УДК 519.21

А. Д. Борисенко

О предельном поведении решения задачи Коши для параболического уравнения

Вопрос о предельном поведении решения параболического уравнения с коэффициентами, зависящими от параметра, рассматривался многими авторами. В работе [1] сделан обзор полученных результатов и приведена обширная библиография. Отметим, что в работах [2, 3] используется представление решения уравнения в частных производных в виде среднего от функционала от соответствующего диффузионного процесса, и предельные теоремы для уравнений в частных производных выводятся из предельных теорем для стохастических дифференциальных уравнений. Аналогичный подход использовался в работах [4, 5] для одномерного случая. В настоящей работе изучается предельное поведение при $T \to \infty$ решения задачи Коши в области $R_t^d = \{(u, x) : u \in [0, t), x \in R^d\}$

$$\frac{\partial}{\partial u} V_T(u, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}^T(u, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} V_T(u, x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{d} b_i^T(u, x) \frac{\partial}{\partial x_i} V_T(u, x) + c^T(u, x) V_T(u, x) = 0, \tag{1}$$

$$\lim_{u \uparrow t} V_T(u, x) = F(x), \tag{2}$$

где $a_{ij}^T(u, x) = a_{ij}(uT, xT^{1/2})$, $a_{ij}(u, x) = \sum_{k=1}^{d} \sigma_{ik}(u, x)\sigma_{jk}(u, x)$, $b_i^T(u, x) = T^{1/2} b_i(uT, xT^{1/2})$, $c^T(u, x) = c(uT, xT^{1/2})$.

Нам понадобятся следующие условия:

а) функции $a_{ij}(u, x)$, $b_i(u, x)$ ограничены и удовлетворяют локальному условию Липшица по (u, x);

б) функции $a_{ij}(u, x)$ гельдеровы по x равномерно относительно $(u, x) \in R_t^d$, функция $c(u, x)$ ограничена и удовлетворяет локальному условию Гельдера по (u, x).

Если выполняется условие а), то [6] (гл. 2, § 2) при каждом T существует единственное сильное решение $\xi^T(u, x, s) = \{\xi_i^T(u, x, s), i = \overline{1, d}\}$ стохастического уравнения

$$\xi_i^T(u, x, s) = x_i + \int_u^s b_i^T(\tau, \xi^T(u, x, \tau))\, d\tau + \sum_{k=1}^{d} \int_u^s \sigma_{ik}^T(\tau, \xi^T(u, x, \tau))\, dw_k^T(\tau), \tag{3}$$

где $\sigma_{ik}^T(u, x) = \sigma_{ik}(uT, xT^{1/2})$, $w_k^T(u) = \dfrac{w_k(uT)}{T^{1/2}}$, $w_k(u)$, $k = \overline{1, d}$, — независимые одномерные винеровские процессы.

Введем обозначения $A(u, x) = \dfrac{1}{2|x|^2} \sum\limits_{i,j=1}^{d} a_{ij}(u, x) x_i x_j$, $B(u, x) = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{d} a_{ii}(u, x)$, $C(u, x) = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i b_i(u, x)$.

Следующие две леммы являются следствием результатов работы [7].

Лемма 1. *Пусть* $C(u, x) \leqslant K$, $A(u, x) \geqslant \delta > 0$, *выполняется условие* а) *и*

в) *для любого* $N > 0$ *существует такая постоянная* $\mu(N) > 0$, *что для всех* $y \in R^d$, $u \geqslant 0$ $\sum\limits_{i,j=1}^{d} a_{ij}(u, x) y_i y_j \geqslant \mu(N) |y|^2$ *при* $|x| \leqslant N$;

г) $\varliminf\limits_{|x| \to \infty} \inf\limits_{u \geqslant 0} \left[\sum\limits_{i=1}^{d-1} \lambda_i(u, x) + C(u, x)\right] > 0$, *где* $\lambda_1(u, x) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_d(u, x)$ — *собственные значения матрицы* $\dfrac{1}{2}\{a_{ij}(u, x)\}$.

Если $g(r) \in C([0, \infty))$, $g(r) \geqslant 0$ *и* $\lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{1}{r} \int_0^r vg(v)\, dv = 0$, *то* $\lim\limits_{T \to \infty} T^{1/2} \times M \int_u^s g(|\xi^T(u, x, \tau)| T^{1/2})\, d\tau = 0$.

Если $g(r) \in C([0, \infty))$, $g(r) \geqslant 0$ *и* $\lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{1}{r} \int_0^r g(v)\, dv = 0$, *то* $\lim\limits_{T \to \infty} M \times \int_u^s g(|\xi^T(u, x, \tau)| T^{1/2})\, d\tau = 0$.

Лемма 2. *Пусть* $C(u, x) \leqslant K$, $A(u, x) \geqslant \delta > 0$ *и выполняются условия* а), в), г). *Если для некоторого* i, $1 \leqslant i \leqslant d$, $g(r) \in C([0, \infty))$ $\sum\limits_{k=1}^{d} \sigma_{ik}^2(u, x) \geqslant \delta > 0$, $|b_i(u, x)| \leqslant g(|x|)$, $\lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{1}{r} \int_0^r vg(v)\, dv = 0$, *то для неотрицательной функции* $q(r) \in C([0, \infty))$ *такой, что* $\lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{1}{r} \int_0^r q(v)\, dv = 0$, *имеет место соотношение*

$$\lim_{T \to \infty} M \int_u^s q(|\xi_i^T(u, x, \tau)| T^{1/2})\, d\tau = 0.$$

Лемма 3. *Пусть выполняются условия* а), г) *и*

д) *для всех* $i = \overline{1, d}$ $|b_i(u, x)| \leqslant g(|x|)$, *где* $g(r) \in C([0, \infty))$, $\lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{1}{r} \int_0^r vg(v)\, dv = 0$.

Если существует такая постоянная $\delta > 0$, *что* $\sum\limits_{i,j=1}^{d} a_{ij}(u, x) y_i y_j \geqslant \delta |y|^2$ $\forall x, y \in R^d$, $u \geqslant 0$, *то для любых* $\varepsilon > 0$ *и действительных конеч-*

ных α_i, $i=\overline{1, d}$, *имеет место оценка*

$$\varlimsup_{T\to\infty}\int_u^s P\left\{\left|\sum_{i=1}^d \alpha_i\xi_i^T(u,x,\tau)\right|\leqslant\varepsilon\right\}d\tau\leqslant C\varepsilon(|x|+|s-u|^{1/2}).$$

Доказательство леммы 3. Пусть заданы произвольные $\varepsilon>0$ и $\varepsilon_1>0$. Введем функцию

$$\Phi(r)=\int_0^r\int_0^u\varphi(v)\,dvdu,$$

где непрерывная, неотрицательная функция $\varphi(r)\leqslant 1$ такая, что $\varphi(r)=1$ при $|r|\leqslant\varepsilon$ и $\varphi(r)=0$ при $|r|\geqslant\varepsilon+\varepsilon_1$. Обозначим $f(x)=\sum_{i=1}^d\alpha_i x_i$ и по формуле Ито получим

$$\Phi(f(\xi^T(u,x,s)))-\Phi(f(x))=\int_u^s\left\{\sum_{i=1}^d\alpha_i b_i^T(\tau,\xi^T(u,x,\tau))\,\Phi'(f(\xi^T(u,x,\tau)))+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}^T(\tau,\xi^T(u,x,\tau))\,\alpha_i\alpha_j\Phi''(f(\xi^T(u,x,\tau)))\right\}d\tau+$$

$$+\sum_{i,j=1}^d\alpha_i\int_u^s\Phi'(f(\xi^T(u,x,\tau)))\,\sigma_{ij}^T(\tau,\xi^T(u,x,\tau))\,dw_j^T(\tau).$$

Очевидно $|\Phi'(r)|\leqslant\varepsilon+\varepsilon_1$ и в силу ограниченности $\sigma_{ij}(u,x)$, $i,j=\overline{1,d}$, имеем

$$M\int_u^s\Phi'(f(\xi^T(u,x,\tau)))\,\sigma_{ij}^T(\tau,\xi^T(u,x,\tau))\,dw_j^T(\tau)=0.$$

Так как $|\Phi(r)|\leqslant(\varepsilon+\varepsilon_1)|r|$, то в силу условия д) и равномерной параболичности получим

$$\delta|\alpha|^2M\int_u^s\varphi(f(\xi^T(u,x,\tau)))\,d\tau\leqslant C_1(\varepsilon+\varepsilon_1)\left[|x|+M|\xi^T(u,x,s)|+\right.$$

$$\left.+T^{1/2}M\int_u^s g(T^{1/2}|\xi^T(u,x,\tau)|)\,d\tau\right].\tag{4}$$

Из определения функций $\varphi(r)$ и $f(x)$ следует

$$M\int_u^s\varphi(f(\xi^T(u,x,\tau)))\,d\tau\geqslant\int_u^s P\left\{\left|\sum_{i=1}^d\alpha_i\xi_i^T(u,x,\tau)\right|\leqslant\varepsilon\right\}d\tau.\tag{5}$$

Применив формулу Ито к процессу $|\xi^T(u,x,s)|^2$, имеем

$$|\xi^T(u,x,s)|^2=|x|^2+2\int_u^s[C(\tau T,\xi^T(u,x,\tau)\,T^{1/2})+B(\tau T,\xi^T(u,x,\tau)\,T^{1/2})]d\tau+$$

$$+2\sum_{i,j=1}^d\int_u^s\sigma_{ij}^T(\tau,\xi^T(u,x,\tau))\,\xi_i^T(u,x,\tau)\,dw_j^T(\tau).\tag{6}$$

Ясно, что из условия д) следует, что $|C(u,x)|\leqslant K$ равномерно по $(u,x)\in\in R_t^d$. Так как коэффициенты $a_{ij}(u,x)$ ограничены, то, используя свойства стохастического интеграла, получаем из (6) оценку

$$M|\xi^T(u,x,\tau)|^2\leqslant|x|^2+C_2|s-u|.\tag{7}$$

Применив оценки (5) и (7) в (4), будем иметь

$$\int_u^s P\left\{\left|\sum_{i=1}^d \alpha_i \xi_i^T(u, x, \tau)\right| \leqslant \varepsilon\right\} d\tau \leqslant C_3(\varepsilon + \varepsilon_1)[|x| + |s-u|^{1/2} +$$

$$+ T^{1/2} M \int_u^s g(|\xi^T(u, x, \tau)| T^{1/2}) d\tau].$$

Из леммы 1 следует $\overline{\lim\limits_{T\to\infty}} \int_u^s P\left\{\left|\sum_{i=1}^d \alpha_i\xi_i^T(u, x, \tau)\right| \leqslant \varepsilon\right\} d\tau \leqslant C_3(\varepsilon + \varepsilon_1)(|x| + |s-u|^{1/2})$. В силу произвольности $\varepsilon_1 > 0$ получим требуемое соотношение.

Для формулировки основной теоремы нам понадобится условие

е) существуют ограниченные кусочно-непрерывные функции $\bar{a}_{ij}(x)$, $\bar{c}(x)$, имеющие разрывы первого рода на гиперплоскостях $\sum_{i=1}^d \alpha_i^{(k)} x_i = 0$, $k = \overline{1, n}$, такие, что $\bar{a}_{ij}(x) = \bar{a}_{ij}(\nu x)$, $\bar{c}(x) = \bar{c}(\nu x)$ для любого $x \in R^d$, $\nu > 0$ и $|c(u, x) - \bar{c}(x)| + |a_{ij}(u, x) - \bar{a}_{ij}(x)| \leqslant g_0(|x|) + \sum_{i=1}^d g_i(|x_i|)$, где $g_i(r) \in C([0, \infty))$, $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \int_0^r g_i(v)\, dv = 0$, $i = \overline{0, d}$.

Матрица $\bar{A}(x) = \{\bar{a}_{ij}(x)\}_{i,j=1}^d$ равномерно невырождена и для любого $x_0 \in R^d$ существуют такое $r > 0$ и положительно определенная симметричная матрица A, что $\sup\limits_{|x-x_0|\leqslant r} \mathrm{Sp}[\bar{A}(x) - A]^2 < \|A^{-1}\|^{-2}$, где A^{-1} — матрица, обратная к A, $\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}^2$.

З а м е ч а н и е. Нетрудно убедиться, что если функции $a_{ij}(u, x)$ удовлетворяют условиям в) и е), то выполняется условие равномерной параболичности.

Т е о р е м а. *Пусть выполняются условия* а)—е) *и* $F(x) \in C(R^d)$. *Тогда решение задачи Коши* (1), (2) *сходится при* $T \to \infty$ *к решению интегрального уравнения*

$$V(u, x) = \int_{R^d} F(y) P_{u,x}(t, dy) + \int_u^t ds \int_{R^d} \bar{c}(y) V(s, y) P_{u,x}(s, dy), \tag{8}$$

где $P_{u,x}(s, B) = P(\eta(u, x, s) \in B)$, *а процесс* $\eta(u, x, s) = \{\eta_i(u, x, s), \ i = \overline{1, d}\}$ *является слабым решением стохастического уравнения*

$$\eta_i(u, x, s) = x_i + \sum_{k=1}^d \int_u^s \bar{\sigma}_{ik}(\eta(u, x, \tau))\, d\bar{w}_k(\tau), \quad i = \overline{1, d}, \tag{9}$$

где $\bar{A}^{1/2}(x) = \{\bar{\sigma}_{ik}(x)\}_{i,j=1}^d$, $\bar{w}_k(s)$, $k = \overline{1, d}$, — *независимые одномерные винеровские процессы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как следует из [8] (гл. 6, § 5), в силу сделанного замечания, в условиях теоремы решение задачи Коши (1), (2) при каждом T существует, единственно и задается формулой

$$V_T(u, x) = M\left[F(\xi^T(u, x, t)) \exp\left\{\int_u^t c^T(s, \xi^T(u, x, s))\, ds\right\}\right], \tag{10}$$

где $\xi^T(u, x, s)$ — решение стохастического уравнения (3).

Отметим, что в условиях теоремы существует слабо единственное, слабое решение $\eta(u, x, s)$ уравнения (9) [6] (гл. 3, § 3).

Нам достаточно показать, что для произвольной последовательности $T_{n_1}\to\infty$ существует такая подпоследовательность $T_n\to\infty$, что процессы $\xi^{T_n}(u,x,t)$ и $\int\limits_u^t c^{T_n}(s,\xi^{T_n}(u,x,s))\,ds$ сходятся по вероятности соответственно к процессам $\eta(u,x,t)$ и $\int\limits_v^t \bar c(\eta(u,x,s))\,ds$, где $\eta(u,x,s)$ — слабое решение уравнения (9).

Тогда по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{T_n\to\infty} V_{T_n}(u,x)=V(u,x)=M\left[F(\eta(u,x,t))\exp\left\{\int\limits_u^t \bar c(\eta(u,x,s))\,ds\right\}\right],$$

а из [9] следует, что функция $V(u,x)$ является единственным ограниченным решением интегрального уравнения (8).

Рассмотрим уравнение (3). При фиксированном $u\leqslant s$ случайный процесс $\zeta^T(u,x,s)=\{\zeta_i^T(u,x,s),\ i=\overline{1,d}\}$, $\zeta_i^T(u,x,s)=\sum\limits_{k=1}^d\int\limits_u^s\sigma_{ik}^T(\tau,\xi^T(u,x,\tau))\times$ $\times\,dw_k^T(\tau)$, является векторным мартингалом по переменной s с матричной характеристикой

$$\langle\zeta_i^T(u,x,s),\zeta_j^T(u,x,s)\rangle=\int\limits_u^s a_{ij}^T(\tau,\xi^T(u,x,\tau))\,d\tau,\quad i,j=\overline{1,d}.$$

Заметим, что семейство процессов $(\xi^T(u,x,s),\zeta^T(u,x,s))$ удовлетворяет условиям компактности А. В. Скорохода [10] (гл. 1, § 6). Значит, для любой последовательности $T_{n_1}\to\infty$ существуют такая подпоследовательность $T_n\to$ $\to\infty$, вероятностное пространство и случайный процесс $(\tilde\xi^{T_n}(u,x,s),\tilde\zeta^{T_n}(u,$ $x,s))$, определенный на этом вероятностном пространстве, такой, что конечномерные распределения $(\tilde\xi^{T_n}(u,x,s),\tilde\zeta^{T_n}(u,x,s)$ совпадают с соответствующими конечномерными распределениями процесса $(\xi^{T_n}(u,x,s),\zeta^{T_n}(u,x,$ $s)$ и $(\tilde\xi^{T_n}(u,x,s)\to\tilde\xi(u,x,s)$, $\tilde\zeta^{T_n}(u,x,s)\to\tilde\zeta(u,x,s)$ по вероятности при $T_n\to\infty$, где $\tilde\xi(u,x,s)$, $\tilde\zeta(u,x,s)$ — некоторые случайные процессы. Так как согласно теореме Колмогорова [11] (гл. 3, § 5) процессы $\xi^{T_n}(u,x,s)$, $\tilde\xi^{T_n}(u,x,s)$ непрерывны по s, а функции $b_i(s,x)$ ограничены и непрерывны по s, то в силу совпадения соответствующих конечномерных распределений аналогично тому, как это сделано в [12] (гл. 2, § 6), можно показать, что $\tilde\xi_i^{T_n}(u,x,s)=x_i+\int\limits_u^s b_i^{T_n}(\tau,\tilde\xi^{T_n}(u,x,\tau))\,d\tau+\tilde\zeta_i^{T_n}(u,x,s)$, $i=\overline{1,d}$. Таким образом, можно считать, что для любой последовательности $T_{n_1}\to\infty$ существует такая подпоследовательность $T_n\to\infty$, что $\xi^{T_n}(u,x,s)\to\eta(u,x,s)$, $\zeta^{T_n}(u,x,s)\to\zeta(u,x,s)$ по вероятности при $T_n\to\infty$. Для матричной характеристики мартингала $\zeta^{T_n}(u,x,s)$ выполняется соотношение

$$\int\limits_u^s a_{ij}^{T_n}(\tau,\xi^{T_n}(u,x,\tau)\,d\tau\to\int\limits_u^s\bar a_{ij}(\eta(u,x,\tau))\,d\tau$$

по вероятности при $T_n\to\infty$. Действительно, из условия е) и лемм 1 и 2 следует

$$\lim_{T_n\to\infty} M\int\limits_u^s|a_{ij}^{T_n}(\tau,\xi^{T_n}(u,x,\tau))-\bar a_{ij}(\xi^{T_n}(u,x,\tau))|\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{T_n\to\infty}\left\{M\int\limits_u^s g_0(|\xi^{T_n}(u,x,\tau)|\,T_n^{1/2})\,d\tau+\sum_{i=1}^d M\int\limits_u^s g_i(|\xi_i^{T_n}(u,x,\tau)\,T_n^{1/2})\,d\tau\right\}=0.$$

Так как в силу леммы 3

$$\int_u^s P\left\{\left|\sum_{i=1}^d \alpha_i^{(k)}\eta_i(u, x, \tau)\right| = 0\right\} d\tau = 0$$

для всех $k = \overline{1, n}$, а вне указанных гиперплоскостей функции $\overline{a}_{ij}(x)$ непрерывны, то

$$\int_u^s \overline{a}_{ij}(\xi^{T_n}(u, x, \tau))\, d\tau \to \int_u^s \overline{a}_{ij}(\eta(u, x, \tau))\, d\tau$$

по вероятности при $T_n \to \infty$. Далее, согласно лемме 1 для всех $i = \overline{1, d}$ $\lim\limits_{T_n\to\infty} M\int_u^s b_i^{T_n}(\tau, \xi^{T_n}(u, x, \tau))\, d\tau = 0$. Значит $\eta(u, x, s) = x + \zeta(u, x, s)$, где $\zeta(u, x, s)$ — мартингал с матричной характеристикой

$$\langle \zeta_i(u, x, s), \zeta_j(u, x, s)\rangle = \int_u^s \overline{a}_{ij}(\eta(u, x, \tau))\, d\tau.$$

В силу [6] (гл. 1, § 3) существует такой винеровский процесс $\overline{w}(s) = \{\overline{w}_k(s),\ k = \overline{1, d}\}$, что

$$\zeta_i(u, x, s) = \sum_{k=1}^d \int_u^s \overline{\sigma}_{ik}(\eta(u, x, \tau))\, d\overline{w}_k(\tau), \quad i = \overline{1, d},$$

где $\overline{A}^{1/2}(x) = \{\overline{\sigma}_{ik}(x)\}$, $i, k = \overline{1, d}$.

Следовательно, процесс $\eta(u, x, s)$ удовлетворяет стохастическому уравнению (9). Далее, для выбранной подпоследовательности $T_n \to \infty$ имеем

$$M\left|\int_u^t c^{T_n}(s, \xi^{T_n}(u, x, s))\, ds - \int_u^t \overline{c}(\eta(u, x, s))\, ds\right| \leqslant M\left[\int_u^t |c^{T_n}(s, \xi^{T_n}(u, x, s)) -\right.$$

$$\left. - \overline{c}(\xi^{T_n}(u, x, s))|\, ds + \int_u^t |\overline{c}(\xi^{T_n}(u, x, s)) - \overline{c}(\eta(u, x, s))|\, ds\right] \leqslant$$

$$\leqslant M\int_u^t g_0(|\xi^{T_n}(u, x, s)|\, T_n^{1/2})\, ds + \sum_{i=1}^d M\int_u^t g_i(|\xi_i^{T_n}(u, x, s)|\, T_n^{1/2})\, ds +$$

$$+ M\int_u^t |\overline{c}(\xi^{T_n}(u, x, s)) - \overline{c}(\eta(u, x, s))|\, ds.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям из лемм 1 — 3 следует

$$\lim_{T_n\to\infty} M\left|\int_u^t c^{T_n}(s, \xi^{T_n}(u, x, s))\, ds - \int_u^t \overline{c}(\eta(u, x, s))\, ds\right| = 0.$$

В силу слабой единственности решения стохастического уравнения (9) пределы $\lim\limits_{T_n\to\infty} V_{T_n}(u, x) = V(u, x)$ для разных последовательностей $T_n \to \infty$ будут совпадать. Теорема доказана.

Следствие. *Если выполняются условия теоремы, $F(x) \in C^1(R^d)$, функции $\overline{a}_{ij}(x)$ и $\overline{c}(x)$ терпят разрыв первого рода только на гиперплоскости $\gamma = \left\{x \in R^d : \sum_{i=1}^d \alpha_i x_i = 0\right\}$, а в областях $D_1 = \left\{x \in R^d : \sum_{i=1}^d \alpha_i x_i \leqslant 0\right\}$, $D_2 = \left\{x \in R^d : \sum_{i=1}^d \alpha_i x_i \geqslant 0\right\}$ функции $\overline{a}(x)$, $\overline{c}(x)$, $F''(x)$ ограничены и удовлетворяют условию Гельдера, то решение задачи Коши (1), (2) сходится при*

$T \to \infty$ *к решению задачи*

$$\frac{\partial}{\partial u} V(u, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \bar{a}_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} V(u, x) + \bar{c}(x) V(u, x) = 0,$$

$$x \in R^d \setminus \gamma, \quad u \in [0, t),$$

$$\lim_{u \uparrow t} V(u, x) = F(x),$$

$$V_1(u, x) = V_2(u, x), \quad \frac{\partial}{\partial x_k} V_1(u, x) = \frac{\partial}{\partial x_k} V_2(u, x), \quad x \in \gamma, \quad u \in [0, t), \quad k = \overline{1, d},$$

где $V_i(u, x) = V(u, x),\ x \in D_i,\ u \in [0, t),\ i = 1, 2.$

Это утверждение следует из доказательства теоремы и того, что функция

$$V(u, x) = M\left[F(\eta((u, x, t)) \exp\left\{\int_u^t \bar{c}(\eta(u, x, s)\, ds\right\}\right]$$

будет единственным ограниченным решением указанной задачи [13].

1. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* О G-сходимости параболических операторов // Успехи мат. наук.— 1981.— **36**, вып. 1.— С. 11—58.
2. *Хасьминский Р. З.* О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией // Теория вероятностей и ее применения.— 1963.— 8, вып. 1.— С. 3—25.
3. *Вентцель А. А., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений.— М. : Наука, 1979.— 424 с.
4. *Борисенко А. Д.* Об асимптотическом поведении решения задачи Коши для параболического уравнения // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1977.— Вып. 17.— С. С. 23—28.
5. *Борисенко А. Д.* Асимптотическое поведение решения задачи Коши для уравнения параболического типа // Там же.— 1979.— Вып. 20.— С. 25—30.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М. : Наука, 1975.— Т. 3.— 496 с.
7. *Кулинич Г. Л.* О предельном поведении решений стохастических дифференциальных уравнений диффузионного типа со случайными коэффициентеми // Предельные теоремы для случайных процессов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1977.— С. 137—151.
8. *Friedman A.* Stochastic differential equations and applications.— New York etc : Acad. press, 1975.— V. 1.— 228 p.
9. *Дынкин Е. Б.* Функционалы от траекторий марковских случайных процессов // Докл. АН СССР.— 1955.— **104**, № 5.— С. 691—694.
10. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов.— Киев : Изд-во Киев. ун-та, 1961.— 216 с.
11. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М. : Наука, 1971.— Т. 1.— 664 с.
12. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа.— М. : Наука, 1977.— 398 с.
13. *Борисенко А. Д.* Распределение аддитивного функционала от диффузионного процесса // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1983.— Вып. 28.— С. 5—9.

Киев. ун-т — Получено 11.07.86