с использованием (10) получаем

$$\|\dot{x}(t)-\dot{x}(t-\tau)\| < \|D\|\|\dot{x}(t-\tau)-\dot{x}(t-2\tau)\| + [\|A\|+\|B\|+$$
$$+L\|b\|(\|c_1\|+\|c_2\|)]\left[2\|D\|(1+\|D\|)\delta+\right.$$
$$\left.+\frac{\|A\|+\|B\|+K\|b\|(\|c_1\|+\|c_2\|)}{1-\|D\|}\sqrt{\frac{\alpha}{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}}\,\tau\right].$$

Проводя процесс оценок аналогично рассуждениям леммы 2, получаем оценку (11).

Доказательство теоремы. Перепишем систему (1) в виде

$$(E-D)\dot{x}(t) = D[\dot{x}(t-\tau)-\dot{x}(t)] + (A+B)x(t) + B[x(t-\tau)-x(t)] +$$
$$+bf(\sigma(t)) + b[f(\sigma[t])-f(\sigma(t))].$$

Отсюда получаем

$$\dot{x}(t) = (E - D)^{-1} D [\dot{x}(t-\tau) - \dot{x}(t)] + (E - D)^{-1} (A + B) x(t) + \\ + (E - D)^{-1} B [x(t-\tau) - x(t)] + (E - D)^{-1} b f(\sigma(t)) + (E - D)^{-1} b \times \\ \times [f(\sigma[t]) - f(\sigma(t))]. \qquad (12)$$

Рассмотрим полную производную функции $v(x)$ вида (3). В силу (12) имеем

$$\dot{v}(x(t)) = -\begin{pmatrix} x(t) \\ f(\sigma(t)) \end{pmatrix}^T \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \begin{matrix} -[(E-D)^{-1}(A+B)]^T H - \\ -H[(E-D)^{-1}(A+B)] \end{matrix} & \begin{matrix} -\Big[H(E-D)^{-1}b + \frac{\beta}{2}((E-D)^{-1} \times \\ \times (A+B))^T (c_1+c_2) + \frac{1}{2}(c_1+c_2)\Big] \end{matrix} \\ \begin{matrix} -\Big[H(E-D)^{-1}b + \frac{\beta}{2}((E-D)^{-1} \times \\ \times (A+B))^T (c_1+c_2) + \frac{1}{2}(c_1+c_2)\Big]^T \end{matrix} & -\beta(c_1+c_2)^T (E-D)^{-1} b + \frac{1}{K} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} x(t) \\ f(\sigma(t)) \end{pmatrix} + 2x^T(t) H (E-D)^{-1} D [\dot{x}(t-\tau) - \dot{x}(t)] + 2x^T(t) H (E-D)^{-1} B \times \\ \times [x(t-\tau) - x(t)] + 2x^T(t) H (E-D)^{-1} b [f(\sigma[t]) - f(\sigma(t))] + f(\sigma(t)) \times \\ \times (c_1+c_2)^T (E-D)^{-1} D [\dot{x}(t-\tau) - \dot{x}(t)] + f(\sigma(t))(c_1+c_2)^T (E-D)^{-1} B \times \\ \times [x(t-\tau) - x(t)] + f(\sigma(t))(c_1+c_2)^T (E-D)^{-1} b [f(\sigma[t]) - f(\sigma(t))] - \\ - f(\sigma(t)) [(c_1+c_2)^T x(t) - f(\sigma(t))/K].$$

С учетом обозначения (5) оценка $\dot{v}(x(t))$ принимает вид

$$\dot{v}(x(t)) \leqslant -\lambda_{\min}(\tilde{C}) \| x(t) \|^2 + [2 \| H(E-D)^{-1} D \| + K \| c_1 + c_2 \| \times \\ \times \| (c_1+c_2)^T (E-D)^{-1} D \|] \| \dot{x}(t) - \dot{x}(t-\tau) \| \| x(t) \| + [2 \| H(E-D)^{-1} B \| + \\ + 2 \| H(E-D)^{-1} b \| L \| c_2 \| + K \| (c_1+c_2)^T (E-D)^{-1} B \| + KL \| c_1 + c_2 \| \times \\ \times | (c_1+c_2)^T (E-D)^{-1} b | \|c_2\|] \| x(t) - x(t-\tau) \| \| x(t) \|.$$

Выберем δ из условия

$$[1 + 2\|D\| + (\|B\| + K \|b_1\| \|c_2\|)\tau] \, \delta e^{(\|A\| + K\|b\| \|c_1\|)\tau} \leqslant \sqrt{\frac{\alpha}{\tilde{\lambda}_{\max}(H)}}.$$

Тогда произвольное решение $x(t)$ системы (1), находящееся при $t_0 - \tau \leqslant \leqslant t \leqslant t_0$ в δ-окрестности начала координат, будет при $t_0 < t \leqslant t_0 + \tau$ находиться в v^α. Пусть при некотором $T > t_0 + \tau : x(T) \in \partial v^\alpha$. С учетом обозначения (8) и неравенств (10), (11) оценка полной производной $v(x)$ в силу (12) (или, что то же самое, в силу (1)) при $t = T$ примет вид

$$\dot{v}(x(T)) \leqslant \Bigg\{ -\frac{\lambda_{\min}(\tilde{C})}{\sqrt{\tilde{\lambda}_{\max}(H)}} \sqrt{\alpha} + 2\|D\|(1 + \|D\|)[M(1+R_1) + N]\delta + \\ + R_k(MR_L + N) \sqrt{\frac{\alpha}{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}} \tau \Bigg\} \| x(T) \|.$$

Пусть $\tau < \tau_0$, где τ_0 определено в (6). Тогда $\xi = \tau/\tau_0 < 1$, и, если брать

$$\delta \leqslant \frac{\lambda_{\min}(\tilde{C})(1-\xi)}{2\|D\|(1+\|D\|)[M(1+R_L)+N]} \sqrt{\frac{\alpha}{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}},$$

то полная производная $v(x)$ в силу (1) отрицательно определена, т. е. вектор скорости движения $x(T)$ направлен внутрь v^α, и $x(t) \in v^\alpha$ и при $t > T$.

Оценим величину $\dot{x}(t)$:

$$\|\dot{x}(t)\| \leqslant \|D\|\|\dot{x}(t-\tau)\| + \|A\|\|x(t)\| + \|B\|\|x(t-\tau)\| +$$

$$+ K\|b\|(\|c_1\|\|x(t)\| + \|c_2\|\|x(t-\tau)\|) < \|D\|\|\dot{x}(t-\tau)\| +$$

$$+ [\|A\| + \|B\| + K\|b\|(\|c_1\| + \|c_2\|)] \sqrt{\frac{\alpha}{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}}.$$

Продолжая итерационный процесс оценки производной дальше, получаем

$$\|\dot{x}(t)\| < \|D\|\delta + \frac{\|A\| + \|B\| + K\|b\|(\|c_1\| + \|c_2\|)}{1-\|D\|} \sqrt{\frac{\alpha}{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}}.$$

Если величины δ и $\sqrt{\alpha}$ выбрать таким образом, чтобы $\delta \leqslant \frac{\zeta}{\|D\|}\varepsilon$, $\sqrt{\alpha} \leqslant \frac{1-\zeta}{R_k}\sqrt{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}\,\varepsilon$, где $0 < \zeta < 1$ — произвольная фиксированная постоянная, то $\|\dot{x}(t)\| < \varepsilon$ при $x(t) \in v^\alpha$.

Окончательно для произвольного $\varepsilon > 0$ полагаем

$$\sqrt{\alpha} = \min\left\{1, \frac{1-\zeta}{R_k}\right\} \sqrt{\tilde{\lambda}_{\min}(H)}\,\varepsilon. \tag{13}$$

Тогда область v^α находится внутри ε-окрестности начала координат. Выберем $\delta(\varepsilon, \tau)$ согласно (7). Тогда решение $x(t) \in v^\alpha$, т. е. $\|x(t)\| < \varepsilon$. Кроме того, из (13) следует $\|\dot{x}(t)\| < \varepsilon$. Таким образом, $\|x(t)\|_1 < \varepsilon$ при $t > t_0$, что и требовалось доказать.

Асимптотическое стремление $\|x(t)\|_1 \to 0$ при $t \to \infty$ следует из отрицательной определенности производной функции Ляпунова в силу системы (1).

1. *Васильева А. Б.* Уравнения нейтрального типа с малым запаздыванием // Докл. АН СССР.— 1962.— **145**, № 3.— С. 495—497.
2. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Системы с последействием нейтрального типа // Автоматика и телемеханика.— 1984.— № 1.— С. 5—35.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1984.— 421 с.
4. *Воронов А. А.* Введение в динамику сложных управляемых систем.— М.:Наука, 1985.— 352 с.

Киев. ун-т
Получено 20.05.86