УДК 517.5

П. М. Тамразов

Устранение особенностей субгармонических, плюрисубгармонических функций и их обобщений

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$. Если множество E нулевой емкости содержится в открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ и замкнуто в нем, а функция u задана и субгармонична в $D \setminus E$ и ограничена сверху в окрестности каждой точки D, то u продолжается (притом единственным образом) до функции, субгармонической в D. Это известный классический результат М. Брело [1, с. 41—44, 62], имеющий многочисленные применения. В монографии [2, с. 255, 230] условие замкнутости E в D в теореме Брело заменено близким к нему требованием, чтобы E содержалось в счетном объединении компактов нулевой емкости.

В работах [3, 4] дано обобщение и усиление теоремы Брело в том смысле, что полностью снято условие замкнутости E в D (без замены его какимлибо иным условием). Это позволило также получить критерий стираемости произвольного измеримого по емкости множества $E \subset D$ в классе введенных в [3, 4] функций, являющихся обобщением на множества, не предполагаемые открытыми, понятия субгармонических функций. Это обобщение обозначено в [4] термином «квазисубгармонические функции», обычно употребляемым в совсем ином смысле. В [4] условие ограниченности сверху функции u в окрестности каждой точки D заменено менее жестким условием, допускающим вблизи счетного множества точек $a \in E$ приближение u к $+\infty$, но с верхней оценкой $u(x) \leqslant o(k_n(|x-a|))$, $x \to a$, где k_n — классическое ядро в $\mathbb{R}^n$ (см. ниже, п. 2).

В теореме М. Брело требование об ограниченности сверху u в окрестности каждой точки D П. Лелон [5, с. 277—278] заменил условием существования субгармонической в D функции v такой, что при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ функция $x \mapsto u(x) + \varepsilon v(x)$ стремится к $-\infty$, когда точка $x \in D \setminus E$ стремится к произвольной точке $y \in E$. В приведенном в этой работе доказательстве автор существенно апеллирует к известным результатам [6] о субгармоничности в D верхней регуляризации верхней огибающей семейства субгармонических в D функций, равномерно ограниченного сверху на всяком компакте $K \subset D$ (именно $K \subset D$, а не $K \subset D \setminus E$), или к близкому результату для верхнего предела последовательности субгармонических функций с аналогичным условием равномерной ограниченности сверху этой последовательности на всяком компакте $K \subset D$. Но требуемая равномерная (по семейству или последовательности) ограниченность сверху внутри D, имеющая важное значение для доказательства результата, не обоснована ни в [5], ни в других известных автору работах (например, в [7] доказательство аналогичного результата—теоремы 3.1—проведено лишь в случае, когда функция v ограничена снизу, а это не отличается от случая $v \equiv 0$). В 1986 г. нам удалось доказать этот факт, однако, доказательство оказалось достаточно деликатным. Тем самым были обоснованы опиравшиеся на этот факт утверждения, сформулированные в [5] (в виде предложения 7 и теоремы 2) и в [7] (в виде теоремы 3.1).

В настоящей работе дается обобщение предшествующих результатов в ряде направлений. Как и в [3, 4], в качестве стираемого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ рассматривается произвольное множество емкости нуль. В целях обобщения обратной теоремы и критерия стираемости произвольного измеримого по емкости множества из [4] вместо квазисубгармонических в терминологии работы [4] функций вводится более общий класс функций, определяемых на более широком классе множеств $B \subset \mathbb{R}^n$ и подчиненных менее жестким ограничениям. Вместо всех предыдущих требований о локальной в D ограниченности сверху и мажорации сверху функции u или вместо упомянутого выше условия Лелона принято следующее менее жесткое условие: каждой точке $c \in E$ соответствуют ее окрестность M_c и субгармоническая в M_c функция v такая, что при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ функция $u + \varepsilon v$ в $M_c \setminus E$ оценивается сверху величиной $o(k_n(|x - c|))$, $x \to c$ (и при этом никакой равномерности оценок относительно ε не требуется). Устанавливаются также аналогичные результаты в многомерных комплексных пространствах, включая бесконечномерные.

Результаты настоящей работы доложены автором на IV Международной конференции по комплексному анализу в Варне 12-го мая 1987 г., с подробными доказательствами излагались в феврале—апреле 1987 г. на семинаре по комплексному анализу в Институте математики АН УССР и опубликованы в виде препринта [8].

2. Почти субгармонические функции и формулировки основных теорем для них. Для множества $F \subset \mathbb{R}^n$ и числа $p > 0$ через $\mathrm{mes}_p F$ обозначим p-мерную хаусдорфову меру (p-меру) множества F. Условимся, что емкости, внутренние и внешние емкости множеств $F \subset \mathbb{R}^n$, а также потенциалы борелевских зарядов и (неотрицательных) мер в $\mathbb{R}^n$ соответствуют классическому ядру

$$k_n(t) := \begin{cases} -\log t & \text{при } n = 2, \\ t^{2-n} & \text{при } n \geqslant 3 \end{cases}$$

(в формульных определениях используются знаки «:=» и «=:», причем двоеточие пишется со стороны вводимого обозначения).

Обозначим через $\mathfrak{N}^n$ класс всех множеств $F \subset \mathbb{R}^n$, имеющих нулевую (внешнюю) емкость, а через $\mathfrak{N}^n_*$ — класс всех множеств $F \subset \mathbb{R}^n$, имеющих нулевую внутреннюю емкость.

Пусть $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Для точки $b \in \mathbb{R}^n$ и числа $r > 0$ через $S(b, r)$ обозначим сферу $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - b| = r\}$, а через $\sigma_{b,r}$ — единичную меру, распределенную равномерно на $S(b, r)$ и определенную для всякого множества на $S(b, r)$, измеримого относительно mes_{n-1}. Для функции u со значениями в $[-\infty, +\infty]$, заданной $\sigma_{b,r}$-почти всюду на $S(b, r)$ и измеримой там относительно $\sigma_{b,r}$, рассмотрим среднее

$$m(u, b, r) := \int\limits_{S(b,r)} u d\sigma_{b,r},$$

если последний интеграл определен как конечное число или одно из несобственных чисел $-\infty$, $+\infty$.

Для подмножества Y топологического пространства X, функции $v : Y \to [-\infty, +\infty]$ и точки $a \in X$, предельной для Y, введем величину

$$\bar{v}_Y(a) := \varlimsup_{x \to a,\ x \in Y \setminus \{a\}} v(x).$$

Функцию v назовем непрерывной (аналогично, полунепрерывной) сверху в точке $a \in Y$, если $v(a) = \bar{v}_Y(a)$ (соответственно, $v(a) \geqslant \bar{v}_Y(a)$), и непрерывной (полунепрерывной) сверху на Y, если она непрерывна (полунепрерывна) сверху во всех точках $a \in Y$.

Чтобы подчеркнуть, что непрерывность (полунепрерывность) сверху не исключает значения $+\infty$, иногда будем употреблять термин «обобщенно непрерывная (обобщенно полунепрерывная) сверху функция».

Обозначим через $\mathfrak{B}_n$ класс всех множеств $B \subset \mathbb{R}^n$, для каждого из которых верно следующее: всякой точке $a \in B$ соответствует последовательность $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$, $r_j > 0$, $r_j \to 0$, $j \to +\infty$, такая, что $\sigma_{a,r_j}(S(a, r_j) \setminus B) = 0$ $\forall j = 1, 2, \ldots$.

Из определения видно, что в $\mathfrak{B}_n$ содержатся все множества $B \subset \mathbb{R}^n$ из класса $\mathfrak{B}^n$, введенного в [4], в том числе все открытые подмножества $\mathbb{R}^n$. Очевидно также, что если множество $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто, а множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет n-меру нуль (и, тем более, емкость нуль), то $D \setminus E \in \mathfrak{B}^n \cap \mathfrak{B}_n$.

Пусть на множестве $B \subset \mathbb{R}^n$ задана функция $u: B \to [-\infty, +\infty]$. Условимся говорить, что в точке $a \in \mathbb{R}^n$, предельной для B, функция u удовлетворяет верхней оценке через средние, если существует последовательность $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$, $r_j > 0$, $r_j \to 0$, $j \to +\infty$, такая, что $\sigma_{a,r_j}(S(a, r_j) \setminus B) = 0$, функция u измерима на $S(a, r_j)$ относительно $\sigma_{a,r_j}, j = 1, 2, \ldots$, и $\overline{\lim\limits_{j \to +\infty}} [u(a) - m(u, a, r_j)] r_j^{-2} \leqslant 0$.

Заданную на множестве $B \in \mathfrak{B}_n$ функцию $u: B \to [-\infty, +\infty]$ назовем почти* субгармонической на B, если выполнены следующие условия:

SH_1^*. Функция u полунепрерывна сверху на B.

SH_2. В каждой точке $a \in B$ верно $u(a) < +\infty$.

SH_3^*. Функция u удовлетворяет верхней оценке через средние в каждой точке $a \in B$.

Рассмотрим также следующее условие:

SH_1. Функция u непрерывна сверху на B.

В определении почти субгармонической функции условие SH_1^* можно заменить условием SH_1 и получится равносильное определение.

Условие SH_3^* является обобщением следующего условия:

SH_3. В каждой точке $a \in B$ при всех достаточно малых $r > 0$ выполнены соотношения $\sigma_{a,r}(S(a, r) \setminus B) = 0$ и $u(a) \leqslant m(u, a, r)$.

Справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Пусть множество $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто, множество $E \subset D$ имеет емкость нуль, функция $u: D \setminus E \to [-\infty, +\infty)$ почти субгармонична, каждой точке $c \in E$ соответствуют открытый шар $M_c \subset D$ радиуса $r_c > 0$ с центром c и субгармоническая в M_c функция $v \not\equiv -\infty$ такие, что при каждом $\varepsilon \in (0, 1]$ для всех $x \in M_c \setminus E$ выполнено неравенство $u(x) + \varepsilon v(x) \leqslant \alpha_\varepsilon(|x - c|)$, где $\alpha_\varepsilon: (0, r_c) \to [0, +\infty)$ — непрерывная функция и $\alpha_\varepsilon(r) = o(k_n(r))$, $r \to 0$. Тогда u продолжается до субгармонической в D функции w, причем это продолжение единственно и удовлетворяет равенству*

$$w(x) = \begin{cases} u(x) & \forall x \in D \setminus E, \\ \overline{\lim\limits_{y \to x, y \in D \setminus E}} u(y) & \forall x \in E. \end{cases} \tag{1}$$

По аналогии с теоремой 4 из [4] устанавливается следующий обратный результат.

Теорема 2. *Пусть множество $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $E \subset D$, $D \setminus E \in \mathfrak{B}_n$. Если всякая ограниченная сверху почти субгармоническая на $D \setminus E$ функция продолжается до субгармонической в D функции, то $E \in \mathfrak{N}_\bullet^n$ (а если к тому же E измеримо по емкости, то $E \in \mathfrak{N}^n$).*

Из теорем 1 и 2 вытекает следующий критерий стираемости измеримого по емкости множества.

Следствие. *Пусть множество $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто, а множество $E \subset D$ измеримо по емкости. Тогда равносильны следующие утверждения:*

а) *E имеет емкость нуль;*

б) *$D \setminus E \in \mathfrak{B}_n$ и всякая ограниченная сверху почти субгармоническая на $D \setminus E$ функция продолжается до субгармонической в D функции.*

3. Аппроксимационное мажорирование особенностей и локальная ограниченность сверху. Смысл

* При переводе на английский язык слово «почти» следует передавать словом «almost» (а не «quasi», что соответствует иному понятию).

неформальных терминов, входящих в название пункта, можно уловить и устанавливаемой ниже леммы 1. Ядром этого результата, используемого нами при доказательстве теорем о стирании особенностей в терминах сумм $u + \varepsilon v$, является утверждение о локальной ограниченности сверху в G функции w_0.

Лемма 1. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, множество $E \subset G$ имеет емкость нуль, заданы функция $u : G \setminus E \to [-\infty, +\infty)$, субгармоническая в G функция $v \not\equiv -\infty$ и $w(x) := \overline{\lim\limits_{y \to x, y \in G \setminus E}}\, u(y)$, $x \in G$. Пусть при каждом $\varepsilon \in (0, 1]$ функция*

$$w_\varepsilon(x) := \begin{cases} u(x) + \varepsilon v(x) & \forall x \in G \setminus E, \\ \overline{\lim\limits_{y \to x, y \in G \setminus E}}\, [u(y) + \varepsilon v(y)] & \forall x \in E \end{cases}$$

субгармонична в G. Тогда поточечный предел $w_0 := \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} w_\varepsilon$ локально ограничен сверху в G и его верхняя регуляризация w_0^* субгармонична в G. При этом $w_0 \leqslant u$ в $G \setminus E$, $w_0^* \leqslant w$ в G, функция u измерима на $G \setminus E$ (относительно n-меры), след ее на всякой сфере $S \subset G$ измерим (относительно $(n-1)$-меры) и $w_0^*(x) = \lim\limits_{r \to 0} m(u, x, r)$ $\forall x \in G$.

Доказательство. Существование предельной функции $w_0 : G \to [-\infty, +\infty]$ очевидно. Без ограничения общности можем считать, что G — шар радиуса $\leqslant 1/4$, $v \leqslant 0$ в G, а функция w_1 (соответствующая значению $\varepsilon = 1$) ограничена сверху в G. Тогда при $\varepsilon \downarrow 0$ w_ε монотонно растет.

Если μ — заряд в $\mathbb{R}^n$, то через $U^\mu(x) := \int k_n(|x - y|)\, \mu(dy)$ обозначим его потенциал.

Сначала временно предположим, что $w_1 \not\equiv -\infty$ в G. Тогда при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, 1]$ $w_\varepsilon \not\equiv -\infty$ в G. Пусть G_* — произвольный открытый шар, компактный в G. На основании теоремы Ф. Рисса (см. [2, с. 123]), в G_* функция w_ε представима в виде $w_\varepsilon = g_\varepsilon - U^{\nu_\varepsilon}$, где g_ε — гармоническая в G_* функция, а U^{ν_ε} — потенциал некоторой (неотрицательной, конечной) меры ν_ε, сосредоточенной в G_*. В частности, при $\varepsilon = 1$ имеем $w_1 = g_1 - U^{\nu_1}$ в G_*.

Функция v в G_* представима в виде $v = f - U^\lambda$, где f — гармоническая в G_* функция, а λ — (неотрицательная, конечная) мера, сосредоточенная в G_*.

Пусть $V := \{x \in G : v(x) = -\infty\}$, $W_1 := \{x \in G : w_1(x) = -\infty\}$. Множество $V_1 := V \cup W_1$ имеет емкость нуль.

На множестве $G_* \setminus (E \cup V_1)$ верны соотношения

$$w_\varepsilon = u + \varepsilon v = w_1 + (\varepsilon - 1) v, \quad g_\varepsilon - U^{\nu_\varepsilon} = w_\varepsilon = [g_1 + (\varepsilon - 1) f] - U^{\nu_1 + (\varepsilon - 1)\lambda},$$

$$g_\varepsilon - [g_1 + (\varepsilon - 1) f] = U^{\nu_\varepsilon - \nu_1 - (\varepsilon - 1)\lambda}.$$

Левая часть последнего равенства гармонична в G_*, а правая является потенциалом (конечного) заряда, сосредоточенного в G_*. Отсюда на основании теоремы 1.13 из [9, с. 101] следует, что этот заряд равен нулю и потому $g_\varepsilon = g_1 + (\varepsilon - 1) f$. При любом $\varepsilon \in (0, 1]$ верно $w_\varepsilon = g_\varepsilon - U^{\nu_\varepsilon} \leqslant g_\varepsilon$ и потому в G_*

$$w_0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} w_\varepsilon \leqslant \lim_{\varepsilon \downarrow 0} g_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [g_1 + (\varepsilon - 1) f] = g_1 - f < +\infty.$$

Итак, функция w_0 локально ограничена сверху в G_*. Принимая во внимание произвол в выборе G_*, приходим к выводу, что функция w_0 локально ограничена сверху в G. Поэтому на основании известного результата [1, с. 85] ее верхняя регуляризация w_0^* субгармонична в G.

Из определения w_ε видно, что на $G \setminus E$ верно $w_\varepsilon \leqslant u$, а поэтому $w_0 \leqslant u$ на $G \setminus E$. Пусть W — множество всех $x \in G$, для которых $w_0(x) < w_0^*(x)$. Множество W имеет емкость нуль [1, с. 85] и потому множество $G \setminus (E \cup$

$\cup W$) не разрежено ни в одной точке из G [1, с. 90—95]. Поэтому

$$w_0^*(x) = \varlimsup_{y\to x, y\in G\setminus(E\cup W)} w_0^*(y) \leqslant \varlimsup_{y\to x, y\in G\setminus(E\cup W)} u(y) \leqslant w(x) \quad \forall x\in G.$$

Значит, $w_0^* \leqslant w$ в G.

Теперь откажемся от предположения $w_1 \not\equiv -\infty$. Если $w_1 \equiv -\infty$, то функция u на $G\setminus(E \cup V)$ равна $-\infty$, ибо v конечна на $G\setminus V$. Поэтому при любом $\varepsilon \in (0, 1]$ субгармоническая функция w_ε обращается в $-\infty$ на $G\setminus(E \cup V)$, а потому и всюду в G. Следовательно, $w_0 \equiv -\infty$, $w_0^* \equiv -\infty$, и снова $w_0 \leqslant u$ в $G\setminus E$, $w_0^* \leqslant w$ в G.

Для каждой сферы $S \subset G$ справедливо равенство $\mathrm{mes}_{n-1}(S \cap (E \cup \cup V \cup W)) = 0$. При этом $w_0 = u$ на $G\setminus(E \cup V)$ и $w_0^* = w_0 = u \subset G\setminus(E \cup V \cup W)$. Поэтому функция u измерима на $G\setminus E$ (относительно n-меры) и на $S\setminus E$ (относительно $(n-1)$-меры). Следовательно, верны равенства

$$w_0^*(x) = \lim_{r\to 0} m(w_0^*, x, r) = \lim_{r\to 0} m(u, x, r) \quad \forall x\in G.$$

Лемма 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Так как множество E не имеет внутренних точек, то формула (1) определяет функцию w на всем множестве D. Эта функция обобщенно непрерывна сверху в D и в каждой точке $a \in D\setminus E$ удовлетворяет верхней оценке через средние.

Пусть $c \in E$, а r_c, M_c, v и α_ε соответствуют точке c в смысле, указанном в формулировке теоремы 1. Без ограничения общности можно считать, что функция α_ε определена в точке r_c, конечна и непрерывна (слева) в ней, чего легко добиться за счет любого уменьшения r_c.

Сначала предположим, что $v \equiv 0$. Тогда функция u в $M_c\setminus E$ ограничена сверху величиной $\alpha_\varepsilon(|x-c|) = o(k_n(|x-c|))$ $(x \to c)$.

Пусть F — множество всех точек $a \in M_c$, в которых $w(a) = +\infty$. Так как F изолировано в M_c, то $M_c\setminus F$ открыто, а функция w удовлетворяет условию SH_2 в $M_c\setminus F$, непрерывная сверху в M_c и удовлетворяет верхней оценке через средние в каждой точке $a \in M_c\setminus E$.

Сначала предположим, что M — открытый шар диаметра $\leqslant 1/4$, для которого $\bar{M} \subset M_c\setminus F$ и $E \cap M \neq \varnothing$. Можно указать последовательность $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограниченных открытых множеств $Q_k \subset M$, для которых $E \cap M \subset \subset Q_{k+1} \subset Q_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots$ и емкость Q_k стремится к нулю при $k \to +\infty$. Обозначим $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} Q_k =: Q$. Очевидно, Q — множество типа G_δ и нулевой емкости, причем $\mathrm{mes}_n Q = 0$ и $E \cap M \subset Q \subset M$. Поэтому $M\setminus Q \in \mathfrak{B}^n$. $M\setminus E \in \mathfrak{B}^n$.

Сужение функции w на M обозначим через z. Функция z удовлетворяет условиям SH_1^* и SH_2 в M и верхней оценке через средние в каждой точке $a \in M\setminus E$. Теперь воспользуемся указанными выше свойствами множеств M и Q и известным утверждением [9, с. 223—225, 4], согласно которому существует борелевская мера ν, сосредоточенная в M и такая, что ее потенциал U^ν обращается в $+\infty$ во всех точках множества Q и только в них. При этом потенциал U^ν положителен в M.

Для любой сферы $S(a, r)$, содержащейся в M, верно соотношение $\sigma_{a,r}(S(a, r) \cap E) = 0$ и существуют средние $m(u, a, r)$ и $m(z, a, r)$, равные между собой.

Пусть $\theta > 0$. Функция $z - \theta U^\nu$ удовлетворяет в M условиям SH_1^*, SH_2. Из свойств z следует, что функция $z - \theta U^\nu$ в каждой точке $a \in M\setminus E$ удовлетворяет верхней оценке через средние. Если же $a \in Q$, то из определения ν следуют соотношения $z(a) - \theta U^\nu(a) = -\infty \leqslant m(z - \theta U^\nu, a, r)$ при всех достаточно малых $r > 0$. Значит, функция $z - \theta U^\nu$ удовлетворяет также верхней оценке через средние в M и потому на основании известной теоремы Бляшке—Привалова [1, с. 27] субгармонична в M.

Пусть B — открытый шар радиуса $r>0$ с центром x_0, компактный в M. Пусть функция g непрерывна на $\bar{B}$, гармонична в B и $z \leqslant g$ на ∂B. Тогда при $\theta > 0$ функция $h_\theta := z - \theta U^\nu - g$ субгармонична в B. Так как $U^\nu > 0$ в M, то на ∂B имеем $h_\theta \leqslant z - g \leqslant 0$. Значит, $h_\theta \leqslant 0$ в B. Используя конечность U^ν вне Q, для $x \in B \setminus Q$ при $\theta \to 0$ получаем $z(x) - g(x) \leqslant 0$. Отсюда и из верхней оценки через средние для z на множестве $B \setminus E$ с учетом включения $M \setminus Q \in \mathfrak{B}^n$ следует, что при каждом $x \in B \setminus E$ и надлежащих r_j верно

$$z(x) - g(x) \leqslant \overline{\lim_{j\to+\infty}}\, m(z-g, x, r_j) \leqslant 0.$$

Значит, $z \leqslant g$ в $B \setminus E$. Согласно (1) это неравенство верно и на $B \cap E$. Итак, $z \leqslant g$ в B.

В силу произвола в выборе B и g и справедливости условий SH_1^*, SH_2 и оценки $z \leqslant g$ в B, на основании известного характеристического свойства субгармонических функций [2, с. 70] убеждаемся, что функция z субгармонична в M.

Принимая во внимание произвол в выборе M, приходим к заключению, что функция w субгармонична в $M_c \setminus F$. Отсюда с учетом оценки $w(y) \leqslant o(k_n(|y-a|))$, $y \to a$, справедливой для каждой точки $a \in F$, известным рассуждением, основанным на рассмотрении в достаточно малом фиксированном шаре с центром a при каждом $\theta > 0$ субгармонической функции $y \mapsto w(y) - \theta k_n(|y-a|)$, $y \neq a$, $a \mapsto -\infty$, оценивая эту функцию сверху через ее граничные значения и затем переходя к пределу по $\theta \downarrow 0$, убеждаемся, что функция w ограничена сверху в M_c и потому субгармонична в M_c.

Теперь откажемся от временно принятого предположения, что $v \equiv 0$. Фиксируем $\varepsilon \in (0, 1]$ и обозначим $u + \varepsilon v =: u_\varepsilon$ в $M_c \setminus E$ и

$$w_\varepsilon(x) := \begin{cases} u_\varepsilon(x) & \forall x \in M_c \setminus E, \\ \overline{\lim\limits_{y\to x, y\in M_c\setminus E}}\, u_\varepsilon(y) & \forall x \in E. \end{cases}$$

Функция u_ε обладает всеми теми свойствами функции u, которые были использованы при доказательстве субгармоничности w в M_c. Поэтому функция w_ε субгармонична в M_c.

Используя лемму 1, убеждаемся, что функция w_0 локально ограничена сверху в M_c, ее верхняя регуляризация w_0^* субгармонична в M_c, след функции u на всякой сфере $S \subset M_c$ измерим относительно $(n-1)$-меры и справедливы соотношения $w_0 \leqslant u$ в $M_c \setminus E$, $w_0^* \leqslant w$ в M_c и

$$w_0^*(x) = \lim_{r\to 0} m(u, x, r) \quad \forall x \in M_c. \tag{2}$$

Согласно условию теоремы, функция u удовлетворяет верхней оценке через средние в каждой точке $x \in M_c \setminus E$. Отсюда и из (2) вытекает оценка $u \leqslant w_0^*$ на $M_c \setminus E$. А так как функция u, по предположению, непрерывна сверху, то $u = w$ на $M_c \setminus E$.

Таким образом, $w_0^* = w = u$ на $M_c \setminus E$. Отсюда с учетом определения w и того факта, что множество $M_c \setminus E$ не разрежено ни в одной точке множества M_c, получаем

$$w(x) = \overline{\lim_{y\to x, y\in M_c\setminus E}}\, w_0^*(y) = w_0^*(x) \quad \forall x \in E \cap M_c.$$

Тем самым доказано, что $w \equiv w_0^*$ в M_c, и w является субгармоническим продолжением u на M_c.

Ввиду произвольности точки $c \in E$ функция w субгармонична в D.

Докажем единственность субгармонического продолжения функции u на D. Пусть теперь q — любое другое такое продолжение. Тогда в каждой точке $a \in D$ $q(a) = \lim\limits_{r\to 0} m(q, a, r)$. Следовательно, $q(a) = \lim\limits_{r\to 0} m(u, a, r)$, и потому на E продолженная функция определяется лишь значениями функции u на $D \setminus E$. Значит, это продолжение единственно. Теорема 1 полностью доказана.

З а м е ч а н и е. На нашем докладе в Варне, где результаты препринта [8] и данной работы излагались без доказательств, присутствовал финский математик Ю. Риихентаус. Через некоторое время после конференции он письмом сообщил, что нашел еще одно доказательство ограниченности сверху функции u в окрестности каждой точки $x \in E$ при условиях утверждения П. Лелона, упомянутого во введении. Это доказательство отличается от нашего.

5. П о ч т и п л ю р и с у б г а р м о н и ч е с к и е ф у н к ц и и и с т и р а н и е о с о б е н н о с т е й. Чтобы в открытом подмножестве D n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ полунепрерывная сверху функция $w: D \to [-\infty, +\infty)$ была плюрисубгармонична, необходимо и достаточно, чтобы при всяком невырожденном линейном преобразовании T пространства $\mathbb{C}^n$ суперпозиция $w(T(\cdot))$ была субгармонична (относительно $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$) в $T^{-1}(D)$. Этот результат, установленный Лелоном [5], можно использовать в качестве основания для другого определения плюрисубгармоничности. Мы же используем его для определения почти плюрисубгармоничности.

Определенную на множестве $H \subset \mathbb{C}^n$ функцию $w: H \to [-\infty, +\infty)$ назовем почти плюрисубгармонической, если при всяком невырожденном линейном преобразовании T пространства $\mathbb{C}^n$ суперпозиция $w(T(\cdot)): T^{-1}(H) \to [-\infty, +\infty)$ почти субгармонична (относительно $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$).

Если H открыто, то это определение дает плюрисубгармонические в H функции.

Заметим, что если D — открытое подмножество $\mathbb{C}^n$, а множество $E \subset D$ (как подмножество $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$) имеет $(2n)$-меру нуль (и, тем более, емкость нуль), то при любом указанном выше T верно включение $T^{-1}(D \setminus E) \in \mathfrak{B}_{2n} \cap \mathfrak{B}^{2n}$.

Очевидно, что почти плюрисубгармоническая функция почти субгармонична (для проверки достаточно в качестве T взять тождественное преобразование $\mathbb{C}^n$).

Пусть $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{C}^n$ $(= \mathbb{R}^{2n})$.

Докажем следующий результат.

Т е о р е м а 3. *Пусть множество $D \subset \mathbb{C}^n$ открыто, множество $E \subset D$ имеет емкость нуль, функция $u: D \setminus E \to [-\infty, +\infty)$ почти плюрисубгармонична. Предположим, что для каждой точки $c \in E$ существуют открытый шар $M \subset D$ радиуса r_c с центром c и субгармоническая в M функция $v \not\equiv -\infty$ такие, что при каждом $\varepsilon \in (0, 1]$ для всех $x \in M \setminus E$ выполнено неравенство $u(x) + \varepsilon v(x) \leqslant \alpha_\varepsilon(|x - c|)$, где $\alpha_\varepsilon: (0, r_c) \to [0, +\infty)$ — непрерывная функция и $\alpha_\varepsilon(r) = o(k_{2n}(r))$, $r \to 0$.*

Тогда u продолжается до плюрисубгармонической в D функции w, это продолжение единственно и удовлетворяет формуле (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем следовать предложенной Лелоном [5, с. 279] схеме обоснования n-мерного комплексного результата на основе соответствующего $2n$-мерного вещественного. Так как функция u почти субгармонична на $D \setminus E$, то можно применить теорему 1, в результате чего получаем, что функция (1) субгармонична в D. В частности, тем самым доказано, что w локально ограничена сверху в D.

Пусть теперь T — произвольное невырожденное линейное преобразование пространства $\mathbb{C}^n$. Тогда множество $T^{-1}(E)$ также имеет емкость нуль, функция $u(T(\cdot))$ почти субгармонична в $T^{-1}(D \setminus E)$, а ее продолжение по непрерывности сверху на множество $T^{-1}(D)$ равно $w(T(\cdot))$ и локально ограничено сверху в $T^{-1}(D)$. Из теоремы 1 следует, что функция $w(T(.))$ субгармонична в $T^{-1}(D)$. Ввиду произвола в выборе T функция w плюрисубгармонична в D.

Утверждение теоремы 3 о единственности следует из аналогичного утверждения теоремы 1.

Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть множество E замкнуто в D, а функция u плюрисубгармонична в $D \setminus E$. При указанных условиях для случая, когда u ограничена сверху в окрестности каждой точки $a \in D$, соответствующая теорема доказана Лелоном [5] (см. также [10]), а для случая, когда функции $x \mapsto u(x) + \varepsilon v(x)$ из формулировки теоремы стремятся к $-\infty$ при стремлении x ко всякой точке $a \in E$, соответствующая теорема была сформулирована в работе [5, с. 279], но ее обоснование было проведено лишь в предположении справедливости аналогичного утверждения для субгармонических функций в $\mathbb{R}^n$.

6. С т и р а н и е о с о б е н н о с т е й в к о м п л е к с н ы х п р о с т р а н с т в а х с о ц е н к а м и ч е р е з о д н о м е р н ы е с р е д н и е. В определении почти плюрисубгармоничности участвуют оценки через средние по гиперсферам (вещественной размерности $2n - 1$). Естественно желание получить результаты, в которых эти оценки были бы заменены (ослабленными) оценками через средние по окружностям (вещественной размерности 1) в комплексных прямых, что соответствует духу обычного определения плюрисубгармоничности. Кроме того, на этом пути удается получить также новые результаты в топологических векторных пространствах.

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Пусть X — комплексное векторное топологическое пространство. Для a, $l \in X$, $l \neq 0$, пусть $P_{a,l} := \{x \in X : x = a + lz, z \in \mathbb{C}\}$ — комплексная прямая в X. Для числа $r > 0$ через $S(a, l, r)$ обозначим точечное множество $\{x = a + lre^{i\theta} : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, а через $\sigma_{a,l,r}$ — единичную меру, распределенную равномерно на $S(a, l, r)$ и определенную для всякого множества на $S(a, l, r)$, измеримого относительно линейной меры. Для функции $u : x \mapsto [-\infty, +\infty]$, заданной на некотором подмножестве X, содержащем $\sigma_{a,l,r}$-почти все точки $S(a, l, r)$, обозначим

$$m(u, a, l, r) := \int\limits_{S(a,l,r)} u d\sigma_{a,l,r},$$

если последний интеграл существует как конечное число или одно из несобственных чисел $-\infty$ или $+\infty$.

Множество $F \subset P_{a,l}$ будем называть $\mathbb{C}$-полярным в $P_{a,l}$, если в $P_{a,l}$ существует субгармоническая функция $v \not\equiv -\infty$ такая, что $v = -\infty$ на F.

Говоря об «окрестности» точки, мы всегда имеем в виду открытую окрестность. Множество $E \subset X$ будем называть локально X-полярным, если каждой точке $x \in X$ соответствуют ее связная окрестность M и плюрисубгармоническая в M функция $v \not\equiv -\infty$ такие, что $v = -\infty$ на $E \cap M$.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 4. *Пусть X — комплексное векторное отделимое топологическое пространство, D — открытое подмножество X, E — произвольное локально X-полярное подмножество D; $u : D \setminus E \to [-\infty, +\infty)$ — полунепрерывная сверху функция. Для всяких $a \in D \setminus E$ и $l \in X \setminus \{0\}$, для которых в некоторой окрестности M^a точки a множество $E \cap M^a \cap P_{a,l}$ $\mathbb{C}$-полярно в $P_{a,l}$, предположим, что*

$$\varliminf_{r \to 0} [u(a) - m(u, a, l, r)] r^{-2} \leqslant 0. \tag{3}$$

Пусть всякой точке $c \in E$ соответствуют ее связная окрестность M_c и плюрисубгармоническая в M_c функция $v_c \not\equiv -\infty$ такие, что при каждом $\varepsilon \in (0, 1]$

$$\sup_{x \in M_c \setminus E} [u(x) + \varepsilon v_c(x)] < +\infty \tag{4}$$

(*но равномерность по ε не требуется*). *Тогда u продолжается до плюрисубгармонической в D функции, это продолжение единственно и удовлетворяет формуле* (1).

З а м е ч а н и е. Пусть E замкнуто в D, а u плюрисубгармонична в $D \setminus E$. При указанных условиях для случая, когда X полно, а u ограничена сверху в окрестности каждой точки $a \in E$, соответствующая теорема установлена в [11], а для случая, когда функции $x \mapsto u(x) + \varepsilon v_c(x)$ из формулировки теоремы стремятся к $-\infty$ при стремлении x ко всякой точке $a \in E$, соответствующая теорема сформулирована в [7], но приведенное в [7] доказательство относится только к случаю, когда функция v_c ограничена снизу, а это не отличается от случая, когда u ограничена сверху в окрестности каждой точки $a \in E$.

Теорема 5. *Пусть в условиях теоремы 4 пространство X нормируемо с помощью некоторой нормы $\|\cdot\|$, но условие* (4) *заменено следующим более слабым условием:*

$$u(x) + \varepsilon v_c(x) \leqslant \alpha_\varepsilon(\|x - c\|) \quad \forall x \in M_c \setminus E, \tag{5}$$

где $\alpha_\varepsilon: (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — непрерывная функция и $\alpha_\varepsilon(r) = o(k_{2m}(r))$, $r \to 0$, с каким-нибудь натуральным m, не бо́льшим комплексной размерности пространства X. Тогда верны все утверждения теоремы 4.

Частным случаем теоремы 5 является следующий результат, в котором $X := \mathbb{C}^n$, $\|\cdot\| := |\cdot|$.

Теорема 5_n. *Пусть множество $D \subset \mathbb{C}^n$ открыто, множество $E \subset D$ локально плюриполярно, функция $u: D \setminus E \to [-\infty, +\infty)$ полунепрерывна сверху. Для всяких $a \in D \setminus E$ и $l \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, для которых в некоторой окрестности M^a точки a множество $E \cap M^a \cap P_{a,l}$ $\mathbb{C}$-полярно в $P_{a,l}$, предположим, что выполнено* (3). *Пусть всякой точке $c \in E$ соответствуют открытый шар M_c радиуса $r_c > 0$ с центром c и плюрисубгармоническая в M_c функция $v_c \not\equiv -\infty$ такие, что при каждом $\varepsilon \in (0, 1]$*

$$u(x) + \varepsilon v_c(x) \leqslant \alpha_\varepsilon(|x - c|) \quad \forall x \in M_c \setminus E,$$

где $\alpha_\varepsilon: (0, r_c) \to [0, +\infty)$ — непрерывная функция и $\alpha_\varepsilon(r) = o(k_{2n}(r))$, $r \to 0$. Тогда u продолжается до плюрисубгармонической в D функции, это продолжение единственно и удовлетворяет формуле (1).

Пусть X — комплексное векторное отделимое топологическое пространство. Закругленные окрестности [12, с. 22] составляют базу топологии в X [12, с. 23—25]. Нам потребуются следующие тесно связанные утверждения.

Предложение 1. *Пусть M — область в X, функции $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ плюрисубгармоничны в M, $\tilde{u} \not\equiv -\infty$, $\tilde{v} \not\equiv -\infty$ в M. Тогда $\tilde{u} + \tilde{v} \not\equiv -\infty$ в M, а множество тех точек, где $\tilde{u} + \tilde{v} \neq -\infty$, всюду плотно в M.*

Предложение 2. *Объединение двух локально X-полярных множеств локально X-полярно, а его дополнение всюду плотно в X.*

Установим следующий результат.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия одной из теорем 4, 5 или 5_n, w определяется формулой* (1), *M — открытое связное подмножество множества D, v и $\overset{*}{w}_0$ — плюрисубгармонические в M функции, $v \not\equiv -\infty$, множество $V := \{x \in M : v(x) = -\infty\}$ содержит в себе множество $E \cap M$, $w_0^* \leqslant w$ в M и $w_0^* \geqslant u$ в $M \setminus V$. Тогда $w_0^* = w = u$ в $M \setminus E$ и $w_0^* = w$ в M.*

Доказательство. Соотношения $w_0^* = w = u$ в $M \setminus V$ очевидны. Далее, если $w \equiv -\infty$ в M, то $w = w_0^*$ в M. Пусть теперь $w \not\equiv -\infty$ в M и $a \in M \setminus E$. Тогда существует закругленная окрестность точки a, содержащаяся в M. Поэтому на основании предложения 1 существует точка $b \notin V \cup \{a\}$, для которой $w(b) \neq -\infty$ и $a + (b - a)r \in M$ $\forall r \in [0, 1]$. Пусть P — комплексная прямая, содержащая a и b. Тогда $V \cap P$ $\mathbb{C}$-полярно в P (ибо $b \in (M \cap P) \setminus V$), а потому при всех достаточно малых $r > 0$ для множества $S(a, b - a, r) =: S(r)$ и меры $\sigma_{a,b-a,r} =: \sigma_r$ верно $\sigma_r(S(r) \cap V) = \sigma_r(S(r) \cap E) = 0$.

Согласно условию леммы 2

$$u(a) \leqslant \varlimsup_{r \to 0} m(u, a, b - a, r) \leqslant \varlimsup_{y \to a, y \in (M \cap P) \setminus V} u(y) =$$

$$= \varlimsup_{y \to a, y \in (M \cap P) \setminus V} w_0^*(y) \leqslant w_0^*(a).$$

Следовательно, $u \leqslant w_0^*$ в $M \setminus E$. Вместе с предположенным в M неравенством $w_0^* \leqslant w$ и равенством $w = u$ в $D \setminus E$ это приводит к соотношениям $w_0^* = w = u$ в $M \setminus E$. Поэтому из определения w с учетом плюрисубгармоничности w_0^* следует оценка $w \leqslant w_0^*$ в M. Снова используя противоположное предположение леммы 2, получаем $w = w_0^*$ в M. Лемма 2 доказана.

Проведем частичное доказательство теорем 4, 5 и полное доказательство теоремы 5_n. Пусть выполнены условия одной из этих теорем, а функция w определяется в D формулой (1). Очевидно, $w = u$ в $D \setminus E$, а в D функция w обобщенно полунепрерывна сверху, т. е. w может принимать и значение $+\infty$, но $w(x) \geqslant \overline{\lim\limits_{y \to x, y \neq x}}\, w(y) \quad \forall x \in D$.

Фиксируем точку $c \in D$. Тогда существуют некоторая закругленная окрестность $M_1 \subset D$ точки c и плюрисубгармоническая в M_1 функция $v_1 \not\equiv -\infty$ такие, что $v_1 \leqslant 0$ в M_1 и $v_1 = -\infty$ на $E \cap M_1$.

Предположим, что выполнено следующее условие.

Условие 1. Пусть существуют закругленная окрестность $M \subset M_1$ точки c, ограниченная сверху плюрисубгармоническая в M функция $v_2 \not\equiv -\infty$ и при каждом фиксированном $\varepsilon \in (0, 1]$ постоянная $\alpha_\varepsilon < +\infty$, зависящая от ε, такие, что $u(x) + \varepsilon v_2(x) \leqslant \alpha_\varepsilon \quad \forall x \in M \setminus E$.

Заметим, что если $c \in D \setminus E$ или выполнены условия теоремы 4, то условие 1 заведомо верно.

Функция $v := v_1 + v_2$ плюрисубгармонична и ограничена сверху в M, а из предложения 1 следует, что $v \not\equiv -\infty$ в M, множество точек, где $v \neq -\infty$, всюду плотно в M, и при этом $v = -\infty$ на $E \cap M$, $u(x) + \varepsilon v(x) \leqslant \alpha_\varepsilon \quad \forall x \in M \setminus E$.

Обозначим $\{x \in M : v(x) = -\infty\} =: V$. Очевидно, $E \cap M \subset V$. Введем функцию $w_\varepsilon(x) := \overline{\lim\limits_{y \to x, y \in M \setminus E}}\, [u(y) + \varepsilon v(y)]$, $x \in M$. Функция w_ε обобщенно полунепрерывна сверху в M, совпадает с $u + \varepsilon v$ в $M \setminus E$ и оценка $w_\varepsilon(x) \leqslant \alpha_\varepsilon$ верна в $M \setminus E$, а поэтому и в M.

Так как функция v ограничена сверху в M, то в M существует поточечный предел $w_0 := \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} w_\varepsilon$. Пусть w_0^* — верхняя регуляризация функции w_0 в M, т. е. $w_0^*(x) := \overline{\lim\limits_{y \to x}}\, w_0(y)$, $x \in M$. На множестве $M \setminus V$ $w_0 = u = w$.

При всяком $\tau > \varepsilon$ имеем $w_\tau = w_\varepsilon + (\tau - \varepsilon) v$, а из соотношения $w_\varepsilon < +\infty$ в M следует, что функция w_τ на V обращается в $-\infty$. Поскольку $w_\varepsilon < +\infty$ в M при всяком $\varepsilon \in (0, 1]$, то все функции w_ε на V равны $-\infty$, то же самое верно для w_0 и потому $w_0 \leqslant w$ в M, $w_0 \leqslant u$ на $M \setminus E$, а так как w обобщенно полунепрерывна сверху в M, то тогда $w_0^* \leqslant w$ в M и $w_0 = w_0^* = u = w$ в $M \setminus V$.

Сначала предположим, что функция u ограничена сверху на $M \setminus E$. Тогда w ограничена сверху в M, семейство $\{w_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ функций w_ε ограничено сверху равномерно по $x \in M$ и $\varepsilon \in (0, 1]$, а потому $w_0^* \leqslant w$ в M. Кроме того, при всяком $\varepsilon \in (0, 1]$ имеем $w_\varepsilon = w_0 = -\infty$ на V. Пусть P — произвольная комплексная прямая, пересекающаяся с M. Тогда либо $w_\varepsilon = v = -\infty$ в $M \cap P$, либо множества $V \cap P$ и $E \cap M \cap P$ $\mathbb{C}$-полярны в P. Поэтому с учетом условия (3) для всякой точки $a \in M \cap P$ и любого $l \in X \setminus \{0\}$ такого, что $P = P_{a,l}$, получаем оценку $\underline{\lim\limits_{r \to 0}}\, [w_\varepsilon(a) - m(w_\varepsilon, a, l, r)]\, r^{-2} \leqslant 0$ (если речь вести об условиях теоремы 5_n, то в них $X = \mathbb{C}^n$).

Так как функция w_ε полунепрерывна сверху в M, то ее сужение $w_{\varepsilon \mid P}$ на $P \cap M$ также полунепрерывно сверху. Теперь на основании теоремы Бляшке—Привалова [1, с. 27] можно утверждать, что функция $w_{\varepsilon \mid P}$ субгармонична в $M \cap P$. Ввиду произвола в выборе P функция w_ε плюрисубгармонична в M. Поэтому в силу известного результата [5, с. 275—276, 11, 7] функция w_0^* плюрисубгармонична в M. Тем самым обеспечено выполнение всех условий леммы 2, и из нее следует, что $\overset{*}{w_0} = w$ в M, и поэтому функция w плюрисубгармонична в M.

Пусть теперь u не обязательно ограничена сверху на $M \setminus E$. При $\varepsilon \in (0, 1]$ применим доказанное утверждение к функциям $u + \varepsilon v$, 0 и w_ε, взятым вместо u, v_2 и w соответственно. В результате убеждаемся, что функция w_ε плюрисубгармонична в M.

Далее в дополнение к условию 1 предположим, что выполнено следующее условие.

Условие 2. Пусть функция $\overset{*}{w_0}$ локально ограничена сверху в M.

Тогда на основании известного результата [5, с. 275—276, 11, 7] функция w_0^* плюрисубгармонична в M. При этом выполнены условия леммы 2, и из нее следует, что $\overset{*}{w_0} = w$ в M, и поэтому функция w плюрисубгармонична в M.

Теперь откажемся от постулирования условий 1 и 2 и обсудим вопрос о том, когда они следуют из других предположений. Если $c \in D \setminus E$, то условия 1 и 2 выполняются очевидным образом (и тогда, как показано выше, функция w плюрисубгармонична в M). Но и в общем случае (без условия $c \in D \setminus E$) справедлив следующий важный факт.

Лемма 3. *В предположениях любой из теорем* 4, 5 *или* 5_n *условия* 1 *и* 2 *выполняются автоматически.*

Доказательство той части этой леммы, которая относится к теоремам 4 и 5, будет дано в отдельной работе. Применительно же к теореме 5_n утверждение леммы 3 доказывается следующим образом.

Достаточно рассмотреть случай $c \in E$. Так как функция $x \mapsto w_\varepsilon(x)$ субгармонична в $M \setminus \{c\}$ и там ограничена сверху величиной $\alpha_\varepsilon(|x - c|)$, то в силу теоремы 1 w_ε субгармонична в M. Таким образом, w_ε ограничена сверху в M (без равномерности по ε). Значит, условие 1 выполнено как для функций u, v_2, w, так и для функций $u + \varepsilon v$, 0, w_ε (взятых вместо u, v_2, w соответственно). Поэтому можно применить утверждение, доказанное выше, перед введением условия 2, в результате чего получим, что w_ε плюрисубгармонична в M. Так как функции v и w_ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, субгармоничны в M, то применяя лемму 1, убеждаемся, что функция $\overset{*}{w_0}$ субгармонична и потому локально ограничена сверху в M. Значит, утверждение леммы 3 применительно к теореме 5_n доказано.

Ввиду произвола в выборе c все предыдущее означает, что утверждение о плюрисубгармоничности функции w в D в теореме 5_n доказано полностью, а в теоремах 4 и 5 оно сведено к утверждению леммы 3 для них.

Теперь докажем единственность в теоремах 4, 5 и 5_n. Предположим, что q — плюрисубгармоническая в D функция, совпадающая с u на $D \setminus E$. Фиксируем произвольную точку $a \in E$. Так как E локально плюриполярно, то можно выбрать закругленную окрестность $M \subset D$ точки a и плюрисубгармоническую в M функцию $v \not\equiv -\infty$, обращающуюся в $-\infty$ на $E \cap M$. Тогда существует точка $b \in M$, в которой $v(b) \neq -\infty$. Пусть P — комплексная прямая, содержащая a и b. Множество $E \cap M \cap P$ $\mathbb{C}$-полярно в P и потому $q(a) = \lim\limits_{r \to 0} m(q|_P, a, b - a, r) = \lim\limits_{r \to 0} m(u|_{P \setminus E}, a, b - a, r)$. Следовательно, $q(a)$ определяется только значениями функции u, и потому $q = w$. Единственность доказана.

1. *Брело М.* Основы классической теории потенциала.— М. : Мир, 1964.— 213 с.
2. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции.— М. : Мир, 1980.— 304 с.
3. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные задачи для голоморфных функций и отображений.— Киев, 1983.— 50 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.65).
4. *Тамразов П. М.* Квазисубгармонические функции и стирание особенностей //Укр. мат. журн.— 1986.— 38, № 5.— С. 629—634.
5. *Lelong P.* Ensembles singuliers impropres des fonctions plirusousharmoniques // J. math. pures et appl.— 1957.— 36, N 7.— P. 263—303.
6. *Deny J., Lelong P.* Etude des fonctions sousharmoniques dans un cylindre ou dans un cone / Bull. Soc. math. France.— 1947.— 75.— P. 89—112.
7. *Noverraz Ph.* Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces vectoriels topologiques complexes // Ann. Inst. Fourier.— 1969.— 19, N 2.— P. 419—493.
8. *Тамразов П. М.* Почти субгармонические функции, их аналоги в комплексных про-

странствах и стирание особенностей.— Киев, 1987.— 23 с.— (Препринт / АН УССР Ин-т математики; 87.32).
9. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.— М. : Наука, 1966.— 516 с.
10. *Cegrell U.* Removable singularities for plurisubharmonic functions and related problems // Proc. London Math. Soc.— 1978.— **36**, N 2.— P. 310—336.
11. *Lelong P.* Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques // Lect. Notes Math.— 1968.— N 71.— P. 167—190.
12. *Шефер X.* Топологические векторные пространства.— М. : Мир, 1971.— 359 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 14.10.87