УДК 517.51

Н. П. Корнейчук

Об оптимальном кодировании вектор-функций

1. Под оптимальным кодированием элементов метрического пространства X обычно понимают отображение элементов некоторого множества $F \subset X$ в множество конечной размерности с минимальной потерей информации. С практической точки зрения, по-видимому, наиболее важным является случай, когда элементу $x \in F$ с помощью набора (метода кодирования)

$$M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\} \tag{1}$$

непрерывных на X функционалов μ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, ставится в соответствие числовой вектор

$$T(x, M_N) = \{\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_N(x)\}, \tag{2}$$

т. е. точка в R^N. Потеря информации измеряется диаметром прообраза $T^{-1}(x, M_N)$, т. е. множества элементов $y \in F$, для которых $T(y, M_N) = T(x, M_N)$. При восстановлении по вектору (2) элемента $x \in F$ мы не можем гарантировать меньшей погрешности, чем $\operatorname{diam}_X T^{-1}(x, M_N)$.

Ставя целью за счет выбора метода кодирования минимизировать погрешность восстановления на всем множестве F, введем в рассмотрение величину

$$K(F, M_N, X) = \sup_{x \in F} \operatorname{diam}_X T^{-1}(x, M_N) = \sup\{\rho(y, z)_X : y, z \in F,$$
$$T(y, M_N) = T(z, M_N)\}, \tag{3}$$

где $\rho(y, z)_X$ — расстояние между элементами $y, z \in X$. Задача состоит в отыскании точной нижней грани

$$\gamma^N(F, X) = \inf_{M_N} K(F, M_N, X), \tag{4}$$

вычисляемой по множеству наборов (1) из N непрерывных функционалов (или по некоторому его подмножеству), а также в указании оптимального метода кодирования, т. е. набора $M_N^* = \{\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots, \mu_N^*\}$, для которого $K(F, M_N^*, X) = \gamma^N(F, X)$. Если X — линейное метрическое пространство, то наряду с $\gamma^N(F, X)$ рассматривают также величину

$$\lambda^N(F, X) = \inf_{M'_N} K(F, M'_N, X), \tag{5}$$

где нижняя грань распространена только на наборы $M'_N = \{\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_N\}$ линейных непрерывных функционалов.

В случае, когда X — функциональное пространство $C[a, b]$ или $L_p[a, b]$, известен ряд точных результатов в решении задачи оптимального кодирования [1—4]. Здесь будут рассмотрены некоторые аспекты этой задачи в пространствах векторнозначных функций $\bar{\varphi}(t) = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\}$, $a \leqslant t \leqslant b$, $m \geqslant 2$, о графиках которых будем говорить как о параметрически заданных кривых в пространстве R^m. Специфика этого случая связана, в первую очередь, с выбором метрики.

Если $r(P, Q)$ — некоторое расстояние (например, евклидово) между точками P и Q пространства R^m, то расстояние между функциями $\bar{\varphi}(t) = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\}$ и $\bar{\psi}(t) = \{\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_m(t)\}$ можно определить как верхнюю грань

$$R(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b}\{r(P(t), Q(t)) : P(t) \in \bar{\varphi}, Q(t) \in \bar{\psi}\}, \tag{6}$$

где точки $P(t)$ и $Q(t)$ соответствуют одному и тому же значению параметра t.

Расстояние (6) зависит, очевидно, от способа параметризации. Свободно от этого недостатка и лучше отражает степень геометрической близости кривых хаусдорфово расстояние, которое систематически использовал в задачах теории приближения Б. Сендов [5]. Если, как и выше, $r(P, Q)$ — расстояние между точками в R^m, то под хаусдорфовым расстоянием между множествами $A, B \subset R^m$ понимают величину

$$h(A, B) = \max\{\sup_{P \in A} \inf_{Q \in B} r(P, Q), \sup_{Q \in B} \inf_{P \in A} r(P, Q)\}. \quad (7)$$

Из определений (6) и (7) следует, что для кривых $\bar\varphi$ и $\bar\psi$ при любом способе параметризации

$$h(\bar\varphi, \bar\psi) \leqslant R(\bar\varphi, \bar\psi). \quad (8)$$

В пространстве X векторнозначных функций с метрикой (6) или (7) естественным образом вводятся алгебраические операции (через соответствующие операции координатных функций), так что его можно считать линейным метрическим пространством. В зависимости от метрики (6) или (7) обозначим его X_R или X_h. Ни метрика (6), ни метрика (7) не является транзитивной, поэтому при оценке погрешности восстановления (3) нельзя воспользоваться общими неравенствами, приведенными в предложении 1 работы [4], которые существенно облегчают получение точного решения при $m = 1$. При $m \geqslant 2$ можно исходить только из определения величины (3) и характеристик, которыми задается множество вектор-функций F; в связи с этим наши результаты не всегда будут точны.

Второй фактор, определяющий векторнозначную специфику, связан с заданием метода кодирования. Можно, конечно, задавать кодирующие функционалы μ_k на кривых. Более простой способ, позволяющий использовать одномерные результаты, идет через кодирование наборами функционалов (1) каждой из координатных функций $\varphi_i(t)$, сопоставляя кривой $\bar\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\}$ N точек в R^m. Этот случай и будет рассматриваться в статье, причем мы остановимся на технически самом простом варианте, когда каждая координатная функция $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, кодируется одним и тем же набором функционалов (1), т. е. кривой $\bar\varphi$ ставится в соответствие N точек P_k, $k = 1, 2, \ldots N$, в R^m с координатами $\{\mu_k(\varphi_1)$ $\mu_k(\varphi_2), \ldots, \mu_k(\varphi_m)\}$.

2. Рассмотрим конкретные ситуации. Оценки сверху получим, применив интерполяционный метод кодирования, когда в (1) μ_k — линейные функционалы на $C[0, 1]$, задаваемые в виде $\mu_k(f) = f(\tau_k)$, $k = 1, \ldots, N$, где τ_k — фиксированные точки отрезка $[0, 1]$. Таким образом, кривая $\bar\varphi$ кодируется N точками P_k в R^m, через которые она проходит, $P_k = P_k(\varphi_1(\tau_k), \ldots, \varphi_m(\tau_k))$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Ниже $r(P, Q)$ будет обозначать евклидово расстояние между точками P и Q в R^m.

Обозначим через H^ω множество функций $f(t) \in C[0, 1]$, удовлетворяющих условию $|f(t') - f(t'')| \leqslant \omega(|t' - t''|)$, $t', t'' \in [0, 1]$, где $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности, а через H_m^ω класс векторнозначных функций $\bar\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, у которых $\varphi_i(t) \in H^\omega$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Вопросы приближения кривых из H_m^ω различными методами исследовались рядом авторов (см., например, [6]).

Пусть для координатных функций кривых $\bar\varphi$ и $\bar\psi$ из H_m^ω выполнены равенства

$$\varphi_i(\tau_k) = \psi_i(\tau_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, N; \qquad i = 1, 2, \ldots, m;$$
$$0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_N \leqslant 1. \quad (9)$$

Если $P(t)$ и $Q(t)$ — точки соответственно кривых $\bar\varphi$ и $\bar\psi$, определяемые одним и тем же значением параметра t, то $P(\tau_k) = Q(\tau_k)$ и

$$r(P(t), Q(t)) \leqslant r(P(t), P(\tau_k)) + r(Q(\tau_k), Q(t)) = \Big(\sum_{i=1}^m [\varphi_i(t) - \varphi_i(\tau_k)]^2\Big)^{1/2} +$$

$$+\Big(\sum_{i=1}^{m}[\psi_i(t)-\psi_i(\tau_k)]^2\Big)^{1/2}\leqslant 2\sqrt{m}\,\omega(|t-\tau_k|).$$

Так как это верно для любого τ_k, то

$$r(P(t), Q(t))\leqslant 2\sqrt{m}\min_k \omega(|t-\tau_k|),\quad 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{10}$$

Оценка эта точна на классе H_m^ω, в чем легко убедиться, рассмотрев кривые $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ с координатами соответственно

$$\varphi_i(t)=-\psi_i(t)=\min_k \omega(|t-\tau_k|),\quad 0\leqslant t\leqslant 1;\qquad i=1,2,\ldots,m. \tag{11}$$

Расстояние (6) между этими кривыми зависит от выбора узлов интерполирования τ_k и имеет минимальное значение, равное $2\sqrt{m}\omega(1/(2N))$, если $\tau_k=\tau_k^0=(2k-1)/(2N)$. Таким образом, для величины (3) при $F=H_m^\omega$, когда набор $M_N=M_N^0$ кодирующих функционалов задан равенствами $\mu_k(f)=$ $=f\left(\frac{2k-1}{2N}\right)$, $k=1,2,\ldots,N$; $f\in C[0,1]$, имеем соотношение

$$K(H_m^\omega, M_N^0, X_R)=2\sqrt{m}\,\omega\left(\frac{1}{2N}\right). \tag{12}$$

В случае хаусдорфовой метрики вытекающая из (8) и (12) оценка для $K(H_m^\omega, M_N^0, X_h)$ оказывается завышенной вдвое. Действительно, если для кривых $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ из H_m^ω выполнены соотношения (9) при $\tau_k=\tau_k^0$, то для любой точки $P=P(t)$ кривой $\overline{\varphi}$ существует точка P_k с координатами $(\varphi_1\times$ $\times(\tau_k^0),\ \varphi_2(\tau_k^0),\ldots,\varphi_m(\tau_k^0))$ такая, что $|t-\tau_k^0|\leqslant 1/(2N)$. А так как точка P_k принадлежит и $\overline{\psi}$, то

$$\operatorname{dist}(P,\overline{\psi})=:\inf_{Q\in\overline{\psi}} r(P,Q)\leqslant r(P,P_k)=\Big(\sum_{i=1}^{m}[\varphi_i(t)-\varphi_i(\tau_k^0)]^2\Big)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{m}\,\omega(|t-\tau_k^0|)\leqslant\sqrt{m}\,\omega(1/(2N)). \tag{13}$$

Такую же оценку получим и для $\operatorname{dist}(Q,\overline{\varphi})$, $Q\in\overline{\psi}$, причем знак равенства везде будет иметь место для кривых с координатными функциями (11). Это значит, что

$$K(H_m^\omega, M_N^0, X_h)=\sqrt{m}\,\omega(1/(2N)). \tag{14}$$

Аналогичные результаты нетрудно получить и для несколько более широкого, чем H_m^ω, класса векторнозначных функций. Обозначим через $M\overline{H}_m^\omega$ класс кривых $\overline{\varphi}(t)=\{\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\}$, точки $P(t)$ которых удовлетворяют неравенству

$$r(P(t'),P(t''))=\Big(\sum_{i=1}^{m}[\varphi_i(t')-\varphi_i(t'')]^2\Big)^{1/2}\leqslant M\omega(|t'-t''|),\ t',t''\in[0,1], \tag{15}$$

где $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности. Для точек $P(t)$ и $Q(t)$ кривых $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ из $M\overline{H}_m^\omega$, координатные функции которых удовлетворяют соотношениям (9), те же простые рассуждения приводят к неравенству $r(P(t),$ $Q(t))\leqslant 2M\min\limits_k\omega(|t-\tau_k|,\ 0\leqslant t\leqslant 1$, точность которого проверяется на кривых $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$, у которых $\varphi_1(t)=-\psi_1(t)=M\min\limits_k\omega(|t-\tau_k|)$, $\varphi_i(t)=\psi_i(t)=$ $=0$, $i=2,3,\ldots,m$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Отсюда следует

$$K(M\overline{H}_m^\omega, M_N^0, X_R)=2\omega(1/(2N)). \tag{16}$$

В пространстве X_h с хаусдорфовой метри ой, рассуждая как и выше (см.

(13)), придем к равенству

$$K(M\overline{H}_m^\omega, M_N^0, X_h) = \omega(1/(2N)). \tag{17}$$

Заметим, что соотношения (10), (12) и (14) вытекают из (15), (16) и (17), если учесть, что $H_m^\omega \subset M\overline{H}_m^\omega$ при $M = \sqrt{m}$.

Пусть L_∞^s, $s = 1, 2, \ldots$, — множество функций $f(t)$, имеющих на отрезке $[0, 1]$ абсолютно непрерывную производную $f^{(s-1)}(t)$, причем $f^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(1)$, $\nu = 0, 1, \ldots, s-1$, и $W^s = \{f : f \in L_\infty^s, \| f^{(s)} \|_\infty \leqslant 1\}$, где $\| g \|_\infty = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} \mathrm{vrai}\, | g(t) |$. Через W_m^s будем обозначать класс векторнозначных функций $\overline{\varphi}(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\}$, у которых $\varphi_i(t) \in W^s$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Графики функций из W_m^s — замкнутые кривые в R^m.

Положим

$$\tau_{sk} = \begin{cases} k/N, \quad k = 1, 2, \ldots, N, & \text{если } s \text{ четно;} \\ (2k-1)/(2N), \quad k = 1, 2, \ldots, N, & \text{если } s \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Известно [2, с. 194], что для функции $f \in L_\infty^s$ при $N = 2n$ существует единственный сплайн $\sigma(f, t)$ такой, что $\sigma(f, \tau_{sk}) = f(\tau_{sk})$, $k = 1, 2, \ldots, N$, и

$$| f(t) - \sigma(f, t) | \leqslant \| f^{(s)} \|_\infty | \varphi_{n,s}(t) |, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{18}$$

где $\varphi_{n,s}(t)$ — функция из W^s, у которой $\varphi_{n,s}^{(s)}(t) = \mathrm{sgn}\sin 2\pi nt$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и $\varphi_{n,s}(\tau_{sk}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Линейный метод кодирования $M_{2n,s}$, задаваемый функционалами $\mu_k(f) = f(\tau_{sk})$, сопоставляет кривой $\overline{\varphi}(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\}$ $2n$ точек $P_k \in R^m$, $k = 1, \ldots, 2n$, с координатами $\varphi_i(\tau_{sk})$, $i = 1, \ldots, m$. Если кривые $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ принадлежат W_m^s и

$$\varphi_i(\tau_{sk}) = \psi_i(\tau_{sk}), \quad k = 1, 2, \ldots, 2n; \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{19}$$

то $\sigma(\varphi_i, t) \equiv \sigma(\psi_i, t)$, и для точек $P(t) \in \overline{\varphi}$ и $Q(t) \in \overline{\psi}$ имеем при любом $t \in [0, 1]$

$$r(P(t), Q(t)) \leqslant \Big(\sum_{i=1}^m [\varphi_i(t) - \sigma(\varphi_i, t)]^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^m [\psi_i(t) - \sigma(\psi_i, t)]^2\Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{m}\, | \varphi_{n,s}(t) |.$$

Оценка точная при каждом t, ибо в случае $\varphi_i(t) = -\psi_i(t) = \varphi_{n,s}(t)$ будет $\sigma(\varphi_i\, t) = \sigma(\psi_i, t) \equiv 0$. Таким образом,

$$K(W_m^s, M_{2n,s}, X_R) = 2\sqrt{m}\, \| \varphi_{n,s} \|_C = 2\sqrt{m}\mathcal{K}_s n^{-s}, \tag{20}$$

где $\mathcal{K}_s$ — известная константа Фавара.

В случае хаусдорфовой метрики с учетом (8) имеем оценку

$$K(W_m^s, M_{2n,s}, X_h) \leqslant 2\sqrt{m}\mathcal{K}_s n^{-s}, \tag{21}$$

которая, по-видимому, не является точной.

Обозначим через $M\overline{W}_m^s$ класс вектор-функций $\overline{\varphi}(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\}$, у которых $\varphi_i(t) \in L_\infty^s$ и $| \overline{\varphi}^{(s)}(t) | =: \Big(\sum\limits_{i=1}^m | \varphi_i^{(s)} |^2\Big)^{1/2} \leqslant M$; ясно, что $W_m^s \subset \sqrt{m} \times \overline{W}_m^s$. Пусть координатные функции кривых $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ удовлетворяют соотношениям (19) и $\| \varphi_i^{(s)} \|_\infty = \alpha_i$, $\| \psi_i^{(s)} \|_\infty = \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда для точек $P(t) \in \overline{\varphi}$ и $Q(t) \in \overline{\psi}$ с учетом (18) будем иметь

$$r(P(t), Q(t)) \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 |\varphi_{n,s}(t)|^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^{m} \beta_i^2 |\varphi_{n,s}(t)|^2\Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant |\varphi_{n,s}(t)| \Big[\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^{m} \beta_i^2\Big)^{1/2}\Big] \leqslant 2M |\varphi_{n,s}(t)|.$$

Оценка неулучшаема на классе $M\overline{W}_m^s$, в чем легко убедиться, рассмотрев вектор-функции $\overline{\varphi}(t)$ и $\overline{\psi}(t)$, у которых $\varphi_1(t) = -\psi_1(t) = M\varphi_{n,s}(t)$, $\varphi_i(t) = \psi_i(t) \equiv 0$, $i = 2, 3, \ldots, m$. Таким образом,

$$K(M\overline{W}_m^s, M_{2n,s}, X_h) \leqslant K(M\overline{W}_m^s, M_{2n,s}, X_R) = 2M \|\varphi_{n,s}\|_C = 2M\mathcal{K}_s n^{-s}. \quad (22)$$

Отметим, что при $m = 2$ точная оценка приближения вектор-функций $\overline{\varphi}(t) \in M\overline{W}_m^s$ интерполяционными сплайн-функциями получена в [7].

3. Соотношения для величины (3), полученные в п. 2 с использованием конкретных линейных методов кодирования, дают для величин (5) и (4), где F — соответствующий класс вектор-функций, оценку сверху. Оценивая величину (4) снизу, будем предполагать, что нижняя грань в (4) распространена на наборы M_N функционалов μ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, являющихся не только непрерывными, но и нечетными: $\mu_k(-f) = -\mu_k(f)$. Последнее условие в нашей задаче естественно: замена координатной функции $\varphi_i(t)$ на $-\varphi_i(t)$ должна сопровождаться переменой знака соответствующей координаты кодирующих точек в R^m. Таким образом, ниже для множества $F \subset X$ вектор-функций $\overline{\varphi}(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\}$, $a \leqslant t \leqslant b$, $\varphi_i(t) \in C[a, b]$, полагаем

$$\gamma^N(F, X) = \inf_{M_N \in \mathcal{M}_N} K(F, M_N, X) = \inf_{M_N \in \mathcal{M}_N} \sup\{\rho_X(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) : \overline{\varphi}, \overline{\psi} \in F,\ \mu_k(\varphi_i) =$$

$$= \mu_k(\psi_i),\ k = 1, \ldots, N;\ i = 1, \ldots, m\},$$

где $\mathcal{M}_N$ — множество наборов $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ непрерывных и нечетных на $C[a, b]$ функционалов μ_k. Аналогично определяется для множества F вектор-функций величина $\lambda^N(F, X)$, если функционалы μ_k являются линейными.

Начнем с одного общего факта.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — класс функций $f(t) \in C[a, b]$, содержащий тождественный нуль и вместе с функцией $f(t)$ также и $-f(t)$; $\mathfrak{M}_m$ — класс вектор-функций $\overline{f}(t) = \{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)\}$, у которых $f_i(t) \in \mathfrak{M}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Если для набора $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ непрерывных и нечетных на $C[a, b]$ функционалов в классе $\mathfrak{M}$ существует функция $g(t)$ такая, что*

$$\mu_k(g) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad \|g\|_C \geqslant q, \quad (23)$$

то

$$K(\mathfrak{M}_m, M_N, X_R) \geqslant 2\sqrt{m}q, \quad (24)$$

$$K(\mathfrak{M}_m, M_N, X_h) \geqslant \sqrt{m}q. \quad (25)$$

Доказательство. Рассмотрим вектор-функции $\overline{\varphi}(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\}$ и $\overline{\psi}(t) = \{\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t)\}$, где $\varphi_i(t) = -\psi_i(t) = g(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, а $g(t)$ удовлетворяет соотношениям (23). Если $\|\varphi_i\|_C = |\varphi_i(t_0)|$, то $|\varphi_i(t_0) - \psi_i(t_0)| \geqslant 2q$ и $R(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) \geqslant r(\varphi(t_0), \psi(t_0)) \geqslant 2q\sqrt{m}$. Так как вектор-функции $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ принадлежат классу $\mathfrak{M}_m$ и

$$\mu_k(\varphi_i) = \mu_k(\psi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

то в силу определения величины (3) справедливо неравенство (24).

Взяв в классе $\mathfrak{M}_m$ вектор-функции $\overline{\varphi}(t)$ и $\overline{\psi}(t)$, у которых $\varphi_i(t) = g(t)$, $\psi_i(t) \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, будем иметь

$$h(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \Big(\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(t_0)|^2\Big)^{1/2} \geqslant \sqrt{m}q,$$

а поскольку и здесь выполнены равенства (26), то имеет место оценка (25).

Посмотрим, что дает предложение 1 в конкретных ситуациях.

Пусть $\mathfrak{M} = H^\omega = H^\omega [0, 1]$, $\omega(\delta)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, S^N — единичная сфера в $N+1$-мерном пространстве векторов $\bar{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N+1}\}$ с нормой $\|\bar{\xi}\| = |\xi_1| + \ldots + |\xi_{N+1}|$. Положив $t_0 = 0$, $t_k = |\xi_1| + \ldots + |\xi_k|$, $k = 1, 2, \ldots, N+1$, сопоставим вектору $\bar{\xi} \in S^N$ функцию

$$g(\bar{\xi}, t) = \begin{cases} 2^{-1}\omega(2t_1 - 2t)\operatorname{sgn}\xi_1, & t_0 \leqslant t \leqslant t_1; \\ 2^{-1}\min\{\omega(2t-2t_{k-1}),\ \omega(2t_k-2t)\}\operatorname{sgn}\xi_k, & t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k,\ k=2,3,\ldots,N; \\ 2^{-1}\omega(2t - 2t_N)\operatorname{sgn}\xi_{N+1}, & t_N \leqslant t \leqslant t_{N+1}, \end{cases} \tag{26}$$

которая принадлежит классу H^ω, причем, очевидно, $\|g(\bar{\xi})\|_C \geqslant 2^{-1}\omega(1/N)$.

Если $M_N = \{\mu_1, \ldots, \mu_N)$ — набор непрерывных и нечетных на $C[0, 1]$ функционалов, то соотношения $\eta_k(\bar{\xi}) = \mu_k(g(\bar{\xi}))$, $k = 1, 2, \ldots, N$, задают на S^N непрерывное и нечетное векторное поле и по теореме Борсука (см., например [1, с. 84]) для некоторого $\bar{\xi}^* \in S^N$ будет $\mu_k(g(\bar{\xi}^*)) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$. В силу предложения 1

$$K(H_m^\omega, M_N, X_R) \geqslant \sqrt{m}\,\omega(1/N),\ K(H_m^\omega, M_N, X_h) \geqslant 2^{-1}\sqrt{m}\,\omega(1/N).$$

Эти неравенства имеют место для каждого набора $M_N \in \mathcal{M}_N$, поэтому с учетом (12) и (14) приходим к следующему утверждению.

П р е д л о ж е н и е 2. *Каков бы ни был выпуклый вверх модуль непрерывности, справедливы соотношения*

$$\sqrt{m}\,\omega(1/N) \leqslant \gamma^N(H_m^\omega, X_R) \leqslant \lambda^N(H_m^\omega, X_R) \leqslant 2\sqrt{m}\,\omega(1/(2N)), \tag{27}$$

$$2^{-1}\sqrt{m}\,\omega(1/N) \leqslant \gamma^N(H_m^\omega, X_h) \leqslant \lambda^N(H_m^\omega, X_h) \leqslant \sqrt{m}\,\omega(1/(2N)). \tag{28}$$

Если MH_m есть класс вектор-функций H_m^ω в случае, когда $\omega(\delta) = K\delta$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, то из предложения 2 немедленно вытекает такое утверждение.

С л е д с т в и е. Справедливы равенства

$$\lambda^N(MH_m, X_R) = \gamma^N(MH_m, X_R) = 2\gamma^N(MH_m, X_h) = M\sqrt{m}N^{-1}.$$

Пусть теперь в предложении 1 $\mathfrak{M}$ — класс W^s 1-периодических функций. Для любого набора M_{2n} непрерывных и нечетных функционалов $\mu_1, \ldots, \mu_{2n}$ можно построить (см., например, [2, с. 299]) функцию $g(t) \in W^s$ такую, что

$$\mu_k(g) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, 2n, \quad \|g\|_C \geqslant \|\varphi_{n,s}\|_C = \mathcal{K}_s n^{-s}. \tag{29}$$

Поэтому, если, как и выше, W_m^s — класс соответствующих вектор-функций, то с учетом оценок (20), (21) и предложения 1 можем сформулировать следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 3. *Справедливы соотношения*

$$\gamma^{2n}(W_m^s, X_R) = \lambda^{2n}(W_m^s, X_R) = 2\sqrt{m}\mathcal{K}_s n^{-s}, \tag{30}$$

$$\sqrt{m}\mathcal{K}_s n^{-s} \leqslant \gamma^{2n}(W_m^s, X_h) \leqslant \lambda^{2n}(W_m^s, X_h) \leqslant 2\sqrt{m}\mathcal{K}_s n^{-s}. \tag{31}$$

Вопрос о точных константах в (31), а также в (27) и (28) при $\omega(\delta) \neq M\delta$ остается открытым.

Оценки снизу величины (3) для классов вектор-функций $M\bar{H}_m^\omega$ и $M\bar{W}_m^s$ получим непосредственно, т. е. не опираясь на предложение 1, но используя тот же ход рассуждений.

Как и при рассмотрении класса H_m^ω, при выпуклом вверх $\omega(\delta)$, взяв любой набор функционалов $M_N \in \mathcal{M}_N$, зафиксируем функцию $g(t) \in H^\omega$, для которой $\mu_k(g) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$, причем $\| g \|_C \geqslant 2^{-1}\omega(1/N)$. Вектор-функции $\overline{\varphi}(t)$ и $\overline{\psi}(t)$, у которых $\varphi_1(t) = -\psi_1(t) = Mg(t)$ и $\varphi_i(t) = \psi_i(t) \equiv 0$, $i = 2, \ldots, m$, принадлежат классу $M\overline{H}_m^\omega$ и, как нетрудно проверить, $R(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) \geqslant M\omega(1/N)$. Если же $\overline{\varphi}(t)$ — та же вектор-функция, а $\overline{\psi}(t)$ — тождественный нуль, то $h(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) \geqslant \frac{M}{2}\omega(1/N)$.

Таким образом, для любого $M_N \in \mathcal{M}_N$

$$K(M\overline{H}_m^\omega, M_N, X_R) \geqslant M\omega(1/N), \quad K(M\overline{H}_m^\omega, M_N, X_h) \geqslant \frac{M}{2}\omega(1/N). \tag{32}$$

Аналогичным образом, используя тот факт, что для $M_{2n} \in \mathcal{M}_{2n}$ существует функция $g(t) \in W^s$, удовлетворяющая соотношениям (29), получаем при $n, s = 1, 2, \ldots$ оценки

$$K(M\overline{W}_m^s, M_{2n}, X_R) \geqslant 2M\mathcal{K}_s n^{-s}, \quad K(M\overline{W}_m^s, M_{2n}, X_h) \geqslant M\mathcal{K}_s n^{-s}. \tag{33}$$

Из сравнения (16), (17), (22), (32) и (33) получаем следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 4. *Имеют место соотношения*

$$\begin{gathered} M\omega\left(\frac{1}{N}\right) \leqslant \gamma^N(M\overline{H}_m^\omega, X_R) \leqslant \lambda^N(M\overline{H}_m^\omega, X_R) \leqslant 2M\omega\left(\frac{1}{2N}\right), \\ \frac{M}{2}\omega\left(\frac{1}{N}\right) \leqslant \gamma^N(M\overline{H}_m^\omega, X_h) \leqslant \lambda^N(M\overline{H}_m^\omega, X_h) \leqslant M\omega\left(\frac{1}{2N}\right), \\ \gamma^{2n}(M\overline{W}_m^s, X_R) = \lambda^{2n}(M\overline{W}_m^s, X_R) = 2M\mathcal{K}_s n^{-s}, \\ M\mathcal{K}_s n^{-s} \leqslant \gamma^{2n}(M\overline{W}_m^s, X_h) \leqslant \lambda^{2n}(M\overline{W}_m^s, X_h) \leqslant 2M\mathcal{K}_s n^{-s}. \end{gathered} \tag{34}$$

Отметим, что в (34) при $\omega(\delta) = \delta$ везде будут знаки равенства.

1. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений.— М. : Изд-во Моск. ун-та 1976.— 304 с.
2. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения.— М. : Наука, 1984.— 352 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения.— М. : Наука, 1987.— 424 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Об оптимальном кодировании элементов метрического пространства // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 2.— С. 168—173.
5. *Сендов Б.* Хаусдорфовые приближения.— София: Ин-т математики БАН, 1979.— 320 с.
6. *Мартынюк В. Т.* О приближении ломаными кривых, заданных параметрическими уравнениями // Укр. мат. журн.— 1976.— **28**, № 1.— С. 87—92.
7. *Вакарчук С. Б., Назаренко Н. А.* О приближении кривых интерполяционными параметрическими сплайнами // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 32—35

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 21.03.88