УДК 513.88

О. Г. Сторож

Аккретивные операторы, родственные положительно определенному

В настоящей работе применяются следующие обозначения: $D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ — соответственно область определения, область значений и многообразие нулей (линейного) оператора T; $[H_1, H_2]$ — множество линейных непрерывных операторов $T: H_1 \to H_2$ (H_1, H_2 — гильбертовы пространства) таких, что $D(T) = H_1$; $[H_1] = [H_1, H_1]$, 1_H — тождественное преобразование множества H.

1. Пусть L_F — фридрихсовское расширение замкнутого плотно заданного положительно определенного оператора L_0 в гильбертовом пространстве H, $L = L_0^*$ а $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — позитивное пространство граничных значений оператора L_0 [1, 2] такое, что $D(L_F) = \ker \Gamma_2$. Далее, пусть Φ —

конечномерный оператор из $[H, \mathcal{H}]$, C_i, $A_{ij} \in [\mathcal{H}]$, $\Phi_i = C_i\Phi$, $i, j = 1, 2$, P (P_2) — ортопроектор $\mathcal{H}^2 \to \mathcal{H} \oplus R(\Phi)$ $(\mathcal{H}^2 \to \mathcal{H} \oplus R(\Phi_2))$,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathscr{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1_{\mathcal{H}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем предполагается, что $A = P_2\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{-1} \in [\mathcal{H}^2]$. Известно [3], что при сделанных предположениях оператор S, определяемый соотношениями

$$D(S) = \{y \in D(L) : A_{11}\Gamma_1 y + A_{12}\Gamma_2 y = \Phi_1 y\}, \tag{1}$$

$$Sy = Ly + \Phi_2^*(A_{21}\Gamma_1 y + A_{22}\Gamma_2 y), \quad y \in D(S), \tag{2}$$

замкнут и плотно задан. В частности, если $\dim D(L)/D(L_0) < \infty$, то S является родственным в смысле [4] паре (L, L_0).

В настоящей статье установлены условия максимальной неотрицательности и максимальной θ-аккретивности $(\theta \in [-\pi/2, \pi/2])$ оператора (1), (2). Линейный оператор $T : H \to H$, следуя работам [1, 2, 5], называем θ-аккретивным, если для всякого $y \in D(T)$ $\arg(Ty|y) \in [\theta - \pi/2, \theta + \pi/2]$, и максимально аккретивным, если, кроме того, он не имеет в H нетривиальных θ-аккретивных расширений; 0-аккретивный оператор называем аккретивным.

Применяя наш основчой результат при $C_1 = 0$, получаем условия максимальной θ-аккретивности одного класса расширений оператора L_0, а при $C_2 = 0$ — одного класса сужений оператора L. В частности, при $C_1 = C_2 = 0$ этот результат представляет собой теорему об общем виде собственного (т. е. являющегося сужением оператора L) максимально θ-аккретивного (неотрицательного) расширения оператора L_0 (ср. следствие 4 с соответствующими утверждениями работ [1, 2, 5]).

2. Известно [6, 7], что S максимально θ-аккретивен (максимально неотрицателен) тогда и только тогда, когда S^* максимально $(-\theta)$-аккретивен (максимально неотрицателен). Поэтому рассмотрим сначала условия $(-\theta)$-аккретивности и неотрицательности оператора S^*.

Напомним [3], что существуют линейные операторы $\tilde{\mathcal{U}}_i : D(L) \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, такие, что $\ker \tilde{\mathcal{U}} = D(L_0)$, $R(\tilde{\mathcal{U}}) = \mathcal{H}^2$ (где $\tilde{\mathcal{U}}z = (\tilde{\mathcal{U}}_1 z, \tilde{\mathcal{U}}_2 z)$ и

$$D(S^*) = \{z \in D(L) : \tilde{\mathcal{U}}_1 z = \Phi_2 z\}, \tag{3}$$

$$S^* z = Lz + \Phi_1^* \tilde{\mathcal{U}}_2 z, \quad z \in D(S^*). \tag{4}$$

Далее, из результатов, изложенных в [3], в частности из (3), (4) вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Элемент $z \leqslant D(L)$ принадлежит $D(S^*)$ тогда и только тогда, когда при некоторых $h_1 \in \mathcal{H}$, $h_2 \in R(\Phi)$*

$$\Gamma_1 z = -(A_{12}^* h_1 + A_{22}^* C_2 h_2), \quad \Gamma_2 z = A_{11}^* h_1 + A_{21}' C_2 h_2, \quad \Phi z = -h_2. \tag{5}$$

При этом $h_1 = \tilde{\mathcal{U}}_2 z$.

Обозначим через D_h, где $h = (h_1, h_2)$, множество тех $z \in D(L)$, для которых выполняются соотношения (5), через $\mathcal{P}$ — проектор $D(L) \to D(L_F)$ параллельно $\ker L$ (напомним, что $D(L) = D(L_F) \dotplus \ker L$ [8]) и положим

$$\mathcal{Y} = -P\left(\begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_2^* \end{pmatrix} A\mathscr{X}A^* \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_1^* \end{pmatrix} \mathscr{X}^* \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}\right)P. \tag{6}$$

Лемма 2. *Пусть $h \in \mathcal{H} \oplus R(\Phi)$. Для всякого $z \in D_h$*

$$(S^* z \mid z) = (L_F \mathcal{P} z \mid \mathcal{P} z) + (\mathcal{Y} h \mid h)_{\mathcal{H}^2}. \tag{7}$$

Доказательство. Так как для всякого $z \in D(L)$ $(Lz \mid z) = (L_F \mathcal{P} z \mid \mathcal{P} z) + (\Gamma_1 z \mid \Gamma_2 z)_{\mathcal{H}}$ [1, 2], то (7) вытекает из (3), (4) и леммы 1.

Положим $Z=(\Gamma_1 L_F^{-1})^*$. Так как $Z\in[\mathscr{H}, H]$, причем $R(Z)=\ker L$ и $\Gamma_2 Z=1_{\mathscr{H}}$ [3], то

$$\Gamma_1 Z=0,\quad \mathscr{P}=1_{D(L)}-Z\Gamma_2. \tag{8}$$

Далее, пусть оператор $F\in[\mathscr{H}\oplus R(\Phi),\ R(\Phi)]$ определен при $h=(h_1, h_2)$ соотношением

$$Fh=\Phi Z A_{11}^* h_1+(1_{\mathscr{H}}+\Phi Z A_{21}^* C_2)\, h_2. \tag{9}$$

Лемма 3. *$\mathscr{P}D_h=R_h$, где $R_h=\{u\in D(L_F):=\Gamma_1 u=-(A_{12}^* h_1+A_{22}^* C_2 h_2)$, $\Phi u=-Fh\}$.*

Доказательство. Включение $\mathscr{P}D_h\subset R_h$ вытекает непосредственно из (5) и (8). Обратно, пусть $u\in R_h$. Тогда для всякого $z\in D_h$ и $v=z+u-\mathscr{P}z$ имеем $v\in D_h$, $\mathscr{P}v=u$. Это опять следует из (5) и (8).

Лемма 4. *$\inf\{(L_F u\,|\,u): u\in D(L_F),\ \Phi u=a,\ \Gamma_1 u=b\}=((\Phi L_F^{-1}\Phi^*)^{-1}\times a\,|\,a)_{\mathscr{H}}$, где $\Phi L_F^{-1}\Phi^*$ рассматривается как отображение $R(\Phi)\to R(\Phi)$.*

Доказательство. Пусть H_e — пополнение $D(L_0)$ по норме $\|u\|_e=(L_0 u\,|\,u)^{1/2}$. Известно [9], что H_e — гильбертово пространство, причем $D(L_F)\subset H_e\subset H$. Нетрудно сообразить, что замыкание множества $\{u\in D(L_F):\Phi u=a,\ \Gamma_1 u=b\}$ по норме $\|\cdot\|_e$ совпадает с $\{u\in H_e:\Phi u=a\}$. Поэтому подлежащее доказательству равенство равносильно следующему:

$$\inf\{\|u\|_e^2: u\in H_e, \Phi u=a\}=((\Phi L_F^{-1}\Phi^*)^{-1} a\,|\,a)_{\mathscr{H}}.$$

Последнее вытекает из теоремы об ортогональной проекции и соотношения между многообразием нулей и областью значений взаимно сопряженных нормально разрешимых операторов. При этом следует учесть, что оператором, сопряженным к $\Phi\in[H_e, \mathscr{H}]$, является $L_F^1\Phi^*$.

Введем следующее обозначение:

$$\mathscr{F}=PF^*(\Phi L_F^{-1}\Phi^*)^{-1} FP. \tag{10}$$

Предположение 1. *Оператор S^* является $(-\theta)$-аккретивным (неотрицательным) тогда и только тогда, когда*

$$\cos\theta\cdot\mathscr{F}+\operatorname{Re}(c^{i\theta}\mathscr{Y})\geqslant 0, \tag{11}$$

соответственно

$$\mathscr{F}+\mathscr{Y}\geqslant 0, \tag{12}$$

где $\mathscr{Y}$ и $\mathscr{F}$ определены согласно (6) *и* (10).

Доказательство. Из лемм 3 и 4 следует, что $\inf\limits_{z\in D_h}(L_F\mathscr{P}z\,|\,\mathscr{P}z)=(\mathscr{F}h\,|\,h)_{\mathscr{H}}$. Так как $D(S^*)=\bigcup D_h$, где объединение берется по всем $h\in\mathscr{H}\oplus R(\Phi)$ (см. лемму 1), то справедливость предложения вытекает из (7).

Следствие 1. *Пусть*

$$D(S)=\{y\in D(L): A_{11}\Gamma_1 y+A_{12}\Gamma_2 y=0\},$$

$$Sy=Ly+\Phi^*(A_{21}\Gamma_1 y+A_{22}\Gamma_2 y),\quad y\in D(S).$$

S^* аккретивен тогда и только тогда, когда

$$P\begin{pmatrix}\mathfrak{A}_1(\Phi L_F^{-1}\Phi^*)^{-1}\mathfrak{A}_1^* & \mathfrak{A}_1(\Phi L_F^{-1}\Phi^*)^{-1}\mathfrak{A}_2^*\\ \mathfrak{A}_2(\Phi L_F^{-1}\Phi^*)^{-1}\mathfrak{A}_1^* & \mathfrak{A}_2(\Phi L_F^{-1}\Phi^*)^{-1}\mathfrak{A}_2^*\end{pmatrix}P-A\operatorname{Re}\mathscr{X}A^*\geqslant 0, \tag{13}$$

где $\mathfrak{A}_1=A_{11}(\Phi Z)^*$, $\mathfrak{A}_2=1_{\mathscr{H}}+A_{21}(\Phi Z)^*$.

Следствие 2. *Пусть $\theta\neq\pm\pi/2$.*

$$D(S)=\{y\in D(L): A_{11}\Gamma_1 y+A_{12}\Gamma_2 y=\Phi y\},\quad S\subset L. \tag{14}$$

$S^*(-\theta)$-аккретивен тогда и только тогда, когда

$$4\operatorname{Re}(e^{i\theta}A_{11}(\Phi z-A_{12})^*)\geqslant\sec\theta\cdot\Phi L_F^{-1}\Phi^*. \tag{15}$$

Следствие 3. *Пусть*

$$D(L_1) = \{y \in D(L) : A_{11}\Gamma_1 y + A_{12}\Gamma_2 y = 0\}, \quad L_1 \subset L. \tag{16}$$

L_1^* *является* $(-\theta)$*-аккретивным (неотрицательным) тогда и только тогда, когда* $-A_{11}A_{12}^*$ $(-\theta)$*-аккретивен (неотрицателен).*

Замечание 1. При доказательстве следствий 2 и 3 применяется следующий элементарный факт. Если $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства, то самосопряженный матричный оператор $B = (B_{ij})$, $B_{ij} \in [\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i]$, $i, j = 1, 2$; $B_{22} \gg 0$, является неотрицательным тогда и только тогда, когда $B_{11} \geqslant B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}$.

3. Теорема 1. *Оператор* S *является максимально* θ*-аккретивным (максимально неотрицательным) тогда и только тогда, когда выполняется* (11), *соответственно* (12) *и, кроме того,*

$$\ker (e^{-i\theta}A_{12} - A_{11}(1_{\mathcal{H}} + \cos\theta \cdot \Psi)) = \{0\}, \tag{17}$$

соответственно

$$\ker (A_{12} - A_{11}(1_{\mathcal{H}} + \Psi)) = \{0\}, \tag{18}$$

где $\Psi = (\Phi Z)^* (\Phi L_F^{-1}\Phi^*)^{-1} \Phi Z$.

Доказательство. Для простоты ограничимся доказательством критерия аккретивности оператора S. Итак, пусть имеет место (11) при $\theta = 0$. Тогда

$$(A_{12} - A_{11}(1_{\mathcal{H}} + \Psi))(A_{12} - A_{11}(1_{\mathcal{H}} + \Psi))^* - (A_{12} + A_{11}(1_{\mathcal{H}} - \Psi)) \times$$
$$\times (A_{12} + A_{11}(1_{\mathcal{H}} - \Psi))^* \geqslant 4(A_{11}\Psi A_{11}^* - \operatorname{Re}(A_{11}A_{12}^*)) \geqslant 0, \tag{19}$$

поэтому существует сжатие $K \in [\mathcal{H}]$ такое, что $A_{12} + A_{11}(1_{\mathcal{H}} - \Psi) = (A_{12} - A_{11}(1_{\mathcal{H}} + \Psi))K$. Другими словами,

$$A_{11} = C(K - 1_{\mathcal{H}}), \quad A_{12} = C(K + 1_{\mathcal{H}} + (K - 1_{\mathcal{H}})\Psi), \tag{20}$$

где $C = \frac{1}{2}(A_{12} - A_{11}(1_{\mathcal{H}} + \Psi))$.

Рассмотрим операторы L_1 и L_K, определяемые условиями соответственно (16) и $D(L_K) = \{y \in D(L) : (K - 1_{\mathcal{H}})\Gamma_1 y + (K + 1_{\mathcal{H}})\Gamma_2 y = 0\}$, $L_K \subset L$.

Так как L_K максимально аккретивен [2], а S^* аккретивен, то из теоремы об индексе родственных операторов [4] и из элементарных свойств аккретивных операторов [6, 7] следует, что S максимально аккретивен тогда и только тогда, когда $\varkappa(S, L_K) = 0$ (см. замечание 2). Но $\varkappa(S, L_1) = 0$, поэтому из (20) вытекает, что $\varkappa(S, L_K) = \varkappa(L_1, L_K) = \dim \ker C$. Таким образом, максимальная аккретивность оператора S равносильна условию $\ker C = \{0\}$, т. е. условию (17).

Замечание 2. Если линейные операторы T_1 и T_2 имеют общее конечномерное сужение T_0, то $\varkappa(T_1, T_2) \stackrel{\text{def}}{=} \dim D(T_1)/D(T_0) - \dim D(T_2)/D(T_0)$. Если, кроме того, T_1 имеет конечный индекс $\operatorname{ind} T_1$, то T_2 имеет конечный индекс $\operatorname{ind} T_2$ и $\operatorname{ind} T_2 - \operatorname{ind} T_1 = \varkappa(T_1, T_2)$ [4].

Следствие 4. *Оператор* L_1, *определяемый условиями* (16), *максимально* θ*-аккретивен, соответственно максимально неотрицателен тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Re}(e^{i\theta}A_1A_2^*) \leqslant 0$, $\ker(e^{-i\theta}A_{12} - A_{11}) = \{0\}$, *соответственно* $A_1A_2^* \leqslant 0$, $\ker(A_{12} - A_{11}) = \{0\}$.

Следствие 5. S *максимально неотрицателен тогда и только тогда, когда выполняется* (12) *и* $\ker(A_{11} \pm iA_{12}) = \{0\}$.

Доказательство следует из того, что самосопряженность оператора равносильна его максимальной диссипативности и максимальной аккумулятивности [6, 7].

С л е д с т в и е 6. *Оператор S, определяемый условием* (14), *максимально θ — аккретивен* ($\theta \neq \pm\pi/2$) *тогда и только тогда, когда имеет место* (15) *и* $\ker(e^{-i\theta}(A_{12} - \Phi Z) - A_{11}) = \{0\}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. При этом следует воспользоваться соотношением типа (19), положив в последнем $\Psi = 0$ и заменив A_{12} на $A_{12} - \Phi Z$.

З а м е ч а н и е 3. Из условий, наложенных на оператор A (см. п. 1), следует, что существует $\mathcal{A} \in [\mathcal{H}^2]$ такое, что $\mathcal{A}^{-1} \in [\mathcal{H}^2]$ и

$$\forall\, h = (h_1, h_2) \in \mathcal{H}^2 \quad A_{11}h_1 + A_{12}h_2 = P_1\mathcal{A}h, \tag{21}$$

где P_1 — ортопроектор $\mathcal{H}^2 \to \mathcal{H} \oplus \{0\}$. Это условие всюду в настоящей работе предполагается выполненным. Однако, применяя «лемму о тройке» [10], нетрудно доказать, что из справедливости следствий 3 и 4 при A_{11}, A_{12}, удовлетворяющих условию (21), вытекает, что они верны при любых A_{11}, $A_{12} \in [\mathcal{H}]$.

З а м е ч а н и е 4. Если $\dim \mathcal{H} = m < \infty$, то из (21) вытекает, что $\dim D(L)/D(S) = m$. Поэтому в данном случае условие (11) (или (12)) является не только необходимым, но и достаточным для максимальной θ-аккретивности (максимальной неотрицательности) оператора S.

4. П р и м е р. Пусть L и L_0 — максимальный и минимальный в смысле [11] операторы, порожденные в $L_2(0, \infty)$ дифференциальным выражением $l[y] = -y'' + a^2y$, $a > 0$, $\varphi \in L_2(0, \infty)$, а ψ — решение краевой задачи $Ly = \varphi$, $y(0) = 0$. Нетрудно сообразить, что (H, Γ_1, Γ_2), где $\mathcal{H} = \mathbb{C}$, $\Gamma_1 y = y'(0) + ay(0)$, $\Gamma_2 y = y(0)$, является позитивным пространством граничных значений оператора L_0, причем $D(L_F) = \ker \Gamma_2$. Отсюда, а также из следствия 1 и замечания 4 вытекает, что если $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0$, то оператор S_1, определяемый соотношениями

$$D(S_1) = \{y \in D(L) : \alpha_{11}y'(0) + \alpha_{12}y(0) = 0\},$$

$$S_1 y = l[y] + (\alpha_{21}y'(0) + \alpha_{22}y(0))\,\varphi, \quad y \in D(S_1),$$

максимально аккретивен тогда и только тогда, когда выполняется (13) при $P = 1_{\mathbb{C}^2}$, $A_{i1} = \alpha_{i1}$, $A_{i2} = \alpha_{i2} - a\alpha_{i1}$, $i = 1,2$,

$$\Phi L_F^{-1}\Phi^* = \int_0^\infty \psi(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx, \quad \Phi Z = \int_0^\infty e^{-ax}\overline{\varphi(x)}\,dx. \tag{22}$$

Далее, пусть $|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2 > 0$, $D(S_2) = \left\{y \in D(L) : \beta_1 y'(0) + \beta_2 y(0) = \int_0^\infty y(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx\right\}$, $S_2 y = l[y]$, $y \in D(S_2)$. Следствие 2 и замечание 4 показывают, что S_2 максимально аккретивен тогда и только тогда, когда $4\,\mathrm{Re}\,(\bar\beta_1(\Phi Z - \beta_2 + a\beta_1)) \geqslant \Phi L_F^{-1}\Phi^*$. В частности, необходимым и достаточным условием максимальной аккретивности оператора S_3 $\left(D(S_3) = \{y \in D(L) : y'(0) = \int_0^\infty y(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx,\ S_3 y = l[y]\right)$, а следовательно, и сопряженного ему оператора S_4 $(D(S_4) = \{y \in D(L) : y'(0) = 0\}$, $S_4 y = l[y] + y(0)\,\varphi)$ является следующее: $4\,\mathrm{Re}\,(\Phi Z) + a \geqslant \Phi L_F^{-1}\Phi^*$, где $\Phi L_F^{-1}\Phi^*$ и ΦZ определены согласно (22).

В заключение отметим, что различные задачи, связанные с аккретивными расширениями положительно определенных операторов, в частности, дифференциальных, рассматривались многими авторами (см., например, [12—14] и имеющуюся там библиографию).

1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 284 с.
2. *Кочубей А. Н.* О расширениях положительно определенного оператора // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1979.— № 3.— С. 168—171.
3. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов.— Киев : Наук. думка, 1983.— 212 с.

4. *Лянце В. Э.* О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами // Докл. АН СССР.— 1972.— **204**, № 3.— С. 542—545.
5. *Михайлец В. А.* Спектры операторов и граничные задачи // Спектральный анализ дифференциальных операторов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980.— С. 106—131.
6. *Филлипс Р. С.* Диссипативные операторы и гиперболические системы дифференциальных уравнений в частных производных // Математика.— 1962.— **6**, № 4.— С. 11—70.
7. *Штраус А. В.* О расширениях и характеристической функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1968.— **32**, № 1.— С. 186—207.
8. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов и ее приложения. I. // Мат. сб.— 1947.— **20**, № 3.— С. 431—495.
9. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.— М. : Наука, 1970.— 512 с.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1976.— 544 с.
11. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М. : Наука, 1969.— 528 с.
12. *Цекановський Е. Р.* Характеристична функція та опис акретивних і секторіальних граничних задач для звичайних диференціальних операторів // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1985.— № 6.— С. 21—24.
13. *Колманович В. Ю., Маламуд М. М.* Расширения секториальных операторов и дуальных пар сжатий.— Донецк, 1985.— 56 с.— Деп. в ВИНИТИ 21.06.85, № 4428-85.
14. *Evans W. D., Knowles I.* On the extension problem for accretive differential operators // J. Funct. Anal.— 1985.— **63**, N 3.— P. 276—298.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 08.07.86