УДК 519.21

Н. В. Крылов

Супермартингальная характеризация множества стохастических интегралов

1. Хорошо известна мартингальная характеризация винеровского процесса, данная П. Леви. Дж. Дуб [1] распространил ее на решения одномерных стохастических уравнений, Струк и Варадан [2] рассмотрели многомерный случай и поставили мартингальную характеризацию в центр внимания многих исследователей. Одним из преимуществ мартингальной характеризации решений стохастических уравнений является удобство предельного перехода, если последовательность коэффициентов уравнений сходится. В теории управляемых диффузионных процессов возникает, однако, задача об описании процесса, являющегося предельным для решений стохастических уравнений, когда про сходимость коэффициентов ничего не известно. В этом случае мы предлагаем пользоваться супермартингальной характеризацией, вводимой в этой статье. Эта характеризация совпадает с мартингальной, если множества $A_t(y_\cdot)$ (см. ниже) одноточечны, и ее, например, легко можно использовать для доказательства того, что последовательность распределений семимартингалов общего вида в качестве предела имеет распределение стохастического интеграла. При этом нет необходимости предполагать сходимость соответствующих триплетов, так что можно исследовать, так сказать, зоны притяжения распределений семимартингалов.

В теории дифференциальных эллиптических уравнений также возникают задачи об исследовании пределов решений последовательности уравнений, когда о сходимости их коэффициентов ничего не известно. Настоящая статья является изложением на вероятностном языке соответствующих результатов автора [3, 4].

2. Пусть E_d — евклидово d-мерное пространство с фиксированным ортонормированным базисом, $T \in (0, \infty)$, $C = C([0, T], E_d)$ — пространство всех непрерывных функций $y.$ на $[0, T]$ со значениями в E_d, y_t — значение $y.$ в точке t, N_t — наименьшая σ-алгебра в C, относительно которой измеримы все величины y_s при $s \leqslant t$. Пусть для всяких $t \in [0, T]$, $y. \in C$ определено множество $A_t(y.)$, элементами которого являются наборы (a, b), где $a = (a^{ij})$ — симметричная неотрицательная матрица размера $d \times d$, $b = (b^i) \in E_d$. Предполагается, что для всяких t, $y.$ множество $A_t(y.)$ как подмножество E_{d_1} при $d_1 = d^2 + d$ является выпуклым, замкнутым, а множество $A = \overline{\mathrm{co}} \bigcup\limits_{t, y.} A_t(y.)$ — ограниченным.

Обозначим

$$F_t(u_{ij}, u_i, y.) = \sup\left\{\sum_{i,j=1}^d a^{ij}u_{ij} + \sum_{i=1}^d b^i u_i : (a, b) \in A_t(y.)\right\},$$

$$F(u_{ij}, u_i) = \sup\left\{\sum_{i,j=1}^d a^{ij}u_{ij} + \sum_{i=1}^d b^i u_i : (a, b) \in A\right\}.$$

Будем считать, что функция $F_t(u_{ij}, u_i, y.)$ N_t-измерима по $y.$ при каждых $t \in [0, T]$, $(u_{ij}, u_i) \in E_{d_1}$ и измерима относительно $(t, y.)$ при любых $(u_{ij}, u_i) \in E_{d_1}$.

Обозначим через $C_0^\infty(E_d)$ множество всех бесконечно дифференцируемых действительных функций $u(x)$, $x \in E_d$, каждая из которых обращается в нуль не вне некоторого компакта, лежащего в E_d.

Теорема. *Пусть на полном вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *при* $t \in [0, T]$ *определен сепарабельный измеримый процесс* $x_t = x_t(\omega)$ *со значениями в* E_d *такой, что при всех* $n = 1, 2, \ldots, 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, u, $f_1, \ldots, f_n \in C_0^\infty(E_d)$, $f_i \geqslant 0$, *выполнено неравенство*

$$Mf_1(x_{t_1}) \ldots f_n(x_{t_n})(u(x_t) - u(x_s)) \leqslant Mf_1(x_{t_1}) \cdot \ldots \cdot f_n(x_{t_n}) \int_s^t F(u_{x^i x^j}(x_r), u_{x^i}(x_r))\, dr. \tag{1}$$

Тогда процесс x_t *непрерывен по* t *(п. н.) и на* $[0, T] \times C$ *существует измеримая функция* $(a_t(y.), b_t(y.))$ *со значениями в* A, N_t*-измеримая по* $y.$ *при всяком* $t \in [0, T]$, *и, кроме того, на некотором расширении пространства* (Ω, F, P) *существует* d*-мерный винеровский процесс* w_t *такой, что при всех* $s \in [0, T]$ *процессы* x_t *на* $[0, s]$ *и* $w_t - w_s$ *на* $[s, T]$ *независимы и при* $t \in [0, T]$

$$x_t = x_0 + \int_0^t \sqrt{a_r(x.)}\, dw_r + \int_0^t b_r(x.)\, dr \quad п. н. \tag{2}$$

Кроме того, если в неравенстве (1) *можно заменить* F *на*

$$F_r(u_{x^i x^j}(x_r), u_{x^i}(x_r), x.), \tag{3}$$

то $(a_t(x.), b_t(x.)) \in A_t(x.)$ *при почти всех* (t, ω).

Из этой теоремы и формулы Ито, применяемой к $u(x_t^n) - u(x_s^n)$, вытекает такое следствие.

Следствие. *Пусть при* $n = 1, 2, \ldots$ *на некоторых вероятностных пространствах* $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$ *определены* d*-мерные процессы* x_t^n, *имеющие стохастический дифференциал Ито по отношению к некоторому винеровскому процессу* $w_t^n : dx_t^n = \sigma_t^n dw_t^n + b_t^n dt$, причем $x_0^n = 0$, $(\sigma_t^n, \sigma_t^{n*}, b_t^n) \in A$ *(п. в.* t, ω). *Тогда последовательность распределений* $x_\cdot^n$ *в* C *слабо ком-*

пактна и любая предельная точка этой последовательности является распределением некоторого решения уравнения (2) *с* $x_0 = 0$ *и с* $(a_t(x.), b_t(x.)) \in A$ (*п. в.* t, ω).

Доказательство теоремы разобьем на несколько шагов.

1. В точности так же, как в доказательстве леммы 5 [5], устанавливается существование постоянной N такой, что при всех $s, t \in [0, T]$ выполнено неравенство $M|x - x_s|^4 \leqslant N|t - s|^2$. По теореме Колмогорова отсюда вытекает, что процесс x_t имеет непрерывные траектории (п. н.). В оставшейся части доказательства мы рассматриваем случай, когда неравенство (1) выполняется при замене F на выражение (3). Это не ограничивает общности, так как случай $A_t(x.) \equiv A$ не исключается.

2. Введем следующие пространства действительных функций на $[0, T] \times C \times E_d$. Пусть $C^{1,2}$ — множество всех ограниченных функций $u(t, y., x)$, N_t-измеримых по $y.$ при всяких t, x, имеющих первые производные по (t, x) и вторые производные по x, непрерывные по (t, x) при всяком $y.$ и ограниченные по $(t, y., x)$. Пусть $\mathscr{L}_2$ — множество всех функций $u(t, y., x)$, N_t-измеримых по $y.$ при всяких t, x и измеримых по $(t, x., y)$, для которых

$$M \int_0^T \int_{E_d} |u(t, x.(\omega), x)|^2 \, dt dx < \infty. \tag{4}$$

Пространство $\mathscr{L}_2$ естественно рассматривать как гильбертово пространство, а левую часть (4) естественно взять за квадрат нормы u.

3. Заметим, что если $u \in C^{1,2}$, то

$$M[u(T, x., x_T) - u(0, x., 0)] \leqslant \int_0^T M\left\{\frac{\partial u}{\partial t}(t, x., x_t) + \right.$$

$$\left. + F_t(u_{x^i x^j}(t, x., x_t), u_{x^i}(t, x., x_t), x.)\right\} dt. \tag{5}$$

В самом деле, из (1) с помощью свойств условных ожиданий легко выводится, что при любых $s \leqslant t \leqslant T$ (для простоты записи здесь и ниже аргумент $x.$ опускаем)

$$M[u(t, x_t) - u(s, x_s)] = M[u(t, x_t) - u(s, x_t)] + M[u(s, x_t) - u(s, x_s)] \leqslant$$

$$\leqslant \int_s^t M\frac{\partial u}{\partial t}(r, x_t)\, dr + \int_s^t MF_r(u_{x^i x^j}(s, x_r), u_{x^i}(s, x_r))\, dr. \tag{6}$$

Аналогичное неравенство справедливо для первого выражения в (6), взятого с обратным знаком. Отсюда видно, что $Mu(t, x_t)$ — абсолютно непрерывная функция от t и ее производная по t не превышает подынтегрального выражения в (5).

4. Возьмем неотрицательную $\zeta \in C_0^\infty(E_1)$ так, чтобы $\zeta(t) = 0$ при $t \leqslant 0$, $\int \zeta dt = 1$ и при $\gamma > 0$ обозначим $\zeta_\gamma(t, x) = \gamma^{-d-1}\zeta\left(\frac{t}{\gamma}\right)\prod_{i=1}^d \zeta\left(\frac{x^i}{\gamma}\right)$.

Считая, что все функции из $\mathscr{L}_2$ продолжены нулем при $t < 0$, определим на $\mathscr{L}_2$ оператор T_γ по формуле $(T_\gamma u)(t, y., x) = \int u(t - s, y., x - z)\zeta_\gamma(s, z)\, dsdz$, $t \leqslant T$. Из известных свойств сверток вытекает, что оператор T_γ переводит $\mathscr{L}_2$ в $\mathscr{L}_2$ и его норма не превышает единицу. Кроме того, функция $T_\gamma u$, как функция от t, x, бесконечно дифференцируема при всяком $y.$ и

$$\sup_{t \leqslant T} M\left[\left|\frac{\partial}{\partial t} T_\gamma u\right| + \sum_{i,j=1}^d |(T_\gamma u)_{x^i x^j}| + \sum_{i=1}^d |(T_\gamma u)_{x^i}| + |T_\gamma u|\right](t, x., x_t) \leqslant$$

$$\leqslant N\|u\|_{\mathscr{L}_2}, \tag{7}$$

где N не зависит от u. Наконец, неравенство (5) сохранится, если в нем u заменить на $T_\gamma u$ и при любом $u \in \mathcal{L}_2$. Это вытекает из (7) и возможности приблизить u в $\mathcal{L}_2$ ограниченными функциями.

5. При фиксированном $\gamma > 0$ обозначим через K_γ множество всех линейных непрерывных функционалов l на $\mathcal{L}_2$ вида

$$l(u) = MT_\gamma u(T, x_T) - M\int_0^T LT_\gamma u(t, x_t)\,dt,$$

где

$$Lv(t, x_t) = Lv(t, x_., x_t) = \frac{\partial v}{\partial t}(t, x_., x_t) + \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(t, x_.)\, v_{x^i x^j}(t, x_., x_t) + \\ + \sum_{i=1}^{d} b^i(t, x_.)\, v_{x^i}(t, x_., x_t),$$

причем набор $(a, b)(t, y_.)$ измерим по $(t, y_.)$, N_t-измерим по $y_.$ при каждых t, $(a, b)(t, x_.) \in A_t(x_.)$ при почти всех (t, ω), $(a, b) \in A$ при всех $t, y_.$.

Понятно, что множество K_γ выпукло и ограничено. Покажем, что оно слабо замкнуто. Пусть $l_n \in K_\gamma$ и $l_n \to l$ на $\mathcal{L}_2$ при $n \to \infty$. Обозначим через L_n операторы, отвечающие l_n, через a_n, b_n коэффициенты L_n. Функции $(a_n, b_n)(t, x_.)$ равномерно ограничены, поэтому их нормы в $\mathcal{L}_2$ ограничены и по теореме Банаха — Сакса найдется подпоследовательность номеров $n_k \to \infty$, по которой средние арифметические $(a_{n_k}, b_{n_k})(t, x_.)$ сходятся сильно в $\mathcal{L}_2$. Не ограничивая общности, будем считать, что $n_k = k$. По некоторой подпоследовательности $m_k \to \infty$ эти средние сходятся при почти всех (t, ω).

Обозначим

$$(a, b)(t, y_.) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_k} \sum_{i=1}^{m_k} (a_i, b_i)(t, y_.) \tag{8}$$

при тех $(t, y_.)$, при которых правая часть (8) имеет смысл, а для остальных $(t, y_.)$ положим (a, b) равным фиксированному элементу из A. Ясно, что (a, b) измеримо по $(t, y_.)$, N_t-измеримо по $y_.$ при каждых t. Кроме того, равенство в (8) будет иметь место почти всюду по (t, ω), если в нем $y_.$ заменить на $x_.(\omega)$ и $(a, b)(t, x_.) \in A_t(x_.)$ при почти всех t, ω в силу выпуклости и замкнутости $A_t(y_.)$. Из этих рассуждений непосредственно следует, что предельный функционал l имеет нужный вид и $l \in K_\gamma$.

6. Заметим, что при любых $\gamma > 0$, $u \in \mathcal{L}_2$ имеем

$$\min_{l\in K_\gamma} l(u) = MT_\gamma u(T, x_T) - M\int_0^T \left[\frac{\partial T_\gamma u}{\partial t} + F_t(T_\gamma u_{x^i x^j}, T_\gamma u_{x^i})\right](t, x_t)\,dt \leqslant 0. \tag{9}$$

В самом деле, неравенство отмечено в п. 4. Для доказательства равенства заметим, что минимум в (9) достигается в силу слабой замкнутости K_γ, и в $E_{d_1} = \{(a, b)\}$ выберем счетное всюду плотное подмножество $\{(a_r, b_r\}, r = 1, 2, \ldots\}$ и на $[0, T] \times C$ при $r = 1, 2, \ldots$ определим функцию $(a_r, b_r)(t, y_.)$, полагая ее равной ближайшей к (a_r, b_r) точке множества $A_t(y_.)$. В силу замкнутости, выпуклости и измеримости $A_t(y_.)$ функции $(a_r, b_r)(t, y_.)$ корректно определены и подходящим образом измеримы. Как нетрудно видеть, для любых $t \in [0, T]$, $y_. \in C$, $x \in E_d$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{s\leqslant n} \Big(\sum_{i,j=1}^{d} a_r^{ij}(t, y_.)\, T_\gamma u_{x^i x^j}(t, y_., x) + \sum_{i=1}^{d} b_r^i(t, y_.)\, T_\gamma u_{x^i}(t, y_., x)\Big) = \\ = \sup_r \Big(\sum_{i,j=1}^{d} a_r^{ij}(t, y_.)\, T_\gamma u_{x^i x^j}(t, y_., x) + \sum_{i=1}^{d} b_r^i(t, y_.)\, T_\gamma u_{x^i}(t, y_., x)\Big) = \\ = F_t(T_\gamma u_{x^i x^j}(t, y_., x), T_\gamma u_{x^i}(t, y_., x), y_.). \tag{10}$$

Поскольку максимум конечного числа измеримых функций легко реализовать с помощью измеримого задания номера, то отсюда следует существование измеримых функций $(\tilde{a}_n(t, y.), \tilde{b}_n(t, y.))$, принимающих значения в $A_t(y.)$, N_t-измеримых по $y.$, при всяких t и таких, что $\sum_{i,j=1}^{d} \tilde{a}_n^{ij}(t, y.) T_\gamma u_{x^i x^j}(t, y., y_t) + \sum_{i=1}^{d} \tilde{b}_n^i(t, y.) T_\gamma u_{x^i}(t, y., y_t)$ стремится к последнему выражению в (10) при всех $t \in [0, T]$, $y. \in C$, $x = y_t$. В частности,

$$\lim_{n\to\infty} M \int_0^T \Big[\sum_{i,j=1}^{d} \tilde{a}_n^{ij}(t) T_\gamma u_{x^i x^j}(t, x_t) + \sum_{i=1}^{d} \tilde{b}_n^i(t) T_\gamma u_{x^i}(t, x_t) \Big] dt =$$

$$= M \int_0^T F_t(T_\gamma u_{x^i x^j}, T_\gamma u_{x^i})(t, x_t)\, dt.$$

Это показывает, что первое выражение в (9) не больше второго. Так как обратное неравенство очевидно, то (9) доказано.

7. В рефлексивном пространстве $\mathcal{L}_2$ единичная сфера слабо компактна, K_γ слабо компактно, функция $l(u)$ слабо непрерывна по l и по u и из (9) по теореме Фань Цзы вытекает

$$0 \geqslant \max_{\|u\| \leqslant 1} \min_{l \in K_\gamma} l(u) = \min_{l \in K_\gamma} \max_{\|u\| \leqslant 1} l(u) = \max_{\|u\| \leqslant 1} l_\gamma(u),$$

где $l_\gamma \in K_\gamma$. Стало быть, $l_\gamma(u) \leqslant 0$ при $\|u\| \leqslant 1$. Из-за линейности l_γ отсюда получаем $l_\gamma(u) = 0$ при всех $u \in \mathcal{L}_2$.

8. Пусть L_γ — операторы, отвечающие l_γ. Рассуждая как в п. 5 и рассматривая слабые пределы коэффициентов операторов L_γ при $\gamma \downarrow 0$, легко построить ограниченную A-значную функцию $(a, b)(t, y.)$ так, чтобы она была измерима по $(t, y.)$, N_t-измерима по $y.$ при всяких t, чтобы $(a, b)(t, x.) \in A_t(x.)$ при почти всех (t, ω) и чтобы

$$Mu(T, x_T) = M \int_0^T \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij} u_{x^i x^j} + \sum_{i=1}^{d} b^i u_{x^i} \right](t, x_t)\, dt + Mu(0, x_0) \qquad (11)$$

для всех $u \in C^{1,2}$, равных нулю при $t = 0$. Подставляя сюда $u(t, y., x)\eta_n(t)$ вместо u, где $\eta_n(t) = \eta(nt)$, η бесконечно дифференцируема, $\eta(t) = 1$ при $t \geqslant 1$, $\eta(t) = 0$ при $t \leqslant 0$, $\eta' \geqslant 0$, и замечая, что $\eta_n(t) \to 1$ при $t > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} M \int_0^T \eta_n'(t) u(t, x_t)\, dt = \lim_{n\to\infty} M \int_0^{1/n} \eta_n'(t) u(t, x_t)\, dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} Mu(0, x_0) \int_0^{1/n} \eta_n'(t)\, dt = Mu(0, x_0)$$

в силу непрерывности $u(t, y., x)$, получаем равенство (11) для всех $u \in C^{1,2}$.

9. Пусть $\tau(y.)$ — марковский момент относительно N_t, $\tau \leqslant T$, действительная функция $u(x)$ определена на E_d, дважды непрерывно дифференцируема по x и ограничена вместе с производными до второго порядка включительно. Возьмем η_n из предыдущего пункта и положим $u_n(t, y., x) = u(x)(1 - \eta_n(1 - \tau(y.)))$. Множество $\{y. : \eta_n(t - \tau(y.)) < c\}$ для любой постоянной c, если оно непусто, можно записать в виде $\{y. : t - \tau(y.) < h\}$, где $h \geqslant 0$. Отсюда видно, что u_n N_t-измерима по $y.$. Из (11) получаем

$$Mu(x_0) = \lim_{n\to\infty} M \Big\{ u(x_T)(1 - \eta_n(T - \tau)) - \int_0^T (1 - \eta_n(t - \tau)) \times$$

$$\times \Big[\sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(t) u_{x^i x^j}(x_t) + \sum_{i=1}^{d} b^i(t) u_{x^i}(x_t) \Big] dt + \int_0^T \eta_n'(t - \tau) u(x_t)\, dt \Big\} =$$

$$= M\left\{u(x_\tau) - \int_0^\tau \Big[\sum_{i,j=1}^d a^{ij}(t)\, u_{x^i x^j}(x_t) + \sum_{i=1}^d b^i(t)\, u_{x^i}(x_t)\Big]\, dt\right\}. \qquad (12)$$

10. Поскольку равенство между крайними членами в (12) верно для любого марковского момента $\tau \leqslant T$, то процесс

$$u(x_t) - \int_0^t \Big[\sum_{i,j=1}^d a^{ij}(s, x.)\, u_{x^i x^j}(x_s) + \sum_{i=1}^d b^i(s, x.)\, u_{x^i}(x_s)\Big]\, ds, \quad t \leqslant T,$$

является мартингалом и утверждение теоремы вытекает из теоремы Дуба — Струка — Варадана.

1. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы.— М. : Изд-во иностр. лит., 1956.— 606 с.
2. *Stroock D. W., Varadhan S. R. S.* Multidimensional diffusion processes.— Berlin etc. Springer, 1979.— 338 p.
3. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические параболические уравнения второго порядка.— М. : Наука, 1985.— 376 с.
4. *Крылов Н. В.* О *G*-сходимости эллиптических операторов в недивергентной форме // Мат. заметки.— 1985.— **37**, № 4.— С. 522—527.
5. *Крылов Н. В.* О выделении марковского процесса из марковской системы процессов и построении квазидиффузионных процессов // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1973.— **37**, № 3.— С. 691—708.

Моск. ун-т Получено 11.06.86