УДК 517.96

В. В. Городецкий

О суммировании формальных рядов Фурье методами типа Гаусса—Вейерштрасса

Многие задачи анализа и математической физики имеют естественную постановку в различных классах обобщенных функций (распределений, ультрараспределений, гиперфункций и др.). Оказывается, что если рассматривать периодические обобщенные функции, то, как показано в [1], все эти классы вкладываются в пространство формальных тригонометрических рядов. Настоящая статья посвящена суммированию кратных рядов Фурье (которые отождествляются с обобщенными периодическими функциями) методами типа Гаусса—Вейерштрасса.

Пусть E_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, — евклидово пространство размерности n, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — его элементы (векторы), $(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ — скалярное произведение, $|x| = \sqrt{(x, x)}$ — длина вектора x, $Q_n = \{x : x \in E_n, 0 \leqslant x_i \leqslant 2\pi, i = 1, \ldots, n\}$ — куб в пространстве E_n. Через T обозначим множество всех тригонометрических полиномов $P(x) = \sum_{|k| \leqslant \nu} c_k(P) e^{i(k,x)}$ над полем комплексных чисел (здесь $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \Lambda$, Λ — целочисленная решетка в E_n, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, $i = \sqrt{-1}$). Пространство всех линейных непрерывных функционалов над T обозначается через T', а его элементы называются 2π-периодическими обобщенными функциями. В T' определены операции дифференцирования и свертки $\langle f*g, P\rangle = \langle f, \langle g_\xi, P(\xi + x)\rangle\rangle$, $f, g \in T'$, $\forall P \in T$ (индекс ξ в g_ξ обозначает действие функционала g на $P(\xi + x)$ по переменной ξ), непрерывные в T' относительно слабой сходимости [1, с. 110]. Рядом Фурье обобщенной 2π-периодической функции $f \in T'$ называется ряд $\sum_{k \in \Lambda} c_k(f) e^{i(k,x)}$, где $c_k(f) = \langle f, e^{-i(k,x)}\rangle$ — коэффициенты Фурье. Для произвольной обобщенной функции $f \in T'$ ее ряд Фурье сходится к f в пространстве T' [1, с. 111]. Пространство T плотно в T'.

Пространство бесконечно дифференцируемых 2π-периодических функций класса Жевре $G_{\{\beta,\ldots,\beta\}}(Q_n)$, $\beta > 0$, типа Румье определяется как совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, характеризующихся свойством: существуют положительные постоянные $c, B_1, \ldots, B_n$ (зависящие от $\varphi(x)$) такие, что

$$|D_x^m \varphi(x)| \leqslant cB_1^{m_1} \ldots B_n^{m_n} m_1^{m_1\beta} \ldots m_n^{m_n\beta}, \; 0 \leqslant \|m\| \leqslant \infty$$

(здесь $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $\|m\| = m_1 + \ldots + m_n$, $D_x^m = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{m_i}$, $m_i = 0, 1, 2, \ldots$).

Пространство всех линейных непрерывных функционалов над пространством $G_{\{\beta,\ldots,\beta\}}(Q_n)$ обозначается символом $G'_{\{\beta,\ldots,\beta\}}(Q_n)$. Его элементы при $\beta > 1$ называются ультрараспределениями класса Жевре порядка β типа Румье. Пространство $G_{\{1,\ldots,1\}}(Q_n)$ представляет собой пространство всех аналитических на Q_n функций, а элементы соответствующего ему двойственного пространства $G'_{\{1,\ldots,1\}}(Q_n)$ называются 2π-периодическими функционалами или гиперфункциями.

Будем говорить, что носитель гиперфункции $f \in G'_{\{1,\ldots,1\}}(Q_n)$ ($\operatorname{supp} f$) содержится в K (K — компактное множество в Q_n), если f допускает продолжение до линейного непрерывного функционала $\hat{f}$ над $G_{\{1,\ldots,1\}}(K)$. Для неквазианалитического класса функций $G_{\{\beta,\ldots,\beta\}}(Q_n)$, $\beta > 1$, условие $\operatorname{supp} f \subset K$ означает, что $\langle f, \varphi\rangle = 0$ для произвольной функции $\varphi \in G_{\{\beta,\ldots,\beta\}}(Q_n)$, $\beta > 1$, обращающейся в нуль на K (при $\beta > 1$ в пространстве $G_{\{\beta,\ldots,\beta\}}(Q_n)$ имеются финитные функции). Оба определения для $f \in G'_{\{\beta,\ldots,\beta\}}(Q_n)$, $\beta > 1$ совпадают.

Для ряда Фурье 2π-периодической обобщенной функции $f \in T'$ введем преобразование

$$f_\alpha(t, x) = \sum_{k \in \Lambda} c_k(f) \exp(i(k, x) - t|k|^\alpha), \quad t, \alpha > 0, \tag{1}$$

которое будем называть преобразованием типа Гаусса—Вейерштрасса ряда Фурье функции $f \in T'$. Если $\alpha = 1, 2$, то $f_1(-\ln r, x)$, $0 < r < 1$, $f_2(t, x)$ — соответственно преобразования Абеля—Пуассона и Гаусса—Вейерштрасса ряда Фурье функции $f \in T'$. Можно показать, что ряд (1) сходится равномерно по x при каждом $t > 0$ тогда и только тогда, когда $f \in G'_{\{1/\alpha,\ldots,1/\alpha\}}(Q_n)$.

Обозначим через $\Gamma_t^\alpha(x)$ ядро указанного метода суммирования, т. е. $\Gamma_t^\alpha(x) = \sum_{k \in \Lambda} \exp(i(k, x) - t|k|^\alpha)$. Нетрудно видеть, что при каждом $t > 0$ $\Gamma_t^\alpha(x)$, как функция x, принадлежит пространству $G_{\{1/\alpha,\ldots,1/\alpha\}}(Q_n)$. Кроме того, $\Gamma_t^\alpha * \varphi \xrightarrow[t\to 0]{} \varphi$ для произвольной функции $\varphi \in G_{\{1/\alpha,\ldots,1/\alpha\}}(Q_n)$. Таким образом, $\Gamma_t^\alpha \xrightarrow[t\to 0]{} \delta$ (δ — дельта-функция Дирака) в топологии пространства $G'_{\{1/\alpha,\ldots,1/\alpha\}}(Q_n)$. Поскольку для произвольной обобщенной функции $f \in G'_{\{1/\alpha,\ldots,1/\alpha\}}(Q_n)$ $c_k(f*\Gamma_t^\alpha) = c_k(f)\,c_k(\Gamma_t^\alpha) = c_k(f)\exp(-t|k|^\alpha) = c_k(f_\alpha(t, x))$, то $f_\alpha(t, x) = f*\Gamma_t^\alpha$, т. е. при каждом $t > 0$ $f_\alpha(t, x)$, как функция x, принадлежит пространству $G_{\{1/\alpha,\ldots,1/\alpha\}}(Q_n)$. Отсюда следует также, что преобразование типа Гаусса — Вейерштрасса ряда Фурье функции $f \in G'_{\{1/\alpha,\ldots,1/\alpha\}}(Q_n)$ сходится к f в топологии пространства $G'_{\{1/\alpha,\ldots,1/\alpha\}}(Q_n)$, ибо $f_\alpha(t, x) = f*\Gamma_t^\alpha \xrightarrow[t\to 0]{} f*\delta = f$.

Для рядов Фурье суммируемых на $[0, 2\pi]$ функций хорошо известен принцип локализации Римана: если $f_1, f_2 \in L(0, 2\pi)$ совпадают на интервале $(a, b) \subset [0, 2\pi]$, то во всяком отрезке $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, разность их рядов Фурье равномерно сходится к нулю. Для распределений этот принцип не выполняется. Например, δ-функция Дирака совпадает с нулем на любом промежутке, не содержащем точку 0, но ее ряд Фурье $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx}$ не сходится равномерно к нулю на любом таком промежутке. Если перейти к функциям многих переменных, то принцип локализации уже не имеет места и для суммируемых функций. Для его выполнения надо налагать дополнительное условие гладкости [2]. Однако во многих задачах математической физики, где пользуются представлением функции в виде ряда Фурье, более естественным является выполнение этого принципа не для самих рядов Фурье, а для рядов Фурье, просуммированных некоторым методом. Следует отметить, что принцип локализации для средних типа Гаусса—Вейерштрасса кратных интегралов Фурье суммируемых функций доказан в работе [3]. Из оценок ядер этих средних вытекает принцип локализации для средних и в случае периодических суммируемых функций. Как показано в данной работе, для рядов Фурье, просуммированных методами типа Гаусса—Вейерштрасса, принцип локализации имеет место даже в пространстве гиперфункций. В случае одной переменной принцип локализации для метода суммирования типа Гаусса—Вейерштрасса в классе гиперфункций установлен в работе [4].

Теорема (принцип локализации). *Если 2π-периодическая гиперфункция f равна нулю в области $Q \subset Q_n$ (т. е. $\operatorname{supp} f \subset Q_n \setminus Q$), то $f_\alpha(t, x) \underset{t\to 0}{\rightarrow} 0$, $\alpha \geqslant 1$, равномерно на произвольном компакте $K \subset Q$.*

Доказательство. Предположим сначала, что параметр $\alpha > 1$ и $\alpha \neq 2r$, $r = 1, 2, \ldots$. Пусть $K = K_1 \times \ldots \times K_n$, $Q = Q_1 \times \ldots \times Q_n$, где $K_i \subset Q_i \subset [0, 2\pi]$, $i = 1, \ldots n$. В силу линейности функционала f имеет место следующее представление: $f_\alpha(t, x) = t < f_\xi, t^{-1}\Gamma_t^\alpha(x-\xi) >$, $t > 0$. Согласно определению носителя гиперфункции f для доказательства теоремы достаточно показать, что семейство функций $\Psi_{t,x}^\alpha(\xi) = t^{-1}\Gamma_t^\alpha(x-\xi)$ ограничено в пространстве $G_{\{1,\ldots,1\}}(Q_n \setminus Q)$ равномерно по t для достаточно малых значений t и $x \in K$, т. е. $|D_\xi^m \Psi_{t,x}^\alpha(\xi)| \leqslant cB_1^{m_1}\ldots B_n^{m_n} m_1^{m_1}\ldots m_n^{m_n}$, $0 \leqslant \|m\| < \infty$, где постоянные $c, B_1, \ldots, B_n$ не зависят от t, x, ξ, изменяющихся указанным образом. Пусть $\hat{\varphi}_\alpha(t, x)$ обозначает обратное преобразование Фурье функции $\varphi_\alpha(t, x) = \exp(-t|k|^\alpha)$. Тогда на основании формулы суммирования Пуассона кратных рядов Фурье [5, с 281] заключаем, что

$$\Gamma_t^\alpha(x-\xi) = \sum_{k\in\Lambda} \hat{\varphi}_\alpha(t, x-\xi+2\pi k). \tag{2}$$

Этот ряд при $t > 0$, $x \in K$ представляет собой аналитическую функцию по каждой переменной $\xi_i \in [0, 2\pi] \setminus Q_i$, $i = 1, \ldots, n$, ибо, как отмечалось, при каждом $t > 0$ $\Gamma_t^\alpha(x)$, как функция x, принадлежит пространству $G_{\{1/\alpha,\ldots,1/\alpha\}}(Q_n)$. Поскольку $1/\alpha < 1$, то элементами такого пространства являются функции, аналитические на Q_n. Поэтому возьмем область $G = \{z \in \mathbb{C}^n : z_i \in G_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, содержащую $Q \setminus Q$, где G_i — ограниченная область в $\mathbb{C}^1$, содержащая $[0, 2\pi] \setminus Q_i$, с гладкой границей ∂G_i, не пересекающей K_i, $i = 1, \ldots, n$. Тогда в силу интегральной формулы Коши

$$D_\xi^m \Gamma_t^\alpha (x - \xi) = \frac{m!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial G_1} \ldots \int\limits_{\partial G_n} \frac{\Gamma_t^\alpha (x - z)}{(z - \xi)^{m+I}} dz,\ \xi \in Q_n \setminus Q.$$

Здесь $m! = m_1! \ldots m_n!$, $I = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n})$, $dz = dz_1 \ldots dz_n$. Отсюда получаем

$$| D_\xi^m \Gamma_t^\alpha (x - \xi) | \leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{i=1}^{n} \frac{m_i! l_i}{A_i^{m_i+1}} \max_{z \in \partial G} | \Gamma_t^\alpha (x - z) |,$$

где l_i — длина контура ∂G_i, $A_i = \inf | z_i - \xi_i |$ $(z_i \in \partial G_i,\ \xi_i \in [0, 2\pi] \setminus Q_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Для того чтобы провести оценку $\max\limits_{z \in \partial G} | \Gamma_t^\alpha (x - z) |$, воспользуемся формулой (2). Из результатов, полученных в работе [6], вытекает

$$| \hat{\varphi}_\alpha (t, x) | \leqslant ct\, | x |^{-n-\alpha}, \quad 0 < t \leqslant t_0, \quad | x | \geqslant a > 0, \tag{3}$$

где постоянная c зависит лишь от t_0, a, α, n. Поскольку для $x \in K$, $\xi \in Q_n \setminus Q$ имеем $| x - \xi | \geqslant a_0 > 0$, где a_0 — расстояние между границами компактов K и $Q_n \setminus Q$, то согласно оценке (3) $t^{-1} | \Gamma_t^\alpha (x - \xi) | \leqslant c \sum\limits_{k \in \Lambda} | x - \xi + 2\pi k |^{-n-\alpha} \leqslant c \sum\limits_{k \in \Lambda} (a_0^2 + b_0 | k |^2)^{-n/2-\alpha/2} = M$ (здесь $b_0 > 0$, постоянная M не зависит от t, x, ξ). Принимая теперь во внимание непрерывность $\Gamma_t^\alpha (x - z)$ по совокупности переменных $t > 0$, $x \in K$ и $z \in \bar{G}$, подберем область интегрирования так, чтобы $t^{-1} | \Gamma_t^\alpha (x - z) | \leqslant M + 1$ при указанном изменении переменных. Таким образом, $t^{-1} | D_\xi^m \Gamma_t^\alpha (x - \xi) | \leqslant c B_1^{m_1} \ldots B_n^{m_n} m_1^{m_1} \ldots m_n^{m_n}$, где постоянные $c, B_1, \ldots, B_n$ не зависят от t, x, ξ, изменяющихся указанным образом. Если $\alpha = 2r$, $r = 1, 2, \ldots$, то сформулированное утверждение вытекает из результатов, полученных в работе [7].

Если $\alpha = 1$, то $\hat{\varphi}_1 (t, x) = \pi^{-(n+1)/2} \Gamma \left(\frac{n+1}{2} \right) t (| x |^2 + t^2)^{-(n+1)/2}$. Доказательство теоремы в этом случае проводится аналогичным образом. Теорема доказана.

Следствие. *Если 2π-периодическое ультрараспределение $f \in G'_{\{\beta, \ldots, \beta\}} (Q_n)$, $\beta > 1$, совпадает в области $Q \subset Q_n$ с непрерывной функцией $g (x)$, то $f_\alpha (t, x) \xrightarrow[t \to 0]{} g (x)$, $\alpha \geqslant 1$, равномерно на произвольном компакте $K \subset Q$.*

В качестве применения полученных результатов рассмотрим уравнение

$$\partial u / \partial t = (-1)^{k-1} \Delta^k u, \quad \Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \ldots + \partial^2 / \partial x_n^2,\ k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Если для (4) задано начальное условие

$$u (0, x) = f, \tag{5}$$

где $f \in G'_{\{1/2k, \ldots, 1/2k\}} (Q_n)$, то под решением периодической задачи Коши (4), (5) будем понимать функцию $u (t, x)$, $(t, x) \in (0, T] \times E_n$, дифференцируемую по t, бесконечно дифференцируемую по x, удовлетворяющую (4) и равенству (5) в том смысле, что $u (t, x) \to f$ при $t \to 0$ в топологии пространства $G'_{\{1/2k, \ldots, 1/2k\}} (Q_n)$. Из свойств функции $\Gamma_t^{2k} (x)$ вытекает, что $f * \Gamma_t^{2k}$ является решением задачи (4), (5) в указанном смысле, т. е. $u (t, x) = f * \Gamma_t^{2k}$. Принцип локализации для решения задачи Коши (4), (5) формулируется следующим образом: если 2π-периодическое ультрараспределение $f \in G'_{\{\beta, \ldots, \beta\}} (Q_n)$, $\beta > 1$, совпадает в области $Q \subset Q_n$ с непрерывной функцией $g (x)$, то $u (t, x) \xrightarrow[t \to 0]{} g (x)$ равномерно на произвольном компакте $K \subset Q$.

1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 284 с.
2. *Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. И.* Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений // Успехи мат. наук.—1976.— **31**, № 6.— С. 28—83.
3. *Голубов Б. И.* О методе суммирования типа Абеля — Пуассона кратных интегралов Фурье // Мат. сб.— 1979.— **108**, № 2.— С. 229—246.
4. *Извеков И. Г.* Принцип локализации Римана для рядов Фурье в пространствах обобщенных функций // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1986.— № 2.— С. 5—8.
5. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М. : Мир, 1974.— 335 с.
6. *Голубов Б. И.* О скорости сходимости интегралов типа Гаусса—Вейерштрасса для функций многих переменных // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1980.— **44**, № 6.— С. 1255—1278.
7. *Городецкий В. В.* Принцип локализации для решений задачи Коши параболических по Петровскому систем в классах обобщенных функций // Докл. АН УССР. Сер. А.—1984.— № 10.— С. 5—7.

Черновиц. ун-т

Получено 04.10.86