УДК 517.928.4

В. П. Скрипник

Сходимость в L^2 решений уравнений с малой матрицей при производной

В работах [1—5] рассматривались системы с малой в L^2 или L^4 матрицей при производной. Изучалась сходимость в L^2 решений этих систем. При этом предполагалось, что решение вырожденного уравнения объязательно ограничено. В данной работе рассматриваются системы с малой в L^4 матрицей при производной, но решение вырожденного уравнения может быть неограниченным. Содержание работы примыкает к работам [6—9], в которых изучалась поточечная сходимость.

Обозначим через E множество значений параметра ε, которое принадлежит топологическому пространству, удовлетворяющему первой аксиоме отделимости (предполагается, что $\varepsilon \in E$, $\varepsilon_0 \in \bar{E}$, $\varepsilon_0 \notin E$); $\max \lambda [S(A)] = \max \{\lambda_i\}$, $\min \lambda [S(A)] = \min \{\lambda_i\}$, где λ_i — характеристические корни матрицы $S(A) = (A + A^*)/2$; $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве; $\| \cdot \|$ — евклидова норма; $\mathcal{P}[a, b]$ — множество вектор-полиномов на $[a, b]$; $\{[a, b], Q\}$ — множество абсолютно непрерывных вектор-функций, отображающих $[a, b]$ в Q; $Q(H) = \{v : \|v\| \leqslant H < \infty\} \subset R^m$.

Пусть семейство вектор-функций $\{F(t, x, \varepsilon)\}$ и вектор-функция $\hat{F}(t, x)$ определены на $[a, b] \times Q$, где $Q \in R^m$. Предположим, что для любой вектор-функции $\varphi(\cdot) \in \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ — некоторое множество вектор-функций, отображающих $[a, b]$ в Q, имеет место соотношение $F(\cdot, \varphi(\cdot), \varepsilon), \hat{F}(\cdot, \varphi(\cdot)) \in L^2[a, b]$. Будем говорить, что при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ семейство $\{F(t, x, \varepsilon)\}$ в $L^2[a, b]$ сходится к

$\hat{F}(t, x)$ равномерно на $\mathcal{P}$, если для любого $\delta > 0$ существует такая окрестность $\bigcup(\varepsilon_0)$, что при $\varepsilon \in \bigcup(\varepsilon_0) \cap E$ и $\varphi(\cdot) \in \mathcal{P}$ будет $\int\limits_a^b \| F(\tau, \varphi(\tau), \varepsilon) - \hat{F}(\tau, \varphi(\tau)) \|^2 d\tau < \delta$.

Рассмотрим на $[a, b] \times R^l \times R^m$ семейство систем

$$A(t, \varepsilon) u' = f_1(t, u, v, \varepsilon)$$
$$v' = f_2(t, u, v, \varepsilon), \tag{1}$$

где $A(t, \varepsilon)$ — матрицы $l \times l$, $f_1, u \in R^l$, $v, f_2 \in R^m$.

Для второго уравнения (1) обозначим через ω совокупность следующих условий: $f_2(t, u, v, \varepsilon)$ при фиксированных u и v измеримы по t, а при фиксированных t непрерывны по u и v; $\| f_2(t, u, v, \varepsilon) \| \leqslant M(t) \| v \|^{\alpha}$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $M(\cdot) \in L^1[a, b]$.

Лемма. *Предположим, что для второго уравнения* (1) *выполняются условия* ω. *Существует семейство решений* $\{u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon)\}$ *систем* (1) *в смысле Каратеодори, определенное на* $[a, b]$, *такое, что* $\{v(a, \varepsilon)\}$ *ограничено. Тогда существует последовательность* $\{\varepsilon_n\}$, *сходящаяся к* ε_0, *такая, что последовательность* $\{v(t, \varepsilon_n)\}$ *сходится равномерно на* $[a, b]$.

Доказательство. Почти всюду на $[a, b]$ имеют место равенства $v'(t, \varepsilon) = f_2(t, u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon), \varepsilon)$. Тогда $(\| v(t, \varepsilon)\|^2)' = 2(f_2(t, u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon), \varepsilon), v(t, \varepsilon)) \leqslant 2M(t) \| v(t, \varepsilon)\|^{\alpha+1}$. Пусть сначала $\alpha = 1$. Тогда $(\| v(t, \varepsilon)\|^2)' \leqslant 2M(t) \| v(t, \varepsilon)\|^2$. Отсюда

$$\| v(t, \varepsilon)\| \leqslant \|v(a, \varepsilon)\| \exp\left(\int\limits_a^t M(\tau) d\tau\right) \leqslant \mathcal{P}_1 < \infty. \tag{2}$$

Пусть $t', t'' \in [a, b]$. Тогда $\| v(t'', \varepsilon) - v(t', \varepsilon) \| \leqslant \| \int\limits_{t'}^{t''} f_2(\tau, u(\tau, \varepsilon), v(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \times d\tau \| \leqslant K | \int\limits_{t'}^{t''} M(\tau) \| v(\tau, \varepsilon) \| d\tau |$, где K — некоторое число. В силу (2)

$$\| v(t'', \varepsilon) - v(t', \varepsilon) \| < K\mathcal{P}_1 | \int\limits_{t'}^{t''} M(\tau) d\tau |. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что для $\{v(t, \varepsilon)\}$ выполняются условия теоремы Арцела. Поэтому существует последовательность $\{\varepsilon_n\}$, сходящаяся к ε_0, такая, что последовательность $\{v(t, \varepsilon_n)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$.
Пусть теперь $0 \leqslant \alpha < 1$. Тогда

$$\| v(t, \varepsilon) \|^{-\alpha-1} d(\| v(t, \varepsilon) \|^2) \leqslant 2M(t) dt,$$

$$\| v(t, \varepsilon) \| \leqslant \left(\| v(a, \varepsilon) \|^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int\limits_a^t M(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \mathcal{P}_2 < \infty. \tag{4}$$

Пусть $t', t'' \in [a, b]$. Тогда, учитывая (4), получаем

$$\| v(t'', \varepsilon) - v(t', \varepsilon) \| \leqslant K_1 | \int\limits_{t'}^{t''} \| f_2(\tau, u(\tau, \varepsilon), v(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \| d\tau | \leqslant$$

$$\leqslant K_1 | \int\limits_{t'}^{t''} M(\tau) \| v(\tau, \varepsilon) \|^{\alpha} d\tau | \leqslant K_1 \mathcal{P}_2{}^{\alpha} | \int\limits_{t'}^{t''} M(\tau) d\tau |,$$

где K_1 — некоторое число. Таким образом, и в этом случае применима теорема Арцела. Лемма доказана.

Обозначим через ω_1 совокупность условий ω, а также следующих условий для систем (1). Матрицы $A(t, \varepsilon)$.— симметрические, невырождены, абсолютно непрерывны, а их производные ограничены.

Семейство $\{A(t, \varepsilon)\}$ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ в $L^4[a, b]$ сходится к нулю: $\lim\limits_{\varepsilon\to\varepsilon_0} A(a, \varepsilon) = 0$; $f_1(t, u, v, \varepsilon)$ при фиксированных u и v измеримы по t, а при фиксированных t непрерывны по u и v. Семейство $\{f_1(t, u, v, \varepsilon)\}$ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ в $L^2[a, b]$ сходится к $\hat{f}_1(t, u, v)$ равномерно на $\mathcal{P}[a, b] \times \{[a, b], Q(H)\}$ при любом фиксированном H; $\hat{f}_1(t, u, v)$ в $[a, b] \times R^l \times Q(H)$ по u и v удовлетворяет условию Липшица при любом фиксированном H. Уравнение $\hat{f}_1(t, u, v) = 0$ в $[a, b] \times R^l \times R^m$ имеет единственный корень $u = \varphi(t, v)$; $\varphi(t, v)$ в $[a, b] \times Q(H)$ конечна при любом фиксированном H; при фиксированных v измерима по t, а по v удовлетворяет условию Липшица. Для любой $v(\cdot) \in C[a, b]$ $\varphi(\cdot, v(\cdot)) \in L^2[a, b]$. Семейство $\{f_2(t, u, v, \varepsilon)\}$ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ в $L^2[a, b]$ сходится к $\hat{f}_2(t, u, v)$ равномерно на $\{[a, b], R^l\} \times \{[a, b], Q(H)\}$ при любом фиксированном H. Вектор-функция $\hat{f}_2(t, u, v)$ при фиксированных u и v измерима по t, а по u и v удовлетворяет условию Липшица в $[a, b] \times R^l \times Q(H)$ при любом фиксированном H. В $[a, b] \times R^l \times Q(H)$ при любом фиксированном H выполняются условия

$$\min \lambda[A(t, \varepsilon)] > 0, \ (A'(t, \varepsilon)(u'' - u') + 2(f_1(t, u'', v, \varepsilon) - \\ - f_1(t, u', v, \varepsilon)), u'' - u') \leqslant -\mu(H)\|u'' - u'\|^2, \tag{5}$$

либо

$$\max \lambda[A(t, \varepsilon)] < 0, \\ (A'(t, \varepsilon)(u'' - u') + 2(f_1(t, u'', v, \varepsilon) - f_1(t, u', v, \varepsilon)), u'' - u') \geqslant \\ \geqslant \nu(H)\|u'' - u'\|^2, \tag{6}$$

где $\mu(H)$, $\nu(H) > 0$.

Рассмотрим вырожденную систему

$$\hat{f}_1(t, u, v) = 0, \\ v' = \hat{f}_2(t, u, v). \tag{7}$$

Решением системы (7) на $[a, b]$ называется вектор-функция $(u(t), v(t))$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $(u(t), v(t))$ определена на $[a, b]$; 2) $u(t)$ измерима, а $v(t)$ абсолютно непрерывна; 3) $(u(t), v(t))$ удовлетворяет первому уравнению (7) всюду, а второму почти всюду на $[a, b]$.

Теорема. *Предположим, что*: 1) *для систем* (1) *выполняются условия* ω_1; 2) *существует семейство решений* $\{u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon)\}$ *систем* (1) *в смысле Каратеодори, определенное на* $[a, b]$, *такое, что* $\lim\limits_{\varepsilon\to\varepsilon_0} v(a, \varepsilon) = v^0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to\varepsilon_0} \sqrt{|A(a, \varepsilon)|}(u(a, \varepsilon) - \varphi(a, v^0)) = 0$, *где*

$$|A(a, \varepsilon)| = \begin{cases} A(a, \varepsilon) \ \textit{при} \ \min \lambda[A(a, \varepsilon)] > 0; \\ -A(a, \varepsilon) \ \textit{при} \ \max \lambda[A(a, \varepsilon)] < 0. \end{cases}$$

Тогда семейство $\{u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon\}$ *при* $\varepsilon \to \varepsilon_0$ *в* $L^2[a, b]$ *сходится к некоторому решению* $(\hat{u}(t), \hat{v}(t))$ *системы* (7) *на* $[a. b]$ *такому, что* $\hat{v}(a) = v^0$.

Доказательство. В силу леммы существует последовательность $\{\varepsilon_q\}$, сходящаяся к ε_0, такая, что последовательность $\{v(t, \varepsilon_q)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$. Обозначим $\hat{v}(t) = \lim\limits_{\varepsilon_q\to\varepsilon_0} v(t, \varepsilon_q)$, $\hat{u}(t) = \varphi(t, \hat{v}(t))$. Тогда $\hat{u}(\cdot) \in L^2[a, b]$. Пусть $\hat{u}(t) = \operatorname{col}(\hat{u}^{(1)}(t), \ldots, \hat{u}^{(l)}(t))$. Обозначим при

$i=\overline{1, l}$

$$\hat{u}_n^{(i)}(t)=\begin{cases}\hat{u}^{(i)}(t) \text{ при } -n\leqslant\hat{u}^{(i)}(t)\leqslant n;\\ -n \text{ при } \hat{u}^{(i)}(t)<-n;\\ n \text{ при } \hat{u}^{(i)}(t)>n,\end{cases}$$

$\hat{u}_n(t)=\operatorname{col}(\hat{u}_n^{(1)}(t), \ldots, \hat{u}_n^{(l)}(t))$. Очевидно $\|\hat{u}(t)-\hat{u}_n(t)\|\leqslant\|\hat{u}(t)\|$. Поэтому

$$\int_a^b\|\hat{u}(\tau)-\hat{u}_n(\tau)\|^2d\tau\leqslant\int_a^b\|\hat{u}(\tau)\|^2d\tau. \qquad (8)$$

При всех $t\in[a, b]$ $\lim\limits_{n\to\infty}(\hat{u}(t)-\hat{u}_n(t))=0$. Поэтому в левой части (8) возможен предельный переход под знаком интеграла

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\|\hat{u}(\tau)-\hat{u}_n(\tau)\|^2d\tau=\int_a^b 0d\tau=0.$$

Таким образом, $\{\hat{u}_n(t)\}$ в $L^2[a, b]$ сходится к $\hat{u}(t)$. Зафиксируем любое n. Очевидно $\|\hat{u}_n(t)\|\leqslant\sqrt{l}n$. Для данного n в силу теоремы Фреше существует последовательность вектор-полиномов $\{\chi_n^{(k)}(t)\}$, сходящаяся почти всюду на $[a, b]$ к $\hat{u}_n(t)$. Последовательность $\{\chi_n^{(k)}(t)\}$ можно выбрать такой, что $\|\chi_n^{(k)}(t)\|\leqslant\sqrt{l}n$. Так как возможен предельный переход под знаком интеграла в $\int_a^b\|\hat{u}_n(\tau)-\chi_n^{(k)}(\tau)\|^2d\tau$, то последовательность $\{\chi_n^{(k)}(t)\}$ при $k\to\infty$ в $L^2[a, b]$ сходится к $\hat{u}_n(t)$. Справедливы неравенства

$$\int_a^b\|\hat{u}(\tau)-\chi_n^{(k)}(\tau)\|^2d\tau\leqslant 2\int_a^b\|\hat{u}(\tau)-\hat{u}_n(\tau)\|^2d\tau+2\int_a^b\|\hat{u}_n(\tau)-\chi_n^{(k)}(\tau)\|^2d\tau.$$

Для $\frac{1}{p}$ существует $n(p)$ такое, что $2\int_a^b\|\hat{u}(\tau)-\hat{u}_{n(p)}(\tau)\|^2d\tau<\frac{1}{p}$. Для $n(p)$ существует $k(n(p))$ такое, что $2\int_a^b\|\hat{u}_{n(p)}(\tau)-\chi_{n(p)}^{(k(n(p)))}(\tau)\|^2d\tau<\frac{1}{p}$. Тогда

$$\int_a^b\|\hat{u}(\tau)-\chi_{n(p)}^{(k(n(p)))}(\tau)\|^2d\tau\leqslant 2\int_a^b\|\hat{u}(\tau)-\hat{u}_{n(p)}(\tau)\|^2d\tau+$$

$$+2\int_a^b\|\hat{u}_{n(p)}(\tau)-\chi_{n(p)}^{(k(n(p)))}(\tau)\|^2d\tau<\frac{2}{p}.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{\chi_{n(p)}^{(k(n(p)))}(t)\}$ при $p\to\infty$ в $L^2[a, b]$ сходится к $\hat{u}(t)$. Для простоты эту последовательность обозначим $\{\chi_p(t)\}$.

Из последовательности $\{A(t, \varepsilon_q)\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{A(t, \varepsilon_{q_p})\}$ такую, что

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b\|A(\tau, \varepsilon_{q_p})\|^4d\tau\int_a^b\|\chi'_p(\tau)\|^4d\tau=0,$$

$$\lim_{p\to\infty}\sqrt{|A(a, \varepsilon_{q_p})|}\chi_p(a)=0,$$

Для простоты вместо $\{A(t, \varepsilon_{q_p})\}$ будем писать $\{A(t, \varepsilon_p)\}$.

Почти всюду на $[a, b]$ справедливы равенства

$$A(t, \varepsilon_p)u'(t, \varepsilon_p) = f_1(t, u(t, \varepsilon_p), v(t, \varepsilon_p), \varepsilon_p). \tag{9}$$

Обозначим $w_p(t) = u(t, \varepsilon_p) - \chi_p(t)$, $h_p(t) = [f_1(t, \chi_p(t), v(t, \varepsilon_p), \varepsilon_p) - \hat{f}_1(t, \chi_p(t), v(t, \varepsilon_p))] + [\hat{f}_1(t, \chi_p(t), v(t, \varepsilon_p)) - \hat{f}_1(t, \hat{u}(t), \hat{v}(t))] - A(t, \varepsilon_p)\times \chi_p'(t)$. В силу условий теоремы последовательность $\{f_1(t, \chi_p(t), v(t, \varepsilon_p), \varepsilon_p) - \hat{f}_1(t, \chi_p(t), v(t, \varepsilon_p))\}$ в $L^2[a, b]$ сходится к нулю. Применяя к разности $\hat{f}_1(t, \chi_p(t), v(t, \varepsilon_p)) - \hat{f}_1(t, \hat{u}(t), \hat{v}(t))$ оценку Липшица, убеждаемся, что последовательность $\{h_n(t)\}$ в $L^2[a, b]$ сходится к нулю.

Из (9) получаем равенства

$$A(t, \varepsilon_p)w_p'(t) = f_1(t, u(t, \varepsilon_p), v(t, \varepsilon_p), \varepsilon_p) - f_1(t, \chi_p(t), v(t, \varepsilon_p), \varepsilon_p) + h_p(t). \tag{10}$$

Умножая правую и левую части равенств (10) скалярно на $w_p(t)$ и проводя некоторые преобразования, находим

$$(A(t, \varepsilon_p)w_p(t), w_p(t))' = (A'(t, \varepsilon_p)w_p(t) + 2(f_1(t, u(t, \varepsilon_p), v(t, \varepsilon_p), \varepsilon_p) - f_1(t, \chi_p(t), v(t, \varepsilon_p), \varepsilon_p), w_p(t)) + 2(h_p(t), w_p(t)). \tag{11}$$

Пусть сначала выполняются условия (5). Возмем H такое, что $\| v(t, \varepsilon_p)\| \leqslant H$. Тогда из (11) получим неравенства $(A(t, \varepsilon_p)w_p(t), w_p(t))' \leqslant -(\mu(H)\| w_p(t)\|^2 + 2\| h_p(t)\| \| w_p(t)\|$. После интегрирования и оценок имеем

$$\mu(H)\int_a^b \| w_p(\tau)\|^2 d\tau \leqslant (A(a, \varepsilon_p)w_p(a), w_p(a)) + 2\left(\int_a^b \| h_p(\tau)\|^2 d\tau\right)^{1/2} \times \left(\int_a^b \| w_p(\tau)\|^2 d\tau\right)^{1/2}. \tag{12}$$

Из условий теоремы следует $\lim\limits_{\varepsilon_p \to \varepsilon_0} (A(a, \varepsilon_p)w_p(a), w_p(a)) = 0$.

Существует N такое, что при $p \geqslant N \left(\int_a^b \| h_p(\tau)\|^2 d\tau\right)^{1/2} \leqslant \mu(H)/2$.

Предположим противное, что $\{w_p(t)\}$ неограничено в $L^2[a, b]$. Тогда существует подпоследовательность последовательности $\{w_p(t)\}$ (которую для простоты запишем в виде $\{w_p(t)\}$) такая, что $\int_a^b \| w_p(\tau)\|^2 d\tau \geqslant 1$. При $p \geqslant N$ из (12) следуют неравенства $\frac{\mu(H)}{2}\int_a^b \| w_p(\tau)\|^2 d\tau \leqslant (A(a, \varepsilon_p)w_p(a), w_p(a))$. Таким образом, последовательность $\{w_p(t)\}$ ограничена в $L^2[a, b]$ и в силу (12) в $L^2[a, b]$ сходится к нулю. Так как $\| u(t, \varepsilon_p) - \hat{u}(t)\| \leqslant \| u(t, \varepsilon_p) - \chi_p(t)\| + \| \chi_p(t) - \hat{u}(t)\|$, то $\{u(t, \varepsilon_p)\}$ в $L^2[a, b]$ сходится к $\hat{u}(t)$, а $\{u(t, \varepsilon_p), v(t, \varepsilon_p)\}$ — к $(\hat{u}(t), \hat{v}(t))$.

Учитывая неравенства

$$\| f_2(t, u(t, \varepsilon_p), v(t, \varepsilon_p), \varepsilon_p) - \hat{f}_2(t, \hat{u}(t), \hat{v}(t))\| \leqslant \| f_2(t, u(t, \varepsilon_p) v(t, \varepsilon_p), \varepsilon_p) - \hat{f}_2(t, u(t, \varepsilon_p), v(t, \varepsilon_p))\| + \| \hat{f}_2(t, u(t, \varepsilon_p), v(t, \varepsilon_p)) - \hat{f}_2, (t, \hat{u}(t), \hat{v}(t))\|,$$

заключаем, что последовательность $\{f_2(t, u(t, \varepsilon_p), v(t, \varepsilon_p), \varepsilon_p)\}$ в $L^2[a, b]$ сходится к $\hat{f}_2(t, \hat{u}(t), \hat{v}(t))$. Поскольку $\| f_2(t, u(t, \varepsilon_p), v(t, \varepsilon_p) \varepsilon_p)\| \leqslant M(t)\| v(t, \varepsilon_p)\|^{\alpha} \leqslant M(t) H^{\alpha}$, то в равенстве $v(t, \varepsilon_p) = v(a, \varepsilon_p) + \int_a^t f_2(\tau, u(\tau, \varepsilon_p), v(\tau,$

$\varepsilon_p), \varepsilon_p)d\tau$ возможен предельный переход под знаком интеграла. В результате на $[a, b]$ получим равенство $\hat{v}(t) = v^0 + \int\limits_a^t \hat{f}_2(\tau, \hat{u}(\tau), \hat{v}(\tau))d\tau$. Таким образом, $(\hat{u}(t), \hat{v}(t))$ является решением системы (7) на $[a, b]$, удовлетворяющим условию $\hat{v}(a) = v^0$.

Предположим противное, что при $\varepsilon \to \varepsilon_0 \{u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon)\}$ в $L^2[a, b]$ не сходится к $(\hat{u}(t), \hat{v}(t))$. Тогда существует $\delta > 0$ и последовательность $\{\varepsilon_n\}$, сходящаяся к ε_0, такие, что $\int\limits_a^b (\| u(\tau, \varepsilon_n) - \hat{u}(\tau)\|^2 + \|\hat{v}(\tau, \varepsilon_n) - \hat{v}(\tau)\|^2) \times \times d\tau \geqslant \delta$. Следовательно, существует подпоследовательность последовательности $\{u(t, \varepsilon_n), v(t, \varepsilon_n)\}$, которая сходится в $L^2[a, b]$ к некоторому решению $(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$ на $[a, b]$ системы (7) такому, что $\bar{v}(a) = v^0$. Пусть $t_1 \in (a, b)$ — первая точка, в которой происходит ветвление. Тогда при $t \in [t_1, b]$ справедливы равенства

$$\hat{v}(t) = \hat{v}(t_1) + \int\limits_{t_1}^t \hat{f}_2(\tau, \varphi(\tau, \hat{v}(\tau)), \hat{v}(\tau))d\tau,$$

$$\bar{v}(t) = \hat{v}(t_1) + \int\limits_{t_1}^t \hat{f}_2(\tau, \varphi(\tau, \bar{v}(\tau)), \bar{v}(\tau))d\tau.$$

Из них следует оценка $\Delta(t) \leqslant K(t_1 - t)\Delta(t)$, где $\Delta(t) = \sup\limits_{t \in [t_1, t]} \|\hat{v}(t) - \bar{v}(t)\|$, а K — некоторое число. Если $t > t_1$ такое, что $K(t - t_1) < 1$, то $\Delta(t) = 0$. Таким образом, при $t \in [a, b]\, \bar{v}(t) \equiv \hat{v}(t), \bar{u}(t) \equiv \varphi(t, \bar{v}(t)) \equiv \varphi(t, \hat{v}(t)) \equiv \hat{u}(t)$, а значит, указанная выше подпоследовательность сходится к $(\hat{u}(t), \hat{v}(t))$. Из полученного противоречия следует, что при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ $\{u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon)\}$ в $L^2[a, b]$ сходится к $(\hat{u}(t), \hat{v}(t))$.

В случае условий (6) доказательство аналогично. Теорема доказана.

В случае $f_1(t, u, v, \varepsilon) = B(t)u + \varphi(t, v, \varepsilon)$ условия (5) и (6) имеют вид $\min \lambda[A(t, \varepsilon)] > 0$, $\max \lambda[S(A'(t, \varepsilon) + 2B(t))] \leqslant -\mu(H)$ и $\max \lambda[A(t, \varepsilon)] < < 0$, $\min \lambda[S(A'(t, \varepsilon) + 2B(t))] \geqslant \nu(H)$, где $\mu, \nu > 0$.

1. *Скрипник В. П.* Нелинейные системы с малой матрицей при производной // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 1.— С. 73—78.
2. *Скрипник В. П.* О сходимости в L^2 решений систем с малой матрицей при производной // Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, № 10.— С. 1717—1723.
3. *Скрипник В. П.* О сходимости в среднем решений систем с малой матрицей при производной // Сиб. мат. журн.— 1984.— **25**, № 6.— С. 153—157.
4. *Скрипник В. П.* Линейные системы с малой матрицей при производной // Изв. вузов. Математика.— 1984.— № 8.— С. 40—45.
5. *Скрипник В. П.* О сходимости в L^2 решений уравнений с малой матрицей при производной // Качественные и приближенные методы исследований операторных уравнений.— Ярославль: Яросл. ун-т, 1985.— с. 33—41.
6. *Тихонов А. Н.* Системы, содержащие малые параметры при старших производных Мат. сб.— 1952.— **31**, № 3.— С. 575—586.
7. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М. : Наука, 1973.— 247 с.
8. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания.— М. : Наука, 1975.— 247 с.
9. *Крейн С. Г., Чернышов К. И.* Поведение решений общих линейных систем, мероморфно зависящих от малого параметра // Докл. АН СССР.— 1981.— **260**, № 3.— С. 530—535.

Моск. лесотехн. ин-т

Получено 16.09.86