УДК 517.5

Н. Л. Пачулиа

О сильной суммируемости рядов Фурье (ψ, β)-дифференцируемых функций

Пусть $f(\cdot)$ — суммируемая 2π-периодическая функция ($f \in L$), $S[f] = a_0(f)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$ — ее ряд Фурье, $S_k(f, x)$ — частные суммы ряда порядка n, $\rho_k(f; x) = f(x) - S_k(f, x)$, $\lambda = (\lambda_k)_{k \in N}$ и $\delta = (\delta_k)_{k \in N}$ — неотрицательные последовательности чисел (числа λ_k, возможно, зависят еще и от некоторого параметра m), функция φ определена и неотрицательна на $[0, \infty)$.

Рассмотрим оператор

$$H_n^p(f; x, \lambda, \delta) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \varphi(\delta_k |\rho_k(f; x)|). \quad (1)$$

Впервые операторы вида (1) при $\varphi(u) = u^p$, $p > 0$, изучали Харди и Литтлвуд [1, 2]. В этих работах заложены основы современной теории сильного суммирования рядов Фурье. Позднее такие объекты рассматривали другие авторы [3—5].

В настоящей работе получены оценки величин (1) в равномерной метрике для рядов Фурье функции $f \in C_\beta^\psi C$. Эти классы функций введены А. И. Степанцом [6] следующим образом. Пусть $(\psi(k))_{k \in N}$ — фиксированная последовательность чисел, β — фиксированное число и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} (a_k(f) \cos(kx + \theta) + b_k(f) \sin(kx + \theta)), \quad \theta = \beta\pi/2,$$

является рядом Фурье некоторой функции $f_\beta^\psi \in L$. Эту функцию называют (ψ, β)-производной f. Множество функции $f \in C$, для которых $f_\beta^\psi \in C$ обозначают $C_\beta^\psi C$.

Будем считать числа $\psi(k)$ следами на множестве N функции $\psi(v)$ непрерывного аргумента $v \geqslant 1$, которые предполагаются выпуклыми вниз при всех $v \in [1, \infty)$ и $\lim_{v \to \infty} \psi(v) = 0$. Множество таких функции $\psi(v)$ обозначают $\mathfrak{M}$.

Поставим в соответствие $\forall\, \psi \in \mathfrak{M}$ функции $\eta(t) = \eta(\psi, t) = \psi^{-1}(1/2\, \psi(t))$, $\mu(t) = \mu(\psi, t) = t/(\eta(t) - t)$ ($\psi^{-1}(\cdot)$ — обратная функции $\psi(\cdot)$) и с их помощью из $\mathfrak{M}$ выделим следующие подмножества [6, с. 94]:

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(t) \leqslant K_1\}, \quad \mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} : \mu(t) \uparrow \infty\},$$
$$\mathfrak{M}_C = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < K_2 \leqslant \mu(t) \leqslant K_3\}.$$

Пусть Φ — множество неубывающих и непрерывных на промежутке $(0, \infty)$ функций φ таких, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$ при $u > 0$,

$$\varphi(u) \leqslant e^{bu}, \ \forall\, u \in [0, \infty), \tag{2}$$

причем существует положительное число $a = a_\varphi$, для которого

$$\varphi(2u) \leqslant a\varphi(u), \ \forall\, u \in [0, 1]. \tag{3}$$

К множеству Φ принадлежат, например, функции $\varphi(u) = u^p$, $p > 0$, $\varphi(u) = e^u - 1$ и др.

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \mathfrak{M}$, *последовательность* $(\lambda_k)_{k \in N}$ *такая, что числа* $\lambda_k \psi(k)$ *не возрастают. Тогда, если* $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty} = \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty$, *то* $\forall\, f \in C^\psi_\beta C$ *и для любого числа* β

$$\| H^\varphi_n(f;\, x, \lambda, \delta)\|_C \leqslant B \Big\{\lambda_n(\eta(n) - n)\, \varphi(\delta_n \psi(n) E_n(f^\psi_\beta)) + $$
$$+ \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \varphi(\delta_k \psi(k)\, E_k(f^\psi_\beta))\Big\}, \tag{4}$$

где B — фиксированное число; $E_n(f^\psi_\beta)$ — наилучшее приближение функции f^ψ_β тригонометрическими полиномами порядка не выше $n - 1$. Если же $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то $\forall\, f \in C^\psi_0 C$

$$\| H^\varphi_n(f;\, x, \lambda, \delta)\|_C \leqslant B \Big\{n\lambda_n \varphi(\delta_n \psi(n) E_n(f^\psi_0)) + $$
$$+ \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \varphi(\delta_k \psi(k)\, E_k(f^\psi_0))\Big\}. \tag{5}$$

В случае, когда $\varphi(u) = u^p$, $p > 0$, эта теорема получена в [5]. При доказательстве ее для произвольных функций $\varphi \in \Phi$ следуем схеме [5] и существенным образом пользуемся результатами работы [7].

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных фактов. Доказательство анонсировано в [8].

Лемма 1. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$, *неотрицательная последовательность* $(\delta_k)_{k \in N}$ *такая, что числа* $\delta_k \psi(k)$ *не возрастают. Тогда, если* $\eta(n) = \eta(\psi, n)$, $n \in N$, $k_j \in N$, $j = \overline{1, r}$, *причем* $n \leqslant k_1 < \ldots < k_r \leqslant \eta(n)$, *то* $\forall\, f \in C^\psi_\beta C$, $\forall\, \beta \in R$ *и* $\forall\, p > 0$

$$D^{(p)}_{n,r}(f;\, x, \delta) = \left\{\frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} [\delta_{k_j} |\rho_{k_j}(f;\, x)|]^p\right\}^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant A(p)\, \psi(n)\, \delta_n E_n(f^\psi_\beta) \left(1 + \ln^+ \frac{\eta(n) - n}{r}\right), \tag{6}$$

где $\ln^+ t = \max\{0, \ln t\}$; $R = (-\infty, \infty)$. *Если же* $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $n \in N$, $k_j \in N$, $j = \overline{1, r}$, *причем* $n \leqslant k_1 < \ldots < k_r \leqslant 2n$, *то* $\forall\, f \in C^\psi_0 C$ *и* $\forall\, p > 0$

$$D^{(p)}_{n,r}(f;\, x, \delta) \leqslant A(p)\, \delta_n \psi(n)\, E_n(f^\psi_0) \ln \frac{ne}{r}. \tag{6'}$$

Здесь и в дальнейшем через $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, ... будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от параметров, указанных в скобках, возможно, неодинаковые в различных местах текста.

Доказательство. Величина $D_{n,r}^{(p)}(f, x, \delta)$ не убывает относительно параметра p, в чем можно убедиться, применяя неравенство Гельдера, поэтому достаточно доказать справедливость неравенств (6), (6′) для $p \geqslant 2$.

Сначала докажем справедливость неравенства (6). Ввиду того что последовательность $\delta_k\psi(k)$ не убывает и $\psi(\eta(n)) = 2\psi(n)$, то $\forall\, k_j \in [n, \eta(n)]$

$$\delta_{k_j} = \frac{\delta_{k_j}\psi(k_j)}{\psi(k_j)} \leqslant \frac{\delta_n\psi(n)}{\psi(\eta(n))} \leqslant 2\delta_n. \tag{7}$$

Отсюда следует, что $D_{n,r}^{(p)}(f;\, x,\, \delta) \leqslant 2\delta_n D_{n,r}^{(p)}(f;\, x,\, 1)$.

В [9, с. 6] доказано, что если $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$, то

$$\|\rho_n(f, x)\|_C \leqslant \left\{\frac{4}{\pi^2}\ln^{+}\pi(\eta(n)-n) + O(1)\right\}\psi(n)E_n(f_\beta^\psi), \tag{8}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по $f \in C_\beta^\psi C$, по n и β.

Если $\eta(n) < n+1$, то отрезок $[n, \eta(n)]$ содержит единственное натуральное число n. Следовательно, $D_{n,r}^{(p)}(f;\, x,\, 1) = |\rho_n(f;\, x)|$. Тогда неравенство (6) вытекает из соотношений (7) и (8).

Пусть теперь $\eta(n) \geqslant n+1$. В условиях леммы в [5, с. 104] приведено равенство

$$\rho_k(f, x) = -\frac{\psi(k)}{\pi}\int\limits_{x_k\leqslant|t|\leqslant\pi}\Delta_n(f_\beta^\psi;\, x+t)\frac{\sin(kt+\theta)}{t}\,dt + d_k^\psi(f;\, x), \tag{9}$$

где $x_k = 1/(\eta(k)-k)$; $\Delta_n(f_\beta^\psi, u) = f_\beta^\psi(u) - T_{n-1}(u)$, $n<k$, $T_{n-1}(\cdot)$ — тригонометрический полином наилучшего приближения порядка не выше $n-1$ функции f_β^ψ и

$$|d_k^\psi(f;\, x)| \leqslant B\psi(n)E_n(f_\beta^\psi). \tag{10}$$

Введем обозначение

$$\gamma_{k,n}(f_\beta^\psi;\, x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{x_k\leqslant|t|\leqslant r^{-1}}\Delta_n(f_\beta^\psi;\, x+t)\frac{\sin(kt+\theta)}{t}\,dt, & x_k \neq 1/r, \\ 0, \quad x_k = 1/r. \end{cases}$$

Тогда на основании равенства (9) будем иметь

$$\rho_{k_j}(f;\, x) = -\psi(k_j)\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{r^{-1}\leqslant|t|\leqslant\pi}\Delta_n(f_\beta^\psi;\, x+t)\frac{\sin(k_jt+\theta)}{t}\,dt + \gamma_{k_j,n}(f_\beta^\psi;\, x)\right\} + d_{k_j}^\psi(f;\, x). \tag{11}$$

Подставляя это представление величины $\rho_{k_j}(f;\, x)$ в формулу $D_{n,r}^{(p)}(f;\, x,\, 1)$ и применяя неравенство Минковского, с учетом соотношения (10) получаем

$$D_{n,r}^{(p)}(f;\, x,\, 1) \leqslant$$

$$\leqslant \psi(n)\left\{\left[\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{1/r\leqslant|t|\leqslant\pi}\Delta_n(f_\beta^\psi;\, x+t)\frac{\sin(k_jt+\theta)}{t}\,dt\right|^p\right]^{1/p} + \left[\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\gamma_{k_j,n}(f;\, x)|^p\right]^{1/p}\right\} + B\psi(n)E_n(f_\beta^\psi) \overset{\text{df}}{=}$$

$$\overset{\text{df}}{=} \psi(n)\,[U_n^{(1)}(f;\, x) + U_n^{(2)}(\ ;\, x)] + B\psi(n)E_n(f_\beta^\psi).$$

В силу того что $|\Delta_n(f_\beta^\psi; x)| \leqslant E_n(f_\beta^\psi)$, при $x_{k_j} < 1/r$ будем иметь

$$|\gamma_{k_j,n}(f_\beta^\psi; x)| \leqslant BE_n(f_\beta^\psi) \ln \frac{\eta(k_j)-k_j}{r},$$

а при $x_{k_j} > 1/r$

$$|\gamma_{k_j,n}(f_\beta^\psi; x)| < B_1 E_n(f_\beta^\psi) \ln \frac{r}{\eta(k_j)-k_j}.$$

Таким образом, $\forall\, k_j \in [n, \eta(n)]$

$$|\gamma_{k_j,n}(f_\beta^\psi; x)| \leqslant B_1 E_n(f_\beta^\psi) \left| \ln \frac{\eta(k_j)-k_j}{r} \right|.$$

В работе [4, с. 7] доказано, что для $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$

$$0 < l_1 \leqslant \frac{\eta(k)-k}{\eta(n)-n} \leqslant l_2, \quad \forall\, k \in [n, \eta(n)].$$

Пользуясь этой оценкой, получаем

$$U_n^{(2)}(f; x) \leqslant B_1 E_n(f_\beta^\psi) \max_{j=\overline{1,r}} \left| \ln \frac{\eta(k_j)-k_j}{\eta(n)-n} \, \frac{\eta(n)-n}{r} \right| \leqslant$$
$$\leqslant B_2 E_n(f_\beta^\psi) \left(1 + \ln^+ \frac{\eta(n)-n}{r}\right).$$

Пусть

$$F_x(t) = \begin{cases} \Delta_n(f_\beta^\psi; x+t)\, t^{-1}, & r^{-1} \leqslant |t| \leqslant \pi, \\ 0, \ |t| \leqslant r^{-1}, & F_x(t+2\pi) = F_x(t). \end{cases}$$

Заметим, что интегралы в выражении $U_n^{(1)}(f; x)$ представляются в виде линейной комбинации синус и косинус коэффициентов Фурье функции F_x. Пользуясь сначала неравенством Минковского, а затем неравенством Хаусдорфа — Юнга [[10], с. 211], с учетом соотношения (10) записываем

$$U_n^{(1)}(f; x) \leqslant 2r^{-1/p} \|F_x\|_{L_{p_1}} = 2r^{-1/p} \left\{ \int\limits_{r^{-1} \leqslant |t| \leqslant \pi} \left| \frac{\Delta_n(f_\beta^\psi; x+t)}{t} \right|^{p_1} dt \right\}^{1/p_1} \leqslant$$
$$\leqslant 4E_n(f_\beta^\psi)\, r^{-1/p} \left\{ \int\limits_{1/r}^{\pi} t^{-p_1}\, dt \right\}^{1/p_1} \leqslant 4pE_n(f_\beta^\psi), \quad p_1 = p/p-1.$$

Итак,

$$D_{n,k}^{(p)}(f; x, \delta) \leqslant B_1(p)\, \psi(n)\, \delta_n E_n(f_\beta^\psi) \begin{cases} 1 + \ln \dfrac{\eta(n)-n}{r}, & \eta(n) \geqslant n+1, \\ 1, & \eta(n) < n+1. \end{cases}$$

Этим доказательство соотношения (6) закончено.

Докажем соотношение (6′). По определению класса функции $\mathfrak{M}_0$, $\forall\, \psi \in \mathfrak{M}_0$ существует число $\alpha > 1$ такое, что

$$\eta(t) = \eta(\psi, t) > \alpha t, \quad \forall\, t \geqslant 1. \tag{12}$$

Подбирая число $\nu \in N$ так, чтобы $\alpha^\nu > 2$, и используя неравенство (12), последовательно ν-раз получаем $\eta(\ldots(\eta(n))\ldots) > \alpha^\nu n > 2n$.

Используя свойства функции $\eta(t)$ в силу убывания $-\psi$, находим $\psi(n) = 2\psi(\eta(n)) = \ldots = 2^{\nu}\psi(\eta(\ldots(\eta(n))\ldots)) \leqslant 2^{\nu}\psi(2n)$.

Таким образом, учитывая то, что числа $\lambda_k\psi(k)$ не возрастают, имеем

$$\lambda_{k_j} = \frac{\lambda_{k_j}\psi(n)}{\psi(n)} \leqslant \frac{2^{\nu}\lambda_{k_j}\psi(2n)}{\psi(n)} \leqslant 2^{\nu}\lambda_n, \quad \forall\, k_j \in [n, 2n],$$

откуда следует, что

$$D_{n,r}^{(p)}(f;\ x,\ \delta) \leqslant 2^{\nu} D_{n,r}^{(p)}(f;\ x,\ 1). \tag{13}$$

В работе [11] (см. также [12, с. 48]) доказано, что $\forall\, f \in C$, $\forall\, p > 0$ и $0 < k_1 < \ldots < k_r \leqslant m$

$$\left\{\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} |\rho_{k_j}(f;\ x)|^p\right\}^{1/p} \leqslant A(p)\, E_{k_1}(f) \ln \frac{2m}{r}. \tag{14}$$

Полагая $m = 2n$ и считая, что $n \leqslant k_1 < \ldots < k_r \leqslant 2n$, из неравенства (14) находим

$$D_{n,r}^{(p)}(f;\ x,\ 1) \leqslant A(p)\, E_n(f_0^{\psi}) \ln \frac{ne}{r}.$$

Отсюда с учетом (13) получаем (6′). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \mathfrak{M}$ и неотрицательная последовательность чисел $(\delta_k)_{k\in N}$ такая, что числа $\delta_k\psi(k)$ убывают. Тогда, если $\psi \in \mathfrak{M}_{G,\infty}$, то $\forall\, f \in C_{\beta}^{\psi} C$, $\forall\, \beta \in R$*

$$D_n^{\varphi}(f;\ x,\ \delta) = \frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]} \varphi(\delta_k\, |\rho_k(f;\ x)|) \leqslant B\varphi(\delta_n\psi(n)\, E_n(f_{\beta}^{\psi})) \tag{15}$$

($[\alpha]$ — целая часть числа α и $\gamma_n = \eta(n) - n + 1$). Если же $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то $\forall\, f \in C_0^{\psi} C$

$$D_n^{\varphi}(f;\ x,\ \delta) = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n} \varphi(\delta_k\, |\rho_k(f;\ x)|) \leqslant B\varphi(\delta_n\psi(n)\, E_n(f_0^{\psi})). \tag{16}$$

Доказательство. Сначала докажем справедливость неравенства (15). Если $E_n(f_{\beta}^{\psi}) = 0$, то f представляет собой тригонометрический полином порядка не выше $n-1$ и тогда неравенство (15) очевидно. Пусть $\alpha_n^{\beta} = \delta_n\psi(n)\, E_n(f_{\beta}^{\psi}) > 0$. Если $\eta(n) < n + 1$, то $D_n^{\varphi}(f;\ x,\ \delta) = \varphi(\delta_n\, |\rho_n(f;\ x)|)$. Записав неравенство (8) в виде $\|\rho_n(f;\ x)\|_C \leqslant A_1\psi(n)\, E_n(f_{\beta}^{\psi})$, будем иметь $D_n^{\psi}(f;\ x,\ \delta) \leqslant \varphi(A_1\alpha_n^{\beta})$.

Пусть $p \in N$ такое, что $A_1 < 2^p$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n^{\beta} = 0$, то найдется $n_0 \in N$ такое, что при $\forall\, n \geqslant n_0$ будет

$$\alpha_n^{\beta} < \min\{2^{-p+1},\ (2aB)^{-1}\}. \tag{17}$$

Тогда, используя неравенство (3), p-раз получаем $\varphi(A_1\alpha_n^{\beta}) \leqslant \varphi(2^p\alpha_n^{\beta}) \leqslant a^p\varphi(\alpha_n^{\beta}) = B_1\varphi(\alpha_n^{\beta})$. Если же $n \leqslant n_0$, то неравенство (15) получим за счет выбора числа B.

В дальнейшем будем считать, что $n \geqslant n_0$ и $\eta(n) \geqslant n + 1$ и придерживаться схемы доказательства теоремы 1 из работы [11].

Пусть $\sigma \in N_0 = \{0, 1, \dots\}$ и x — некоторое фиксированное число. Обозначим через $\mu_{n,\sigma}(x)$ количество тех номеров $k \in [n, \eta(n)]$, для которых

$$\delta_k |\rho_k(f; x)| \geqslant \delta_n \alpha_n^\beta. \tag{18}$$

Полагая

$$\nu_\sigma = \begin{cases} 1, & \mu_{n,\sigma}(x) \geqslant 1, \\ 0, & \mu_{n,\sigma}(x) = 0, \end{cases}$$

$$P_{n,\sigma}^\beta = \{k \in [n, \eta(n)] : (\sigma - 1)\alpha_n^\beta \leqslant \delta_k |\rho_k(f; x)| \leqslant \sigma\alpha_n^\beta, \ \sigma \geqslant 1\},$$

представим величину $D_n^\varphi(f; x, \delta)$ следующим образом:

$$D_n^\nu(f; x, \delta) = \frac{1}{\gamma_n} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \nu_\sigma \sum_{k \in P_{n,\sigma}^\beta} \varphi(\delta_k |\rho_k(f; x)|).$$

Так как функция φ не убывает, то

$$D_n^\varphi(f; x, \delta) \leqslant \frac{1}{\gamma_n} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \nu_\sigma \varphi(\sigma\alpha_n^\beta) \mu_{n,\sigma-1}(x).$$

Пусть $\mu_{n,\sigma}(x) \geqslant 1$, k_j — те значения $k \in [n, \eta(n)]$, для которых выполнено соотношение (18). Полагая в неравенстве (6) $r = \mu_{n,\sigma}(x)$ и учитывая то, что каждая величина $\lambda_{k_j} |\rho_{k_j}(f; x)|$ больше чем $\sigma\alpha_n^\beta$, будем иметь

$$\sigma\alpha_n^\beta \leqslant B\alpha_n^\beta \ln \frac{\gamma_n e}{\mu_{n,\sigma}(x)}. \tag{19}$$

Отсюда $\mu_{n,\sigma}(x) \leqslant \gamma_n e^{1-\sigma/B}$.

Далее, используя неравенство [11]

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi(u\sigma) e^{-\sigma/B} \leqslant C\varphi(u), \tag{20}$$

которое справедливо $\forall\, u \in (0, (2aB)^{-1})$, где a и $b = B$ — те же, что в неравенствах (3), (6), учитывая соотношения (17) (19), получаем

$$D_n^\varphi(f; x, \delta) \leqslant B_1 \sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi(\sigma\alpha_n^\beta) e^{-\sigma/B} \leqslant B_1 \varphi(\alpha_n^\beta).$$

Неравенство (16) доказывается аналогично неравенству (15), только в этом случае вместо (6) следует воспользоваться оценкой (6′).

Доказательство теоремы. Методы доказательства неравенств (4), (5) одинаковы, поэтому остановимся на проверке, например, соотношения (4).

Положим $n_0 = n$, $n_j = [\eta(n_{j-1})] + 1$, $\forall\, j \in N$. Так как последовательность чисел $(\lambda_k \psi(k))_{k \in N}$ не возрастает, то на основании неравенства (7), $\forall\, k \in [n, \eta(n)]$, $\lambda_k \leqslant 2\lambda_n$. В силу этого неравенства с учетом соотношения (15) получим

$$\sum_{k=n_j}^{[\eta(n_j)]} \lambda_k \varphi(\delta_k |\rho_k(f; x)|) \leqslant 2\lambda_{n_j} \sum_{k=n_j}^{[\eta(n_j)]} \varphi(\delta_k |\rho_k(f; x)|) \leqslant$$

$$\leqslant 2B_1 \lambda_{n_j} \varphi(\delta_{n_j} \alpha_{n_j}^\beta) \gamma_{n_j}. \tag{21}$$

Отсюда на основании соотношения $\gamma_{n_j}/\gamma_{n_{j-1}} \leqslant B$, справедливого $\forall\, j \in N$ [4, с. 10], так как $\lambda_k \psi(k)$ и α_k^β не возрастают, из (21) получаем

$$\sum_{k=n_j}^{[\eta(n_j)]} \lambda_k \varphi(\delta_k |\rho_k(f; x)|) \leqslant B \sum_{k=n_{j-1}}^{[\eta(n_{j-1})]} \lambda_k \varphi(\alpha_k^\beta). \tag{22}$$

Используя соотношения (21) при $j=0$ и (22) при $j\geqslant 1$, находим

$$H_n^{\varphi}(f;\ x,\lambda,\delta)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=n_j}^{[\eta(n_j)]}\lambda_k\varphi(\delta_k|\rho_k(f;\ x)|)\leqslant$$

$$\leqslant B\left\{\lambda_n\gamma_n\varphi(\alpha_n^{\beta})+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n_{j-1}}^{[\eta(n_{j-1})]}\lambda_k\varphi(\alpha_k^{\beta})\right\}.$$

Теорема доказана.

Обратим внимание на такое обстоятельство. Из неравенств (4), (5) следует, что

$$\|H_\delta^{\varphi}(f;\ x,\lambda,\delta)\|_C\leqslant B\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varphi(\delta_k\psi(k)E_k(f_\beta^{\psi})). \qquad (23)$$

Полагая $\delta_k=1$, $\forall k\in N$ и

$$\lambda_k=\begin{cases}1/(n+1), & k\leqslant n,\\ 0, & k>n,\end{cases}$$

$\forall\ \psi\in\mathfrak{M}_0\cup\mathfrak{M}_\infty$ из (23) выводим

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varphi(|\rho_k(f;\ x)|)\leqslant\frac{B}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(\psi(k)E_k(f_\beta^{\psi})).$$

Тем самым получены оценки сильных средних арифметических ряда Фурье функции $f\in C_\beta^{\psi}C$. Аналогично из неравенства (23) можно вывести оценки сильных средних многих методов суммирования рядов Фурье, например для средних метода Абеля, средних логарифмических и др.

При $\varphi(u)=u^p$, $p>0$, справедливость неравенства (23) доказана в [5].

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Sur la serie de Fourier d'une fonction a'carre summable // Comput. Revs.— 1913.— **153**.— P. 1307—1309.
2. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* On the strang summability of Fourier series // Proc. London. Math. Soc.— 1926.— **26**.— P. 273—286.
3. *Гоголадзе Л. Д.* О сильной суммируемости простых и кратных рядов Фурье // Некоторые вопросы теории функций.— Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1981.— Т. 2.— С. 5—50.
4. *Степанец А. И., Пачулиа Н. Л.* О сильной суммируемости рядов Фурье // Вопр. суммирования рядов Фурье.— Киев, 1985.— С. 3—13.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 85.61).
5. *Степанец А. И., Пачулиа Н. Л.* О поведении группы уклонений на множествах (ψ,β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 1.— С. 101—105.
6. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций — Киев: Наук. думка, 1987.— 288 с.
7. *Totik V.* Notes on Fouries series : Strong approximation // J. Approxim. Theory.— 1985.— **43**.— P. 105—111.
8. *Пачулиа Н. Л.* О сильной суммируемости рядов Фурье // Вопр. суммирования простых и кратных рядов Фурье.— Киев, 1987.— С. 9—50.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 87.40).
9. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье в пространстве L_β^{ψ} // Скорости сходимости рядов Фурье в пространстве L_β^{ψ}.— Киев, 1986.— С. 3—48.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 86.66).
10. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды.— М. : Физматгиз. 1961.— 936 с.
11. *Totik V.* An the strong approximation of Fourier series // Acta math. Acad. sci. hung.— 1980.— **35**.— P. 157—172.
12. *Leindler L.* Strong approximation by Fourier series.— Budapest, 1985.— 210 p.

Абхаз. ун-т, Сухуми

Получено 22.04.88