УДК 517.977.58

В. В. Гусар

О сплайн-управляемости и приближенном нахождении оптимального сплайн-управления

Рассматривается задача минимизации квадратичного функционала

$$J = \int_{t_0}^{T} [(P(t)x, x) + q(t)u^2]\,dt \tag{1}$$

на решениях квазилинейной системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u + \varepsilon f(t, x), \tag{2}$$

удовлетворяющих краевым условиям

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_T. \tag{3}$$

Здесь $x \in R^n$, $A(t)$ и $b(t)$ — известные матричные функции размерности $n \times n$ и $n \times 1$ соответственно, $f(t, x)$ — n-мерная вектор-функция, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, для простоты изложения управление u взято скалярным, $q(t) > 0$, $(P(t)h, h) \geqslant 0$ $\forall h \in R^n$, $t \in [t_0, T]$.

Пусть на отрезке $[t_0, T]$ задано разбиение $\Delta_N : t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$. Множество всех сплайн-функций порядка r по разбиению Δ_N обозначим через $S_r(\Delta_N)$. Известно [1, с. 22], что всякий сплайн $S(t) \in S_r(\Delta_N)$ можно представить в виде

$$s(t) = \sum_{i=\omega_r}^{\Omega_r} B_{r,i}(t)\,u_{r,i}, \tag{4}$$

где $B_{r,i}(t)$ — B-сплайны [1] порядка r по расширенной сетке $\Delta_{N_1} = \{t_{-r} < \ldots \ldots < t_0 < \ldots < t_N < \ldots < t_{N+r}\}$, $\Omega_r = N + [(r-1)/2]$, $\omega_r = -[r/2]$.

Управление $u(t)$ назовем допустимым, если $u(t) \in S_r(\Delta_N)$ и решения системы (2) удовлетворяют краевым условиям (3).

Управление $u^0(t)$ назовем сплайн-оптимальным, если среди всех допустимых управлений $u(t)$ по данному разбиению Δ_N $J(u^0) \leqslant J(u)$.

1. Рассмотрим вопрос существования допустимого управления. Представим сплайн-управление в виде

$$u(t) = B_r(t)\,\bar{u}, \tag{5}$$

где $\bar{u}$ — постоянный вектор, $\bar{u} \in R^{N_1}$, $N_1 = N + r$, $B_r(t)$ — сплайн-матрица размерности $1 \times N_1$ с элементами $B_{r,i}(t)$. Тогда решение задачи Коши для уравнения (2) при $\varepsilon = 0$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ можно записать так:

$$x(t) = K(t, t_0)\, x_0 + \Gamma(t)\, \bar{u}. \tag{6}$$

Здесь $K(t, s)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)\, x$, $\Gamma(t) = \int\limits_{t_0}^{t} K(t, s)\, b(s) \times$ $\times\, B_r(s)\, ds$ — матрица-функция размерности $n \times N_1$. Если $E_{r,i}(t)$ — пересечение отрезка $[t_0, t]$ с носителем сплайна $B_{r,i}(t)$, то матрица $\Gamma(t)$ состоит из столбцов $g_i(t) = \int\limits_{E_{r,i}} K(t, s)\, b(s)\, B_{r,i}(s)\, ds$.

Из (6) следует, что для выполнения условия $x(T) = x_T$ вектор $\bar{u}$ должен удовлетворять уравнению

$$\Gamma(T)\, \bar{u} = x_T - K(T, t_0)\, x_0. \tag{7}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Если строки матрицы $K(T, t)\, b(t)$ есть линейно независимые функции при $t \in [t_0, T]$, то для любого $N > n$ и $r \geqslant 0$ существует по меньшей мере одно разбиение Δ_N отрезка $[t_0, T]$ такое, что матрица*

$$\Gamma(T) = \int\limits_{t_0}^{T} K(T, t)\, b(t)\, B_r(t)\, dt$$

имеет n линейно независимых строк.

Доказательство. Отметим, что при линейной независимости функций $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ на $[t_0, T]$ также линейно независимы и функции $\int\limits_{t_0}^{t} f_1(s)\, ds$, $\int\limits_{t_0}^{t} f_2(s)\, ds, \ldots, \int\limits_{t_0}^{t} f_n(s)\, ds$. Следовательно, линейно независимыми функциями будут также функции, полученные $r+1$ кратным интегрированием $f_1^{(-r-1)}(t), \ldots, f_n^{(-r-1)}(t)$, т. е.

$$f_i^{(-r-1)}(t) = \frac{1}{r!} \int\limits_{t_0}^{T} (t - \tau)_+^r f_i(\tau)\, d\tau,$$

где усеченная степенная функция

$$(t - \tau)_+^r = \begin{cases} (t - \tau)^r, & \text{при } t - \tau \geqslant 0; \\ 0, & \text{при } t - \tau < 0. \end{cases}$$

Тогда для n линейно независимых функций $f_i^{(-r-1)}(t)$ найдется n точек $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < T$ таких, что определитель

$$D = \begin{vmatrix} \int\limits_{t_0}^{T} (t_1 - \tau)_+^r f_1(\tau)\, d\tau & \ldots & \int\limits_{t_0}^{T} (t_n - \tau)_+^r f_1(\tau)\, d\tau \\ \vdots & & \vdots \\ \int\limits_{t_0}^{T} (t_1 - \tau)_+^r f_n(\tau)\, d\tau & \ldots & \int\limits_{t_0}^{T} (t_n - \tau)_+^r f_n(\tau)\, d\tau \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Известно [1], что сплайны $B_{r,i}(t)$ можно представить в виде линейной комбинации усеченных степенных функций по данному разбиению. Следовательно, отличен от нуля и определитель

$$D_1 = \begin{vmatrix} \int\limits_{t_0}^{T} f_1(\tau) B_{r,\omega_r}(\tau)\, d\tau & \dots & \int\limits_{t_0}^{T} f_1(\tau) B_{r,k}(\tau)\, d\tau \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \int\limits_{t_0}^{T} f_n(\tau) B_{r,\omega_r}(\tau)\, d\tau & \dots & \int\limits_{t_0}^{T} f_n(\tau) B_{r,k}(\tau)\, d\tau \end{vmatrix},$$

столбцы которого являются линейными комбинациями столбцов определителя D (здесь $k = \omega_r + n - 1$).

Легко видеть, что определитель D_1 составлен из первых n столбцов матрицы $\Gamma(T)$ при $f(\tau) = K(T, \tau)\, b(\tau)$. Лемма доказана.

Следует отметить, что при $N = n$ линейной независимости строк матрицы $K(T, t)\, b(t)$ недостаточно для того, чтобы $\operatorname{rank} \Gamma(T) = n$. В частности, неверны теоремы 1 и 2 в работе [2], что показывает следующий пример.

Система $\dot{x} = Ax + bu$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, не является d — управляемой на $[0, 2\pi]$ (что соответствует случаю $r = 0$, $N = n = 2$), поскольку, несмотря на линейную независимость строк матрицы $K(2\pi, t)\, b = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, для любого $t_1 \in (0, 2\pi)$ матрица

$$\Gamma(2\pi) = \begin{pmatrix} \int\limits_0^{t_1} \cos t\, dt & \int\limits_{t_1}^{2\pi} \cos t\, dt \\ \int\limits_0^{t_1} \sin t\, dt & \int\limits_{t_1}^{2\pi} \sin t\, dt \end{pmatrix}$$

вырождена.

Легко показать, что условие линейной независимости строк матрицы $K(T, t)\, b(t)$ является необходимым для управляемости линейной системы. Действительно, пусть линейная система управляема на отрезке $[t_0, T]$, но строки матрицы $K(T, t)\, b(t)$ линейно зависимы. Тогда существует ненулевой вектор $\lambda \in R^n$ такой, что при $t = T$

$$((x_T - K(T, t_0)\, x_0), \lambda) = \int\limits_{t_0}^{T} (K(T, s)\, b(s), \lambda)\, u(s)\, ds = 0.$$

Понятно, что для любых $x_T \in R^n$ это невозможно.

Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *При $N > n$ линейная система*

$$\dot{x} = A(t)\, x + b(t)\, u \qquad (*)$$

сплайн-управляемая на отрезке $[t_0, T]$ тогда и только тогда, когда строки матрицы $K(T, t)\, b(t)$ линейно независимы.

2. Перейдем к нахождению оптимального сплайн-управления для линейной системы

$$\dot{x} = A(t)\, x + b(t)\, u + \varphi(t). \qquad (8)$$

Известно [3], что задача минимизации функционала (1) на решениях системы (8) может быть сведена к задаче типа Ляпунова. Для этого запишем решение задачи Коши для уравнения (8) с начальным условием $x(t_0) = x_0$:

$$x(t) = K(t, t_0)\, x_0 + \Gamma(t)\, \bar{u} + \int\limits_{t_0}^{t} K(t, s)\, \varphi(s)\, ds. \qquad (9)$$

При подстановке этого решения в функционал (1) имеем задачу Ляпунова

$$J(\bar{u}) = \int_{t_0}^{T} F(t, \varphi(t), \bar{u})\, dt \to \inf$$

при ограничении

$$\Gamma(T)\bar{u} = x_T - K(T, t_0)\, x_0 - \int_{t_0}^{T} K(T, t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{10}$$

Ясно, что при выборе управления в виде сплайна эта задача сводится к конечномерной задаче на условный экстремум

$$J(\bar{u}) = F_1(T, t_0, \varphi) + 2\left(\int_{t_0}^{T} \Gamma^*(t)\, P(t)\, \bar{x}(t)\, dt, \bar{u}\right) + (\Phi(T, t_0)\bar{u}, \bar{u}) \to \inf$$

при условии (10). Здесь $\bar{x}(t)$ — решение задачи Коши $\dot{x} = A(t)\,x + \varphi(t)$, $x(t_0) = x_0$, $F_1(T, t_0, \varphi)$ — число, не зависящее от $\bar{u}$, и

$$\Phi(T, t_0) = \int_{t_0}^{T} (\Gamma^*(t)\, P(t)\, \Gamma(t) + q(t)\, B_r^*(t)\, B_r(t))\, dt,$$

$*$ означает транспонирование. Так как в функционале (1) матрица $P(t)$ — симметрическая, неотрицательно определенная, $q(t) > 0$ $\forall t \in [t_0, T]$, то $\Phi(T, t_0)$ — симметрическая положительно определенная матрица.

Применяя метод Лагранжа, для определения векторов $\bar{u}$ и $\bar{\lambda} \in R^n$ ($\bar{\lambda}$ — вектор множителей Лагранжа), получаем линейную систему уравнений

$$\left(\begin{array}{c|c} \Phi(T, t_0) & \Gamma^*(T) \\ \hline \Gamma(T) & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \bar{u} \\ \hline \bar{\lambda} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} -\int_{t_0}^{T} \Gamma^*(t)\, P(t)\, \bar{x}(t)\, dt \\ \hline x_T - \bar{x}(T) \end{array}\right). \tag{11}$$

Определитель блочной матрицы этой системы W [4] $\det W = -\det \Phi \times \times \det(\Gamma(T)\, \Phi^{-1}\Gamma^*(T))$ отличен от нуля ввиду положительной определенности матрицы $\Phi(T, t_0)$ и теоремы 1. Очевидно, что выполнены также и достаточные условия существования экстремума.

Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для данного разбиения Δ_N отрезка $[t_0, T]$ и $N > n$ система* ($*$) *сплайн-управляема, $q(t) > 0$, $P(t)$ — неотрицательно определенная, симметрическая, $b(t)$, $\varphi(t)$, $A(t)$ непрерывны на $[t_0, T]$.*

Тогда существует единственное оптимальное сплайн-управление для задачи (1), (8), (3) $u(t) = B_r(t)\bar{u}$, *где $\bar{u}$ находится из системы* (11).

Пользуясь аналогичными построениями, укажем метод нахождения допустимого сплайн-управления для квазилинейной системы (2).

Рассмотрим итерационный процесс

$$\left(\begin{array}{c} \bar{u}_{k+1} \\ \hline \lambda_{k+1} \end{array}\right) = W^{-1}\left(\begin{array}{c} -\int_{t_0}^{T} \Gamma^*(t)\, P(t)\left(K(t, t_0)\, x_0 + \varepsilon_k \int_{t_0}^{t} K(t, s)\, f(s, x_k(s))\, ds\right) dt \\ \hline x_T - K(T, t_0)\, x_0 - \varepsilon_k \int_{t_0}^{T} K(T, s)\, f(s, x_k(s))\, ds \end{array}\right),$$

$$x_{k+1}(t) = K(t, t_0)\, x_0 + \Gamma(t)\, \bar{u}_{k+1} + \varepsilon_k \int_{t_0}^{t} K(t, s)\, f(s, x_k(s))\, ds, \tag{12}$$

где

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ \varepsilon & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$$

Используя рассуждения, аналогичные приведенным в работе [2], нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть*:

1) *линейная система* (*) *при данном* Δ_N *сплайн-управляема*;

2) *функция* $f(t, x)$ *непрерывна по* t *и по* x *в некоторой замкнутой области* G *пространства* $R \times R^n$: $G = \{(t, x) : t \in [t_0, T],\ \|x\| \leqslant r_1\}$; *здесь* $r_1 > r^0 = \sigma |x_0| [1 + \gamma\psi(1 + \gamma ph)] + \gamma\psi |x_T|$, $\sigma = \|K\|$, $\gamma = \sigma b$, $\psi = |W^{-1}|$, $h = T - t_0$, $p = \|P\|$, $b = \|b\| \left\| \int\limits_{t_0}^{t} B_r(s)\, ds \right\|$, $|\cdot|$ — *евклидова норма*, $\|\cdot\| = \max\limits_t |\cdot|$;

3) $\forall (t, x)$ *и* $(t, y) \in G$ $|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant \mu |x - y|$,

4) $\varepsilon < \varepsilon^0 = \min\{\delta/F, 1/\mu\}/(\sigma h(1 + \gamma\psi(1 + \gamma ph/2)))$, *где* $F = \max\limits_{(t,x)\in G} |f(t, x)|$, $\delta = r_1 - r^0$.

Тогда квазилинейная система (2) *сплайн-управляема, допустимое управление* $u^1(t) = B_r(t)\bar{u}^1$ *может быть найдено с помощью итераций* (12).

3. Докажем существование оптимального сплайн-управления в задаче (1)—(3).

Пусть $u^1(t)$ — допустимое сплайн-управление. Тогда из того, что $(P(t)h, h) \geqslant 0$ $\forall h \in R^n$, $q(t) > 0$, следует эквивалентность исходной задачи задаче (1) — (3) при ограничении $\int\limits_{t_0}^{T} q(t) u^2 dt \leqslant J(u^1)$. Отсюда с учетом положительной определенности матрицы $\int\limits_{t_0}^{T} q(t) B_r^*(t) B_r(t)\, dt$ следует, что найдется $R_0 > 0$ такое, что последнее ограничение примет вид $|\bar{u}|^2 \leqslant R_0$. Следовательно, $|u(t)| \leqslant \|B_r\| |\bar{u}| \leqslant R_1$. Кроме того, если $|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant \mu |x - y|$ и $\|f(\cdot, 0)\| = f^0$, то $|(x, (A(t)x + b(t)u + \varepsilon f(t, x)))| \leqslant c_1 |x|^2 + c_2$, где $c_1 = \|A\| + \|b\| R_1 + \varepsilon\mu + \varepsilon f^0$, $c_2 = (\|b\| R_1 + \varepsilon f^0)/4$, для всех $t \in [t_0, T]$.

Нетрудно проверить, что функция $h(t, x, y) = \inf\{q(t)u^2 + (P(t)x, x) \mid u \in S_r(\Delta_N),\ |u| \leqslant R_1,\ A(t)x + b(t)u + \varepsilon f(t, x) = y\}$ выпукла по y.

Из этих фактов и теоремы 3 [5, с. 388—389] следует существование оптимального сплайн-управления в исходной задаче.

Для нахождения оптимального сплайн-управления используем необходимые условия в форме принципа минимума [3].

Из условия стационарности по x следует уравнение

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi + P(t)x - \varepsilon f_x^*(t\ x)\psi, \tag{13}$$

где $\psi \in R^n$ — вспомогательная переменная.

Условие оптимальности по u

$$\min_{\bar{u}} \mathscr{L}(\bar{u}, x, \psi) \to \partial\mathscr{L}/\partial\bar{u} = 0,$$

где

$$\mathscr{L}(\bar{u}, x, \psi) = \int\limits_{t_0}^{T} \{\lambda_0 (P(t)x, x) + \lambda_0 (q(t) B_r^*(t) B_r(t)\bar{u}, \bar{u}) + (\psi, (\dot{x} - A(t)x - b(t) B_r(t)\bar{u} - \varepsilon f(t, x)))\}\, dt,$$

приводит к связи между ψ и $\bar{u}$

$$\bar{u} = Q^{-1} \int\limits_{t_0}^{T} B_r^*(t) b^*(t) \psi(t)\, dt. \tag{14}$$

Здесь $Q = \int\limits_{t_0}^{T} q(t) B_r^*(t) B_r(t)\, dt$ — положительно определенная, симметрическая матрица размерности $N_1 \times N_1$, $\lambda_0 = 1/2$ [3].

Таким образом, имеем систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -A^*(t)\psi + P(t)x - \varepsilon f_x^*(t,x)\psi,\\ \dot{x} &= A(t)x + b(t)B_r(t)Q^{-1}\int_{t_0}^{T} B_r^*(t)b^*(t)\psi(t)\,dt + \varepsilon f(t,x),\end{aligned} \tag{15}$$

с краевыми условиями $x(t_0)=x_0$, $x(T)=x_T$.

Перепишем систему (15) в интегральной форме:

$$\psi(t) = K^*(T,t)\psi(T) - \int_{t}^{T} K^*(s,t)[P(s)x(s) - \varepsilon f_x^*(s,x(s))\psi(s)]\,ds, \tag{16}$$

$$x(t) = K(t,t_0)x_0 + \Gamma(t)Q^{-1}\int_{t_0}^{T} B_r^*(t)b^*(t)\psi(t)\,dt + \varepsilon\int_{t_0}^{t} K(t,s)f(s,x(s))\,ds, \tag{17}$$

где $K^*(s,t)$ — матрица Коши сопряженной системы $\dot{x} = -A^*(t)x$, $K^*(s,t) = (X^{-1}(t))^*(X(s))^*$, $X(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$.

Учитывая условие $x(T)=x_T$ и принимая во внимание (14) и (16), имеем

$$\psi(T) = M^{-1}\Big(\Gamma(T)Q^{-1}\int_{t_0}^{T} B_r^*(t)b^*(t)\int_{t}^{T} K^*(s,t)[P(s)x(s) - \varepsilon f_x^*(s,x(s))\psi(s)]\,ds\,dt + x_T - K(T,t_0)x_0 - \varepsilon\int_{t_0}^{T} K(T,t)f(t,x(t))\,dt\Big). \tag{18}$$

Здесь матрица $M = \Gamma(T)Q^{-1}\Gamma^*(T)$ положительно определенная, симметрическая ввиду теоремы 1.

Обозначим через C^0 пространство непрерывных на $[t_0, T]$ функций $z(t) = (x(t), \psi(t), \psi_T)^*$ с векторной нормой [6] $\|z\|_0 = \begin{pmatrix} \|x\| \\ \|\psi\| \\ |\psi_T| \end{pmatrix}$. Легко проверить, что C^0 — банахово пространство. Через $S = \{z(t)\in C^0 : \|z\|_0 \leqslant \rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)^*\}$ обозначим шар в этом пространстве радиуса ρ и определим на S оператор $R = (R_1, R_2, R_3)^*$ равенствами

$$R_1(z) = K(t,t_0)x_0 + \Gamma(t)Q^{-1}\int_{t_0}^{T} B_r^*(t)b^*(t)\psi(t)\,dt + \varepsilon\int_{t_0}^{t} K(t,s)f(s,x(s))\,ds,$$

$$R_2(z) = K^*(T,t)\psi_T - \int_{t}^{T} K^*(s,t)[P(s)x(s) - \varepsilon f_x^*(s,x(s))\psi(s)]\,ds,$$

$$R_3(z) = M^{-1}\Big\{\Gamma(T)Q^{-1}\int_{t_0}^{T} B_r^*(t)b^*(t)\int_{t}^{T} K^*(s,t)[P(s)x(s) - \varepsilon f_x^*(s,x(s))\psi(s)]\,ds\,dt + x_T - K(T,t_0)x_0 - \varepsilon\int_{t_0}^{T} K(T,s)f(s,x(s))\,ds\Big\}.$$

Легко видеть, что если выполнены условия

а) $|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant \mu|x-y|$,
б) $|f_x(t,x) - f_x'(t,y)| \leqslant l|x-y|$,
в) $|f_x(t,x)| \leqslant \mu$, $\forall x,y : \|\cdot\| \leqslant \rho_1$, $t\in[t_0,T]$. то разрешимость системы (15) с краевыми условиями эквивалентна разрешимости операторного уравнения

$$R(z) = z. \tag{19}$$

Пусть с учетом обозначений теоремы 3 $q = 1/|Q^{-1}|$, $\nu = 1/|M^{-1}|$, $a = 1 + \sigma^2 b^2/(\nu q)$, $\alpha = \varepsilon h \sigma \mu$, $\bar{p} = p$. Легко проверить, что если h и $\alpha < 1$ удовлетворяют неравенству

$$1 + \alpha^2 a - 2\alpha a - h\bar{p}a(a-1)\nu > 0, \tag{20}$$

то спектр матрицы

$$V = \begin{pmatrix} \alpha & \sigma b^2/q & 0 \\ \sigma \bar{p} h & \alpha & \sigma \\ (a-1)h\bar{p} + \alpha/\nu & (a-1)h\varepsilon\mu & 0 \end{pmatrix}$$

лежит внутри единичного круга.

Выберем вектор $\rho > 0$ так, чтобы $\rho \geqslant (I - V)^{-1}\eta$, где $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^*$, $\eta_1 = \sigma|x_0| + \varepsilon\sigma h f^0$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = (|x_T| + \sigma|x_0| + \varepsilon\sigma h f^0)/\nu$. Пусть $m_1 = 1 + l\rho_2/(2a\sigma\mu)$.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 4. *Пусть*:

1) *выполнены условия теоремы* 2;

2) *для функции* $f(t, x)$ *выполнены условия* б) *и* в);

3) $h < 1/(a\nu p(a-1))$.

Тогда при $\varepsilon < (m_1 - \sqrt{m_1^2 + (a-1)p\nu h - 1/a})/(\mu\sigma h)$ *в шаре* S *существует единственное решение уравнения* (19), *а значит, и задачи* (15) *с условиями* (3). *Это решение можно получить методом последовательных приближений* $z_{k+1} = R(z_k)$, *начиная с любого* $z_0 \in S$. *Сплайн-управление* $u^0(t) = B_r(t)\bar{u}$, где

$$\bar{u} = Q^{-1}\int_{t_0}^{T} B_r^*(t)\, b^*(t) \lim_{k\to\infty} \psi_k(t)\, dt$$

будет сплайн-оптимальным для задачи (1) — (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\|R_1(z)\| \leqslant \sigma|x_0| + \sigma b^2\|\psi\|/q + \varepsilon\sigma\mu h\|x\| + \varepsilon\sigma h f^0,$$

$$\|R_2(z)\| \leqslant \sigma|\psi_T| + \sigma p h\|x\| + \varepsilon\sigma\mu h\|\psi\|,$$

$$\|R_3(z)\| \leqslant (\sigma^2 b^2 h(p\|x\| + \varepsilon\mu\|\psi\|)/q + |x_T| + \sigma|x_0| + \varepsilon\sigma\mu h\|x\| + \varepsilon\sigma h f^0)/\nu.$$

Таким образом, $\forall z(t) \in S$ $\|R(z)\|_0 \leqslant V\|z\|_0 + \eta \leqslant \rho$, т. е. оператор R преобразует шар S в себя.

Так же для любых $z(t)$, $\hat{z}(t) \in S$ имеем $\|R(z) - R(\hat{z})\|_0 \leqslant V_1\|z - \hat{z}\|_0$, где матрица V_1 отличается от V тем, что $\bar{p} = p + \varepsilon l \rho_2$. Так как спектр V_1 ввиду выбора h и ε лежит внутри единичного круга, то оператор R на шаре S является оператором сжатия. В силу обобщенного принципа сжимающих отображений [6] заключаем о справедливости первой части теоремы.

Оптимальность $u^0(t)$ следует из доказанного выше существования оптимального сплайн-управления для задачи (1)—(3) и единственности решения в шаре S краевой задачи (15). Теорема доказана.

З а м е ч а н и я 1. При $P(t) \equiv 0$ ограничение на длину h отрезка $[t_0, T]$ снимается, а утверждения теоремы 4 справедливы при $\varepsilon < (m_1 - \sqrt{m_1^2 - 1/a})/(\mu\sigma h)$.

2. В рассмотренной задаче управление $u(t)$ взято скалярным. Если $u \in R^m$, то сплайн-управления можно строить покомпонентно. В частности, если n — число узлов для компоненты $u_i(t)$, лежащих внутри интервала (t_0, T), то $n_i \geqslant 1$ и $\sum_{i=1}^{m} n_i \geqslant n$. При этом общее количество узлов $N > n + m - 1$, $\bar{u} \in R^{N_1}$, $N_1 > n + m + r - 1$.

1. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И. Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций.— М. : Наука, 1980.— 352 с.
2. *Nguyen Thanh Bang*. Numerical solution of the *d*-control problem for nonlinear systems// Arch. automat. i telemech.— 1983.— **28**, N 3-4.— P. 131—143.
3. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление.— М. : Наука, 1979.— 432 с.
4. *Лефшец С.* Устойчивость нелинейных систем автоматического управления.— М.: Мир, 1967.— 184 с.
5. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач.— М. : Наука, 1974.— 480 с.
6. *Перов А. И., Кибенко А. В.* Об одном общем методе исследования краевых задач // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1966.— **30**, вып. 2.— С. 249—264.

Днепродзерж. индустр. ин-т

Получено 08.07.86