УДК 517:513.88

*Г. К. Рогинский*

# Об асимптотическом поведении решений ослабленной задачи Коши для дифференциального уравнения с переменным неограниченным оператором в банаховом пространстве

В банаховом пространстве $E$ рассматривается дифференциальное уравнение

$$dx/dt = A(t)x, \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{1}$$

с линейным неограниченным оператором $A(t)$, имеющим не зависящую от $t$ плотную в $E$ область определения $\mathcal{D}(A)$, на которой он сильно непрерывен. Пусть существует ограниченный обратный оператор $A^{-1}(t)$. Для ослабленной задачи Коши, корректной на $\mathcal{D}(A)$, можно ввести эволюционный оператор $U(t, s): E \to E$, $0 \leqslant s < t$, ограниченный при всех $t$ и $s$, причем $U(t, \tau)U(\tau, s) = U(t, s)$, $s < \tau < t$. При $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ функция $x(t) = U(t, s)x_0$ будет ослабленным решением уравнения (1), удовлетворяющим заданному начальному условию $x(s) = x_0$ [1].

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение с «замороженным» коэффициентом

$$dx/dt = A(t_0)x, \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{2}$$

Пусть резольвента оператора $A(t_0)$ удовлетворяет условию

$$\|R_{A(t_0)}(\lambda)\| \leqslant M(t_0)(1 + |\tau|)^{-\beta}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant \omega(t_0), \ \operatorname{Im}\lambda = \tau, \ 0 < \beta < 1. \tag{3}$$

Тогда ослабленная задача Коши для уравнения (2) корректна на $\mathcal{D}(A)$ и порождает сильно непрерывную полугруппу операторов $U_{A(t_0)}(t)$, которые, согласно [1], удовлетворяют оценкам

$$\|U_{A(t_0)}(t)\| \leqslant M_0(t_0)e^{\omega(t_0)t}t^{1-1/\beta}, \quad \|A(t_0)U_{A(t_0)}(t)\| \leqslant M_1(t_0)e^{\omega(t_0)t}t^{1-2/\beta}. \tag{4}$$

Если положить в уравнении (1) оператор $A(t)$ постоянным и равным $A(t_0)$, то $U(t, s) = U_{A(t_0)}(t - s)$ и

$$\| U(t, s) \| \leqslant N e^{\nu(t-s)} (t - s)^{-\gamma}, \quad 0 \leqslant s < t < \infty, \tag{5}$$

где $N = M_0(t_0)$, $\nu = \omega(t_0)$, $\gamma = 1/\beta - 1$.

В нестационарном случае существование оценки (5) аналогично свойству $\mathscr{B}(\nu, N)$ уравнения с ограниченным оператором $A(t)$ [2] и позволяет ввести понятие генерального показателя ослабленной задачи Коши для уравнения (1) как точной нижней грани тех $\nu$, для которых справедлива оценка (5) при некотором $N = N(\nu)$.

Если потребовать выполнения условия (3) с $\beta \in ]2/3, 1[$ для произвольного $t_0 \in [0, \infty[$, то для изучения свойств $U(t, s)$ можно, согласно [3], использовать метод «замороженных» коэффициентов. При выполнении для оператор-функции $A(t)$ на произвольном конечном интервале $[0, T]$ условия Гельдера

$$\| [A(t) - A(s)] A^{-1}(0) \| \leqslant c(T)(t - s)^{\rho}, \quad 2\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) < \rho \leqslant 1, \ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$

связь между эволюционным оператором уравнения (1) и полугруппами уравнения (2) определяется формулой

$$U(t, s) = U_{A(s)}(t - s) + \int_s^t U(t, \tau) [A(\tau) - A(s)] U_{A(s)}(\tau - s) \, d\tau. \tag{7}$$

Пусть теперь оператор-функция $A(t)$ удовлетворяет более жесткому, чем (3), условию

$$\| R_{A(t_0)}(\lambda) \| \leqslant M'(t_0)(1 + |\lambda|)^{-\beta}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant a(t_0), \quad 2/3 < \beta < 1, \tag{8}$$

и, кроме того, для произвольных $s$ и $\tau$, $0 \leqslant s < \tau$, оператор $B(\tau, s) = A(\tau) - A(s)$ подчинен оператору $A(s)$ с порядком $\alpha \in [0, \beta[$, не зависящим от $\tau$ и $s$, т. е. согласно [1], $\mathscr{D}(B(\tau, s)) \supset \mathscr{D}(A(s))$ и

$$\| B(\tau, s) x \| \leqslant c_\alpha (B(\tau, s)) \| A(s) x \|^{\alpha} \| x \|^{1-\alpha}, \quad x \in \mathscr{D}(A). \tag{9}$$

Будем рассматривать $B(\tau, s)$ как возмущение оператора $A(s)$. Следуя С. Н. Самборскому, построим некоторое топологическое пространство операторов, в которое естественным образом попадут значения оператор-функции $A(t)$.

Пусть $\mathcal{A}$ — множество операторов $A$, имеющих общую область определения $\mathscr{D}$ и таких, что $A^{-1}$ ограничен и

$$\| R_A(\lambda) \| \leqslant M_A (1 + |\lambda|)^{-\beta}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant a, \quad 2/3 < \beta < 1. \tag{10}$$

Пусть $A \in \mathcal{A}$, а некоторый оператор $B$ подчинен $A$ с порядком $\alpha < \beta$. Тогда, согласно [1], оператор $A + B \in \mathcal{A}$. Исходя из определения подчиненности (9), имеем $\| BR_A(\lambda) x \| \leqslant c_\alpha(B) \| AR_A(\lambda) x \|^{\alpha} \| R_A(\lambda) x \|^{1-\alpha}$. Используя тождество $AR_A(\lambda) = I + \lambda R_A(\lambda)$ и условие (10), получаем

$$\| BR_A(\lambda) \| \leqslant 2M_A c_\alpha(B)(1 + |\lambda|)^{-\beta}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant a. \tag{11}$$

Потребуем выполнения условия $2M_A c_\alpha(B) < 1$. Тогда из тождества $(A + B - \lambda I) = (I + BR_A(\lambda))(A - \lambda I)$ и неравенства (11) следует $\| R_{A+B}(\lambda) \| \leqslant M_A (1 - 2M_A c_\alpha(B))^{-1} (1 + |\lambda|)^{-\beta}$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant a$, т. е.

$$M_{A+B} \leqslant M_A (1 - 2M_A c_\alpha(B))^{-1}. \tag{12}$$

Введем на множестве $\mathcal{A}$ систему окрестностей $\tau_\alpha^0$ следующим образом. Назовем $\rho$-окрестностью оператора $A \in \mathcal{A}$, $\rho > 0$, такое подмножество

$V_\rho(A) \subset \mathcal{A}$, что из $A' \in V_\rho(A)$ следует

$$\|(A'-A)x\| \leqslant c_\alpha(A'-A)\|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha}, \quad 2M_A c_\alpha(A'-A) < 1,$$
$$c_\alpha(A'-A) < \rho. \tag{13}$$

$\tau_\alpha^0$ состоит из всех $\rho$-окрестностей операторов из $\mathcal{A}$. Очевидно, что:

1) $A \in V_\rho(A)$;

2) $\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow V_{\rho_1}(A) \subset V_{\rho_2}(A)$;

3) $\forall A \in \mathcal{A}, \rho > 0 \exists \rho_1 : \forall A' \in V_{\rho_1}(A) \exists \rho_2 : A'' \in V_{\rho_2}(A') \Rightarrow A'' \in V_\rho(A)$. Отсюда следует, что система окрестностей $\tau_\alpha^0$ порождает в пространстве операторов $\mathcal{A}$ топологию $\tau_\alpha$. Таким образом, с оператор-функцией $A(t)$, удовлетворяющей условиям (8) и (9) $(a(t_0) \equiv a)$, можно связать топологическое пространство $\mathfrak{A}_{\beta,\alpha,a} = (\mathcal{A}, \tau_\alpha)$, причем $A(t) \in \mathcal{A}$, $0 \leqslant t < \infty$.

Определение 1. *Оператор-функцию $A(t)$ будем называть компактной, если множество ее значений предкомпактно в $\mathfrak{A}_{\beta,\alpha,a}$. Оператор $C$ будем называть $R$-предельным для $A(t)$, если найдется последовательность $t_n \to \infty$ такая, что $A(t_n) \to C$ в топологии $\tau_\alpha$. Пусть $\Gamma(A)$ — множество всех $R$-предельных операторов для $A(t)$. Поскольку $\Gamma(A) \subset \mathcal{A}$, то резольвенты операторов из $\Gamma(A)$ удовлетворяют условию (10).*

Утверждение 1. *Если каждый $R$-предельный оператор $C$ компактной оператор-функции $A(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$a - M_C^{-1}(1+|a|)^\beta < \omega_0, \tag{14}$$

*где $a$, $\beta$, $M_C$ — соответствующие константы из условия (10), то начиная с некоторого $s_0$ полугруппы $U_{A(s)}(t)$ уравнения (2) удовлетворяют оценкам*

$$\|U_{A(s)}(t)\| \leqslant Me^{\omega_0 t} t^{1-1/\beta}, \quad \|A(s)U_{A(s)}(t)\| \leqslant Me^{\omega_0 t} t^{1-2/\beta}, \quad 0 < t < \infty. \tag{15}$$

Доказательство. Выберем для каждого $C \in \Gamma(A)$ окрестность $V_{\rho_C}(C)$ таким образом, чтобы $a - M_{A'}^{-1}(1+|a|)^\beta < \omega_0$ при $A' \in V_{\rho_C}(C)$. Для этого с учетом неравенства (12), определения окрестности (13) и условия (14) необходимо положить

$$\rho_C = \frac{1}{2}[\omega_0 - (a - M_C^{-1}(1+|a|)^\beta)](1+|a|)^{-\beta}. \tag{16}$$

В силу компактности $A(t)$ построенная система окрестностей $R$-предельных операторов образует покрытие множества значений $A(t)$, начиная с некоторого момента $s_0$, и из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\bigcup_{i=1}^{n} V_{\rho_{C_i}}(C_i)$. Значит, для каждого $s \geqslant s_0$ найдется такое $i$, что $A(s) \in V_{\rho_{C_i}}(C_i)$, т. е. $M_{A(s)} \leqslant M_{C_i}(1 - 2M_{C_i}\rho_{C_i})^{-1}$. Положим $M_A = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{M_{C_i}(1 - 2M_{C_i}\rho_{C_i})^{-1}\}$. Тогда с учетом условий (14) и (16) получим для всех $s \geqslant s_0$ единую оценку типа (10):

$$\|R_{A(s)}(\lambda)\| \leqslant M_A(1+|\lambda|)^{-\beta}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant a, \quad 2/3 < \beta < 1, \tag{17}$$

причем

$$a - M_A^{-1}(1+|a|)^\beta < \omega_0. \tag{18}$$

Нетрудно показать, что от оценки (17) с учетом неравенства (18) можно перейти к условию вида (3)

$$\|R_{A(s)}(\lambda)\| \leqslant M_A'(1+|\tau|)^{-\beta}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant \omega_0, \quad 2/3 < \beta < 1, \quad s \geqslant s_0,$$

откуда с учетом неравенств (4) получаются требуемые оценки (15).

В условиях доказанного утверждения можно перейти от формулы (7) к интегральному неравенству для оценки эволюционного оператора $U(t,$

$s$) уравнения (1)

$$\|U(t,s)\| \leqslant Me^{\omega_0(t-s)}(t-s)^{1-1/\beta} + \int\limits_s^t \|U(t,\tau)\| \, \|[A(\tau)-A(s)]\, U_{A(s)}(\tau-s)\| \, d\tau \tag{19}$$

на некотором конечном интервале $s_0 \leqslant t_1 \leqslant s < t \leqslant t_1 + L$. Поскольку оператор $B(\tau, s) = A(\tau) - A(s)$ при этом подчинен оператору $A(s)$ с порядком $\alpha$, то из оценок (15) аналогично [1] вытекает $\|B(\tau, s)\, U_{A(s)}(t)\| \leqslant \leqslant 2Mc_\alpha(B(\tau, s))\, e^{\omega_0 t} t^{1-(1+\alpha)/\beta}$, и интегральное неравенство (19) принимает вид

$$\|U(t,s)\| \leqslant Me^{\omega_0(t-s)}(t-s)^{1-1/\beta} + 2Mc(t_1, L)\int\limits_s^t \|U(t,\tau)\|\, e^{\omega_0(\tau-s)} \times$$

$$\times (\tau - s)^{1-(1+\alpha)/\beta} d\tau, \tag{20}$$

где $c(t_1, L) = \max\limits_{t_1 \leqslant s < \tau \leqslant t_1 + L} C_\alpha(B(\tau, s))$.

По аналогии со случаем ограниченного оператора $A(t)$ [2] дадим следующее определение.

Определение 2. *Будем говорить, что оператор-функция $A(t)$ удовлетворяет условию $S_{\varepsilon,L}$ при некоторых $\varepsilon > 0$ и $L > 0$, если существует число $T_0 > 0$ такое, при $T_0 \leqslant s < t$ и $t - s \leqslant L$ выполняется условие $A(t) \in \in V_\varepsilon(A(s))$.*

Далее используется следующий вариант неравенства Гронуолла (в более общем виде приведенный в [4]). Пусть $u(t)$ — неотрицательная функция, локально интегрируемая на $0 < t \leqslant L$, $0 < L < \infty$, $b \geqslant 0$, $0 \leqslant \mu$, $\gamma < 1$ и

$$u(t) \leqslant at^{-\mu} + b\int\limits_0^t (t-s)^{-\gamma} u(s)\, ds, \quad 0 < t < L. \tag{21}$$

Тогда существует постоянная $M_\gamma$ такая, что

$$U(t) \leqslant M_\gamma t^{-\mu} e^{\eta t}, \quad 0 < t \leqslant L, \text{ где } \eta = [b(2-\gamma)\Gamma(1-\gamma)]^{1/1-\gamma}. \tag{22}$$

Утверждение 2. *Пусть выполнены условия утверждения 1 с $\omega_0 < < 0$ и $\alpha < 2\beta - 1$ и условие (6). Если, кроме того, оператор-функция $A(t)$ удовлетворяет условию $S_{\varepsilon,L}$ при $\varepsilon < |\omega_0|^{2-(1+\alpha)/\beta} [2M(3-(1+\alpha)/\beta) \times \times \Gamma(2-(1+\alpha)/\beta)]^{-1}$, где $M$ — константа из оценок (15), и некотором $L > 0$, то найдутся такие $M_{\alpha,\beta}$, $\nu_0 > 0$, не зависящие от $L$, что имеет место оценка*

$$\|U(t,s)\| \leqslant M_{\alpha,\beta} e^{-\nu_0(t-s)}(t-s)^{1-1/\beta}, \quad \max\{s_0, T_0\} \leqslant t_1 \leqslant s < t \leqslant t_1 + L. \tag{23}$$

Доказательство. Условие $S_{\varepsilon,L}$ означает, что $c_\alpha(B(\tau, s)) < \varepsilon$ при $\tau - s \leqslant L$, $T_0 \leqslant s < \tau$, т. е. в неравенстве (20) $c(t_1, L) < \varepsilon$. Тогда

$$\|U(t,s)\| \leqslant Me^{\omega_0(t-s)}(t-s)^{1-1/\beta} + 2M\varepsilon \int\limits_s^t \|U(t,\tau)\|\, e^{\omega_0(\tau-s)}(\tau-s)^{1-(1+\alpha)/\beta} d\tau$$

при $\max\{s_0, T_0\} \leqslant t_1 \leqslant s < t \leqslant t_1 + L$. Положим $\varphi(s) = \|U(t,s)\|\, e^{-\omega_0(t-s)}$ ($t$ фиксировано) и $\varphi_1(s) = \varphi(t-s)$. Тогда последнее неравенство принимает вид

$$\varphi_1(s) \leqslant Ms^{1-1/\beta} + 2M\varepsilon\int\limits_0^s (s-\theta)^{1-(1+\alpha)/\beta}\varphi_1(\theta)\, d\theta, \quad 0 < s \leqslant L.$$

Применяя неравенство (22) и переходя от $\varphi_1(s)$ к $\|U(t,s)\|$, получаем

$$\|U(t,s)\| \leqslant M_{\alpha,\beta} e^{(\omega_0+\eta)(t-s)}(t-s)^{1-1/\beta}, \quad (\max\{s_0, T_0\} \leqslant t_1 \leqslant s < t \leqslant t_1 + L),$$

где $M_{\alpha,\beta}$ — некоторая константа, а $\eta = [2M\varepsilon(3-(1+\alpha)/\beta)\Gamma(2-(1+$

$+\alpha)/\beta)]^{\frac{1}{2-(1+\alpha)/\beta}}$. При этом неравенство $\alpha < 2\beta - 1$ обеспечивает выполнение условия $(1+\alpha)/\beta - 1 < 1$. Используя условие $\omega_0 < 0$ и ограничение на $\varepsilon$, получаем $\nu_0 = -\omega_0 - \eta > 0$, т. е. справедлива оценка (23).

Легко видеть, что в силу компактности $A(t)$ величина $c_\alpha$ $(B(\tau, s))$ ограничена на конечном интервале $[0, T]$. Поэтому на таком интервале эволюционный оператор удовлетворяет более слабой оценке, чем (23):

$$\| U(t, s) \| \leqslant \tilde{N}(T)\, e^{\tilde{\nu}(t-s)} (t-s)^{1-1/\beta}, \quad 0 \leqslant s < t \leqslant T < \infty. \tag{24}$$

Доказанные утверждения позволяют перейти к оценке эволюционного оператора уравнения (1) на бесконечном интервале времени и сформулировать критерий отрицательности генерального показателя ослабленной задачи Коши (аналогично критерию, приведенному в [2] для случая ограниченных операторов).

Теорема 1. *Пусть для каждого $s \in [0, \infty[$ резольвента оператора $A(s)$ удовлетворяет условию* (10). *Пусть при этом выполнены условия утверждений* 1 *и* 2 *при $L > 2\max\{\ln M_{\alpha,\beta}/\nu_0, 1\}$. Тогда генеральный показатель ослабленной задачи Коши для уравнения* (1) *отрицателен.*

Доказательство. Достаточно доказать существование таких чисел $N$, $\nu > 0$, $0 < \gamma < 1$, что имеет место оценка

$$\| U(t, s) \| \leqslant N e^{-\nu(t-s)} (t-s)^{-\gamma}, \quad 0 \leqslant s < t < \infty. \tag{25}$$

Обозначим $t_0 = \max\{s_0, T_0\}$ и положим $L_1 = \max\{\ln M_{\alpha,\beta}/\nu_0, 1\}$ и $L > 2L_1$. Тогда $q = M_{\alpha,\beta} e^{-\nu_0 L_1} < 1$, и при $L_1 < \theta \leqslant L$ из оценки (23) получим

$$\| U(s+\theta, s) \| \leqslant q\theta^{-\gamma}, \quad \gamma = 1/\beta - 1 \in ]0, 1[, \quad t_0 \leqslant s < \infty. \tag{26}$$

Оценим теперь $\| U(t, s) \|$ для произвольных $\tau$ и $t$, $t_0 \leqslant \tau < t < \infty$. При $t - \tau \leqslant L$ справедлива оценка (23). При $t - \tau > L$ выбираем такое $\theta \in ]L_1, 2L_1]$, что $(t-\tau)/\theta = m \in Z$, $m \geqslant 2$. Положим $t_j = \tau + j\theta$, $j = \overline{0, m}$, при этом $t_0 = \tau$ и $t_m = t$. Из свойств эволюционного оператора следует, что $U(t, \tau) = U(t_m, t_{m-1}) \cdot U(t_{m-1}, t_{m-2}) \ldots U(t_1, t_0)$. Тогда с учетом неравенства (26) имеем

$$\| U(t, \tau) \| \leqslant \prod_{j=1}^{m} \| U(t_j, t_{j-1}) \| \leqslant q^m \theta^{-m\gamma}. \tag{27}$$

Поскольку $\theta > L_1 \geqslant 1$, то существует такое число $K$, что $K\theta^m \geqslant m\theta$, откуда, полагая $K_1 = K^\gamma$, находим

$$\theta^{-m\gamma} \leqslant K_1 (m\theta)^{-\gamma} = K_1 (t-\tau)^{-\gamma}. \tag{28}$$

С другой стороны,

$$q^m = q^{\frac{t-\tau}{\theta}} = e^{-\frac{1}{\theta}(t-\tau)\ln\frac{1}{q}} \leqslant e^{-\frac{1}{2L_1}(t-\tau)\ln\frac{1}{q}}. \tag{29}$$

Положим $\nu' = \dfrac{1}{2L_1} \ln \dfrac{1}{q}$. Тогда из оценки (27) с учетом неравенств (28) и (29) получаем

$$\| U(t, \tau) \| \leqslant K_1 e^{-\nu'(t-\tau)} (t-\tau)^{-\gamma}, \quad t_0 \leqslant \tau < t, \quad t - \tau > L. \tag{30}$$

Полагая $\nu_1 = \min\{\nu_0, \nu'\}$ и $N_1 = \max\{M_{\alpha,\beta}, K_1\}$ и объединяя оценки (23) и (30), имеем

$$\| U(t, \tau) \| \leqslant N_1 e^{-\nu_1(t-\tau)} (t-\tau)^{-\gamma}, \quad t_0 \leqslant \tau < t < \infty; \tag{31}$$

что совпадает с оценкой (25) на интервале $[t_0, \infty[$.

Пусть теперь $0 \leqslant s < t \leqslant 3t_0$. Используя оценку (24), находим

$$\| U(t, s) \| \leqslant \tilde{N} e^{\tilde{\nu}(t-s)} (t-s)^{-\gamma} = \tilde{N} e^{(\tilde{\nu}+\nu)(t-s)} e^{-\nu(t-s)} (t-s)^{-\gamma}$$

Полагая $N = \tilde{N} \max\limits_{0 \leqslant s < t \leqslant 3t_0} e^{(\tilde{\nu}+\nu)(t-s)}$, получаем оценку (25). В случае $0 \leqslant s < t_0$, $t > 3t_0$ с учетом оценок (24) и (31) будем иметь

$$\| U(t, s) \| \leqslant \| U(t, 2t_0) \| \| U(2t_0, s) \| \leqslant N_1 e^{-\nu(t-2t_0)} (t - 2t_0)^{-\gamma} \times$$
$$\times \tilde{N} e^{\tilde{\nu}(2t_0 - s)} (2t_0 - s)^{-\gamma}.$$

Положив $N = N_1 \tilde{N} \max\limits_{0 \leqslant s < t_0} e^{(\tilde{\nu}+\nu)(2t_0 - s)} \max\limits_{s < t_0, t > 3t_0} \left[ \frac{t - s}{(t - 2t_0)(2t_0 - s)} \right]^{\gamma}$, найдем оценку (25).

Определение 3. *Оператор-функция $A(t)$ называется стационарной на бесконечности, если она удовлетворяет условию $S_{\varepsilon, L}$ при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ и каком-либо положительном $L$ (а значит, и сколь угодно большом $L$).*

Заменив в утверждении 2 условие $S_{\varepsilon, L}$ условием стационарности $A(t)$ на бесконечности, получим следующее утверждение как следствие из теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (6) *и* (10) *и условия утверждения 1 с $\omega_0 < 0$ и $\alpha < 2\beta - 1$. Пусть также оператор-функция $A(t)$ стационарна на бесконечности. Тогда генеральный показатель ослабленной задачи Коши для уравнения* (1) *отрицателен.*

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$dx/dt = A(t) x + f(t), \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{32}$$

где $f(t)$ — непрерывная на $[0, \infty[$ функция со значениями в $E$. Пусть ослабленная задача Коши для соответствующего однородного уравнения (1) корректна на $\mathcal{D}(A)$. Аналогично [1] показывается, что при этом ослабленное решение уравнения (32), удовлетворяющее начальному условию $x(s) = x_0$, представимо в виде

$$x(t) = U(t, s) x_0 + \int\limits_s^t U(t, \tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{33}$$

Теорема 3. *Если в уравнении* (32) *функция $f$ ограничена на* $[0, \infty[$ *и генеральный показатель ослабленной задачи Коши для соответствующего однородного уравнения* (1) *отрицателен, то ослабленное решение уравнения* (32), *удовлетворяющее начальному условию $x(s) = 0$, ограничено на интервале* $[0, \infty[$.

Доказательство. Пользуясь представлением ослабленного решения в виде (33) ($x_0 = 0$) и вытекающей из отрицательности генерального показателя оценки (25), получаем

$$\| x(t) \| \leqslant \int\limits_s^t \| U(t, \tau) \| \| f(\tau) \| \, d\tau \leqslant N \int\limits_s^t e^{-\nu(t-\tau)} (t - \tau)^{-\gamma} \| f(\tau) \| \, d\tau. \tag{34}$$

По условию функция $f(t)$ ограничена на полуоси, т. е. $|\| f \|| = \sup\limits_{0 \leqslant t < \infty} \| f(t) \| < \infty$. Тогда неравенство (34) принимает вид

$$\| x(t) \| \leqslant |\| f \|| \, N \int\limits_s^t e^{-\nu(t-\tau)} (t - \tau)^{-\gamma} d\tau = |\| f \|| \, N \int\limits_0^{t-s} e^{-\nu\theta} \theta^{-\gamma} d\theta.$$

Возьмем произвольное $\delta \in ]0, t - s[$. Тогда

$$\int\limits_0^{t-s} e^{-\nu\theta} \theta^{-\gamma} d\theta = \int\limits_0^{\delta} e^{-\nu\theta} \theta^{-\gamma} d\theta + \int\limits_{\delta}^{t-s} e^{-\nu\theta} \theta^{-\gamma} d\theta \leqslant \int\limits_0^{\delta} \theta^{-\gamma} d\theta + \delta^{-\gamma} \int\limits_0^{t-s} e^{-\nu\theta} d\theta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\delta}{1 - \gamma} + \frac{\delta^{-\gamma}}{\nu},$$

что и доказывает теорему 3.

В [1] (гл. 1, § 8) рассмотрен пример уравнения с постоянным оператором в $\mathcal{L}_2(R^1)$, порождающим полугруппу $U(t)$ со слабой особенностью при $t \to 0$, т. е. удовлетворяющую оценкам вида (4). Для иллюстрации доказанных выше теорем рассмотрим аналогичный пример с переменным оператором. Пусть $u_1$ и $u_2$ — скалярные функции от $x$ и $t$, $P$ — псевдодифференциальный оператор, являющийся рациональной степенью дифференциального оператора $i\partial/\partial x : P = (i\,\partial/\partial x)^k$ ($k > 0$ — рациональное число). Символ оператора $P$ при больших $|\xi|$ равен $\xi^k$. Рассмотрим систему.

$$\partial u_1/\partial t = \partial^2 u_1/\partial x^2 - u_1,$$

$$\partial u_2/\partial t = Pu_1 + e^{-t} i\partial u_1/\partial x + \partial^2 u_2/\partial x^2 - u_2.$$

Соответствующее этой системе уравнение вида (1) в пространстве $E = \mathcal{L}_2(R^1)$ вектор-функций от $p$ имеет вид системы

$$\begin{aligned} d\tilde{u}_1/dt &= -(p^2+1)\tilde{u}_1, \\ d\tilde{u}_2/dt &= (p^k - pe^{-t})\tilde{u}_1 - (p^2+1)\tilde{u}_2, \end{aligned} \tag{35}$$

где $\tilde{u}_1(t, p)$ и $\tilde{u}_2(t, p)$ — образы функций $u_1$ и $u_2$ соответственно (преобразование Фурье производится по пространственной переменной $x$). Неограниченный в $\mathcal{L}_2(R^1)$ переменный оператор $A(t)$ есть оператор умножения на матрицу $A(t, p)$ вида

$$A(t, p) = \begin{Vmatrix} -p^2 & 0 \\ p^k - pe^{-t} & -p^2 \end{Vmatrix}.$$

Заметим, что для ограниченного оператора $R$ умножения на матрицу $R(p)$ с ограниченными непрерывными элементами норма в $E$ вычисляется следующим образом: $\|R\| = \sup\limits_{p \in R^1} \|R(p)\|_2$, где $\|R(p)\|_2$ — норма матрицы $R(p)$ как оператора в евклидовом пространстве $R^2$. Исходя из этого, по аналогии с примером из [1] получим, что в каждой точке $t_0$ резольвента оператора $A(t_0)$, имеющая вид

$$R_{A(t_0)}(\lambda) = \begin{Vmatrix} -\dfrac{1}{p^2+\lambda} & 0 \\ -\dfrac{p^k - pe^{-t_0}}{(p^2+\lambda)^2} & -\dfrac{1}{p^2+\lambda} \end{Vmatrix},$$

удовлетворяет оценке (10) с $a = 0$ и $\beta = \min(1, 2 - k/2)$. Полагая $k = 5/2$, получаем $\beta = 3/4$, т. е. выполняется условие $2/3 < \beta < 1$.

Оператор $B(\tau, s) = A(\tau) - A(s)$, имеющий вид

$$B(\tau, s) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ p(e^{-s} - e^{-\tau}) & 0 \end{Vmatrix},$$

подчинен оператору $A(s)$ с порядком $\alpha = 1/2$, причем $c_\alpha(B(\tau, s)) = e^{-s} - e^{-\tau}$. В топологическом пространстве $\mathfrak{A}_{\beta,\alpha,a}$ ($\beta = 3/4$, $\alpha = 1/2$, $a = 0$) оператор-функция $A(t)$ стационарна на бесконечности и имеет единственный $R$-предельный оператор

$$C = \begin{Vmatrix} -p^2 & 0 \\ p^{5/2} & -p^2 \end{Vmatrix},$$

для которого, очевидно, выполняется условие (14) утверждения 1 с $\omega_0 < 0$ (так как $a = 0$). В силу утверждения 1 полугруппа

$$U_{A(t_0)}(t) = \begin{Vmatrix} e^{-p^2 t} & 0 \\ (p^{5/2} - pe^{-t_0})\, te^{-p^2 t} & e^{-p^2 t} \end{Vmatrix}$$

удовлетворяет оценкам вида (15) (такой же результат имеем и при получении оценки $\| U_{A(t_0)}(t) \|$ непосредственно, по аналогии с примером из [1]).

Используя следствие из теоремы 1, получаем, что генеральный показатель $\chi$ уравнения (35) отрицателен, т. е. соответствующий эволюционный оператор $U(t, s)$, имеющий вид

$$U(t, s) = \left\| \begin{matrix} e^{-p^2(t-s)} & 0 \\ [p^{5/2}(t-s) - p(e^{-t} - e^{-s})]\, e^{-p^2(t-s)} & e^{-p^2(t-s)} \end{matrix} \right\|,$$

удовлетворяет оценке (25).


1. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1967.— 464 с.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 534 с.
3. *Соболевский П. Е.* О дифференциальных уравнениях с неограниченными операторами, порождающими неаналитические полугруппы // Докл. АН СССР.— 1968.— **183**, № 2.— С. 292—295.
4. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.— М. : Мир, 1985.— 376 с.


НИИАСС Госстроя УССР, Киев Получено 28.08.86