УДК 517.938

О. Ю. Романенко, О. М. Шарковський (Ін-т математики НАН України, Київ)

ВІД ОДНОВИМІРНИХ ДО НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ: ІДЕАЛЬНА ТУРБУЛЕНТНІСТЬ

There is a very short chain that joins dynamical systems with the simplest phase space (real line) and dynamical systems with the "most complicated" phase space containing random functions. This statement is justified in this paper. By "simple" examples of dynamical systems (one-dimensional and two-dimensional boundary-value problems), we consider notions that generally characterize the phenomenon of turbulence — first of all, the formation of structures (including the cascade process of birth of coherent structures of decreasing scales) and self-stochasticity.

Існує дуже короткий ланцюжок, що з'єднує динамічні системи з найпростішим фазовим простором — дійсною прямою та динамічні системи з „найскладнішим" фазовим простором, який містить і випадкові функції. Саме про це й іде мова в даній статті. На простих прикладах — одно- та двовимірних граничних задачах — розглядаються поняття, які звичайно характеризують явище турбулентності як таке, насамперед: утворення структур (в тому числі каскадний процес народження когерентних структур спадаючих масштабів) та автостохастичність.

„ ... явления во всей их сложности легко и поразительно получаются из простых уравнений, которые описывают их. Не подозревая о возможностях простых уравнений, люди часто заключают, что для объяснения всей сложности мира требуется нечто данное от Бога, а не просто уравнения".

Фейнман, Лейтон, Сэндс.
Фейнмановские лекции по физике,
т. 7, с. 271–272.

Вступ. Останні тридцять років — період інтенсивного розвитку різних напрямків теорії динамічних систем і, зокрема, теорії одновимірних динамічних систем.

Ще наприкінці 60-х та у першій половині 70-х років більшість математиків, які мали відношення до теорії динамічних систем, а також фізики та дослідники з інших спеціальностей, які мали б користуватися цією теорією, не вважали динамічні системи на дійсній прямій чимось, що заслуговує на їхню серйозну увагу [1]. Таке ставлення почало докорінно мінятися з середини 70-х років завдяки ряду робіт, що привернули до себе увагу новими підходами, новими поняттями (це і „дивний атрактор" [2], і „хаос" [3], і різні „універсальні" властивості динамічних систем, наприклад, як в [4–7]).

Зараз теорія одновимірних динамічних систем посідає особливе місце. Це обумовлено кількома причинами. По-перше, одновимірна динаміка завдяки відносній простоті фазового простору і „законів управління" являє собою розвинуту теорію, багату на глибокі результати і ефективні критерії, з простим і наочним комп'ютерним експериментом. По-друге, одновимірні системи мають широкий спектр динамічної поведінки — від стійких нерухомих точок до режимів, при яких цілком детермінована поведінка траєкторій практично не відрізняється від випадкових процесів; з точки зору дескриптивної теорії множин вони настільки ж складні, як і динамічні системи на довільних компактах [8]. По-третє, для широкого кола науковців (і взагалі, для всіх, хто знайомиться з законами навколишнього світу) одновимірні системи становлять неабиякий феноменологічний інтерес: вони надають унікальну можливість для детального і глибокого дослідження систем, особливо систем зі складною поведінкою, допомагають зрозуміти загальні закономірності виникнення і розвитку реальних динамічних процесів від зовсім простих до хаотичних і навіть турбулентних. Теорія одновимірних систем є одним з основних елементів хаотичної динаміки, тепер вона є обов'язковою частиною підручників з теорії динамічних систем.

Багатообіцяючим напрямком розповсюдження досягнень одновимірної ди-

© О. Ю. РОМАНЕНКО, О. М. ШАРКОВСЬКИЙ, 1996

наміки є її застосування до вивчення нелінійних граничних задач математичної фізики, зокрема для моделювання детермінованого (або динамічного) хаосу і, як наслідок, виявлення внутрішніх джерел самозародження хаотичних еволюцій у детермінованих системах (тобто системах, у яких початкові стани та динаміка станів описуються детермінованими законами). Результати досліджень у цьому напрямку і пропонуються в даній статті. Формально — це короткий огляд деяких ідей та результатів авторів статті та їх колег, одержаних, головним чином, на протязі останніх 5-ти років [9–28].

Як правило, появу детермінованого хаосу пов'язують з тим, що динамічна система має надто складний (дивний (strange)) атрактор. При цьому головним чином вдається моделювати хаос найпростішого типу — часовий хаос, коли динаміка станів системи через великий проміжок часу стає „квазівипадковою", практично незалежною від початкового стану. У монографії [13] запропоновано дещо відмінний погляд на розвиток детермінованої випадковості (який, звичайно, не відкидає сценарій, що грунтується на теорії дивних атракторів): показано, що хаотична поведінка може мати місце також і в динамічних системах з простими атракторами (нерухомими точками і циклами), але у цих випадках самі „точки" атрактора мають дуже складну внутрішню структуру (звичайно, для цього динамічна система має бути нескінченновимірною). Цей підхід дозволяє за допомогою відносно простих засобів — одно- чи двовимірних граничних задач: лінійних рівнянь з нелінійними граничними умовами — моделювати просторово-часовий хаос, коли стани системи стають „квазівипадковими" із зростанням часу.

В рамках цього підходу ми пропонуємо математичний формалізм для опису *процесів структуроутворення* (адже розвиток хаосу в реальних середовищах, як правило, завдячує каскадному процесу виникнення структур спадаючих масштабів аж до масштабу, що „дозволяється" внутрішнім опором середовища) та описуємо *явище автостохастичності*, яке, якщо коротко, полягає в тому, що хаос у детермінованій системі допускає ймовірнісний опис (такий хаос називаємо стохастичним).

Застосування запропонованих загальних положень розглянемо на прикладі динамічних систем, породжених

різницевими рівняннями з неперервним часом

$$y(x+1) = f(y(x)), \quad x \in R^+, \tag{1}$$

граничними задачами з однією просторовою змінною

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \tag{2}$$

$$a_1 > 0, \quad a_2 < 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in R^+,$$

$$u_1 = u_2|_{x=0}, \quad u_1 = f(u_2)|_{x=1}, \tag{3}$$

граничними задачами з двома просторовими змінними

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \tag{4}$$

$$a_{12} > 0, \quad a_{22} < 0, \quad x = (x_1, x_2) \in R \times [0,1], \quad t \in R^+,$$

$$u_1 = u_2|_{x_2=0}, \quad u_1 = f(u_2)|_{x_2=1}, \tag{5}$$

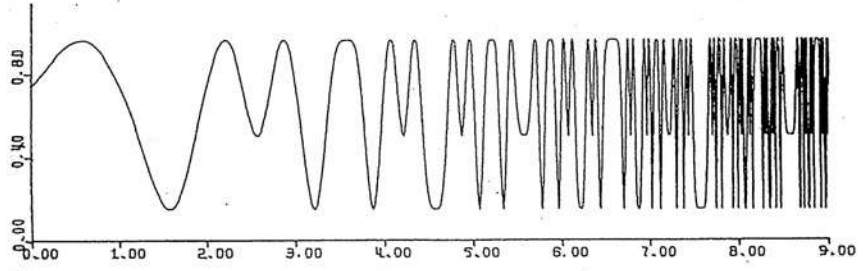
де $f \in C^1(I, I)$ — задане нелінійне відображення деякого замкненого інтервалу $I \subset R$.

Привабливість цих задач полягає в тому, що, з одного боку, їх можна досить детально проаналізувати, а з другого — їх розв'язки напрочуд точно відобража-

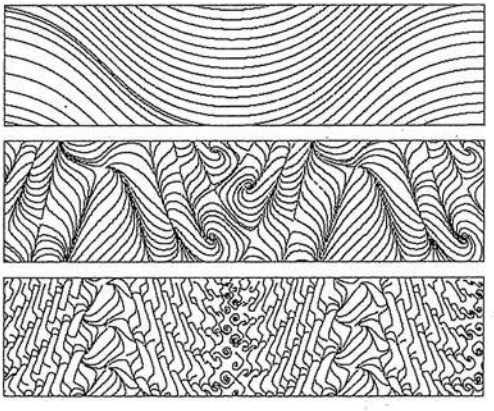
ють багато з рис реальної турбулентності (див. мал. 1 і 2). Перше є результатом того, що всі три задачі або безпосередньо (як рівняння (1)), або через редукцію до рівнянь типу (1) (як задачі (2), (3) і (4), (5)) зводяться до одновимірної динамічної системи, що задається відображенням f. Друге пояснюється тим, що для одновимірних відображень басейни притягування атракторів, а часто й самі атрактори мають дуже складну структуру.

Розгляд динаміки розв'язків задач (1)–(5) доцільно супроводжувати її візуалізацією. Не маючи тут такої можливості, ми змушені обмежитися двома малюнками. На мал. 1 побудовано графік розв'язку рівняння (1) з $f\colon w \mapsto \mapsto \lambda w(1-w)$, $\lambda = = 3{,}83$. На будь-якому інтервалі $[t, t+1]$ кількість U-подібних ділянок на графіку зростає експоненціально при $t \to \infty$, а їх масштаби зменшуються. Розв'язок може імітувати каскадний процес утворення структур спадаючих масштабів, при якому зберігаються великомасштабні структури. Зокрема, в задачі (4), (5) це призводить до появи „ламінарних плям", що періодично поновлюються в „турбулентному потоці"

На мал. 2 [20, 26] зображено лінії течії векторного поля (u_1, u_2) для задачі (4), (5) з $f\colon w \mapsto 4w(1-w)$ при $t = 0$, 8 і 12. Із зростанням часу розвивається каскадний процес утворення структур спадаючих масштабів, який супроводжується руйнуванням великомасштабних структур і стохастизацією векторного поля.



Мал. 1



Мал. 2

1. Нескінченновимірні динамічні системи з некомпактними траєкторіями. ***Основна ідея. Ідеальна турбулентність.*** Серед граничних задач, які є математичними моделями турбулентних процесів, можна виділити два основні класи: 1) задачі для рівнянь з частинними похідними параболічного типу (як, наприклад, рівняння Нав'є – Стокса в гідродинаміці); 2) задачі для рівнянь гіперболічного типу (які є типовими для електродинаміки).

Граничні задачі обох цих класів можуть породжувати нескінченновимірні динамічні системи

$$\{C^k(D, R^m), T, S^t\}, \tag{6}$$

де $C^k(D, R^m)$, $k \geq 0$, — простір C^k-функцій $\varphi: D \to R^m$, $D \subset R^l$, $m, l > 0$, $T = R^+$ або Z^+, S^t — оператор зсуву (за час t) вздовж розв'язку граничної задачі.

Фазовий простір C^k а ріюгі оснащений C^k-метрикою, але з цією „традиційною" метрикою він є некомпактним. Тому може статися, що для деяких (а можливо, і для майже всіх) $\varphi \in C^k$ відповідна траєкторія $S^t[\varphi]$ некомпактна і, як наслідок, або взагалі не має (непорожньої) ω-граничної множини в C^k або, якщо і має, то ця ω-гранична множина є некомпактною і неповністю характеризує асимптотичні властивості траєкторії. Для граничних задач першого класу траєкторії, як правило, є компактними, а для другого — в багатьох випадках, навпаки, некомпактними. Саме некомпактність траєкторій часто є причиною виникнення турбулентності в задачах другого класу.

Термін „турбулентність", що спершу з'явився в гідродинаміці і застосовувався виключно до течії рідин та газів, тепер розуміють і у широкому сенсі як хаотичні флуктуації (тобто вкрай нерегулярні зміни в просторі та часі) тих чи інших характеристик будь-яких суцільних середовищ. Ми вживаємо термін „турбулентність" саме в такому широкому розумінні стосовно до граничних задач другого класу. Ці задачі, взагалі кажучи, не мають безпосереднього відношення до гідродинаміки, але часто зустрічаються при дослідженні електромагнітних полів (наприклад, як в [19, 21, 22, 27]). При цьому йдеться про ідеальну турбулентність, тобто турбулентність в ідеальних (без внутрішнього опору) середовищах. Якщо використати аналогію з гідродинамікою, то ідеальна турбулентність — це турбулентність у „сухій" воді (за термінологією фон Неймана); з цієї причини вона спочатку була названа „сухою турбулентністю" [10, 11]. Вивчення математичних механізмів ідеальної турбулентності дозволяє зробити суттєвий крок до розуміння загальних закономірностей реальних турбулентних процесів.

Отже розглянемо динамічну систему (6), вважаючи, що вона має некомпактні траєкторії. Щоб дослідити її асимптотичну поведінку, слід поповнити фазовий простір за допомогою належної метрики з тим, щоб у новому просторі траєкторії були компактними. Підкреслимо, що головна проблема якраз і полягає у виборі метрики: використання тієї чи іншої метрики, як ми побачимо, дозволяє з меншою або з більшою точністю описати властивості траєкторії при $t \to \infty$.

Якщо у поповненому (за допомогою деякої метрики) фазовому просторі, який позначимо $\Theta(D, R^m)$, всі або майже всі траєкторії системи (6) мають і при тому компактні ω-граничні множини, можна запропонувати змістовне визначення атрактора системи. Існує багато різних версій поняття „атрактор" (див., наприклад, [29]), які відображають ті чи інші сторони колективної поведінки траєкторій. Ми будемо користуватися наступним означенням.

Означення 1 [16]. *Під атрактором динамічної системи* $\{C^k(D, R^m), T, S^t\}$ *будемо розуміти будь-яку множину у розширеному фазовому просторі* $\Theta(D, R^m)$, *яка є замиканням множини, що складається з* ω*-граничних множин майже всіх траєкторій системи.*

Термін „майже всі" тут і надалі означає, якщо не обумовлено інше, „доповнення до множини першої категорії відносно C^k-топології". Відмітимо, що динамічна система, як правило, може мати багато атракторів в сенсі означення 1, проте множини траєкторій, що притягуються різними атракторами, відрізняються мало — на множину першої категорії.

Для реалізації цього підходу в [13, 16–18] було використано дві метрики,

перша з яких дозволяє поповнити простір C^k напівнеперервними зверху функціями, а друга — випадковими функціями.

Означення 2. *Будемо говорити, що початковий стан дані з C^k породжує турбулентність, якщо траєкторія, що відповідає цьому стану, має в фазовому просторі, поповненому напівнеперервними зверху функціями, ω-граничну множину, яка містить, принаймні, одну напівнеперервну зверху функцію, графік якої має фрактальний вимір більший від його топологічного виміру. Будемо говорити, що початковий стан з C^r породжує сильну турбулентність, якщо у фазовому просторі, поповненому випадковими функціями, відповідна ω-гранична множина містить, принаймні, одну випадкову функцію.*

Компактифікація. Детермінована випадковість. Виходячи з наведених вище аргументів, ми маємо компактизувати фазовий простір $C^k(D, R^m)$ динамічної системи (6). Це можна зробити, вклавши $C^k(D, R^m)$ у деякий компактний простір. Який функціональний простір і з якою метрикою вибрати? Графік функції $(S^t[\varphi])(x)$, коли t зростає, стає все більш схожим на графік напівнеперервної зверху функції, яка діє з D у $(2^{R^m})_\Delta$, де $(2^{R^m})_\Delta$ — простір всіх непорожніх замкнених (у „звичайній" топології, що індукована евклідовою метрикою ρ) підмножин із R^m з метрикою Хаусдорфа

$$\Delta(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\rho(a, B), \sup_{b\in B}\rho(b, A)\right\}, \quad A,\ B \in 2^{R^m}. \tag{7}$$

Позначимо через $SC(D, 2^{R^m})$ простір напівнеперервних зверху функцій $\psi : D \to (2^{R^m})_\Delta$. Оскільки будь-яке відображення можна ототожнити з його графіком, то відображення $\Gamma:\ \psi \mapsto \operatorname{gr}\psi$ визначає взаємно однозначну відповідність

$$\Gamma:\ SC(D, 2^{R^m}) \to (D \times 2^{R^m})_\Delta. \tag{8}$$

Це дозволяє вибрати за метрику в просторі SC метрику, індуковану метрикою Δ, а саме

$$\rho^\Delta(\psi_1, \psi_2) = \Delta(\operatorname{gr}\psi_1, \operatorname{gr}\psi_2), \quad \psi_1, \psi_2 \in SC(D, 2^{R^m}). \tag{9}$$

Простір напівнеперервних зверху функцій ψ, оснащених метрикою ρ^Δ, позначимо через $SC_\Delta(D, 2^{R^m})$.

У просторі $SC_\Delta(D, 2^{R^m})$ збіжність послідовності функцій ψ_n до деякої функції ψ означає, що

$$\operatorname{lt}_{n\to\infty}\operatorname{gr}\psi_n = \operatorname{gr}\psi, \tag{10}$$

де lt позначає топологічну границю послідовності замкнених множин.

Нехай $E \subset R^m$ — компактна множина, $C^k(D, E)$ — фазовий простір системи (6) і $C^\Delta(D, E)$ — поповнення $C^k(D, E)$ в метриці ρ^Δ функціями з $SC_\Delta(D, 2^E)$. Кожна траєкторія динамічної системи (6) має в $C^\Delta(D, E)$ непорожню компактну ω-граничну множину, яку позначимо $\omega[\varphi]$, а отже, система (6) має атрактор (у сенсі означення 1). Якщо система (6) рівномірно неперервна відносно метрики ρ^Δ, то вона індукує (за неперервністю) динамічну систему

$$\{C^\Delta(D, E), T, S^t\} \tag{11}$$

і, зокрема, визначає рух (тобто дію півгрупи S^t) на атракторі.

Як вже відзначалося, типовою є ситуація, коли „точки" множини $\omega[\varphi]$, як функції $D \to R^m$, є багатозначними функціями. Це спричиняє, всупереч повній детермінованості, до неможливості на практиці точно визначити значення функції $(S^t[\varphi])(x)$ у деяких (або навіть у всіх) точках області D при великих значеннях t. Поясним це. Нехай $\psi \in \omega[\varphi]$, тобто існує послідовність $t_n \to \infty$, $n \to \infty$, така, що

$$\rho^{\Delta}(S^{t_n}[\varphi], \psi) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{12}$$

і нехай ψ, як функція $D \to R^m$, є багатозначною, скажімо, в точці $x^* \in D$, тобто $\psi(x^*)$ — відмінна від точки множина з R^m. З (12) випливає, що яким би малим не було $\varepsilon > 0$, починаючи з деякого n_ε, функція $S^{t_n}[\varphi]$ в ε-околі $V_\varepsilon(x^*)$ точки x^* повинна мати значення ε-близькі до кожної з точок множини $\psi(x^*)$, а саме

$$\rho^{\Delta}(S^{t_n}[\varphi](V_\varepsilon(x^*)), \psi(x^*)) < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geq n_\varepsilon.$$

Якщо ε не перевищує точність комп'ютерних обчислень (наприклад, 10^{-10} чи 10^{-20}), то окіл $V_\varepsilon(x^*)$ повинен сприйматися комп'ютером як одна точка, а обчислюване комп'ютером значення функції $S^{t_n}[\varphi]$ в „точці" $V_\varepsilon(x^*)$ може дорівнювати якому завгодно значенню з ε-близьких до $\psi(x^*)$. З цього можна також зробити висновок, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\tau = \tau(\varepsilon) > 0$ таке, що при $t > \tau$ значення функції $(S^t[\varphi])(x)$ в точках багатозначності неможливо обчислити з ε-точністю: при $t > \tau$ деякі (або всі) значення функції $S^t[\varphi]$ знаходяться, як інколи говорять, за часовим *горизонтом передбачуваності*.

Якщо множина точок багатозначності ψ є масивною (в деякому придатному для розглядуваної задачі сенсі), то цю множину, взагалі кажучи, не можна ігнорувати. Така ситуація, яку природно назвати *детермінованою випадковістю*, свідчить про хаотизацію точок траєкторії $S^t[\varphi]$ при $t \to \infty$ і потребує ймовірнісного опису.

Автостохастичність. Спеціальна метрика. Можна запропонувати наступний підхід до дослідження детермінованої випадковості. Щоб охарактеризувати поведінку функції $(S^t[\varphi])(x^*)$ при $t \to \infty$, слід виходити не з одного-єдиного значення $\varphi(x^*)$, а з розподілу значень функції $\varphi(x)$ в деякому ε-околі точки x^*. Задача полягає у знаходженні відповідного граничного розподілу при переході до границі спочатку при $t \to \infty$, а вже потім при $\varepsilon \to 0$ (а не навпаки, як це звичайно робиться). Якщо граничний розподіл існує, то гранична поведінка траєкторії $S^t[\varphi]$ допускає ймовірнісний опис. Таку детерміновану випадковість ми називаємо „автостохастичністю" (строге визначення буде наведено нижче). Близькі ідеї розвиваються в роботах М. С. Крилова [30], М. Борна [31] та дослідницькою групою І. Пригожина (див., наприклад, [32]).

Реалізувати запропонований вище підхід можна, побудувавши метрику, яка „склеює" простори детермінованих і випадкових функцій, і поповнивши фазовий простір динамічної системи (6) в цій спеціальній метриці [16]. Щоб зрозуміти, якою має бути шукана метрика, звернемось до метрики ρ^{Δ}. Метрика ρ^{Δ} здійснює не поточкове порівняння значень функцій $\psi_1(x)$ та $\psi_2(x)$ (як це робить C^k-метрика), а порівнює множини значень функцій $\psi_1(x)$ та $\psi_2(x)$ в околі кожної точки $x \in D$. Останнє стає очевидним, якщо прийняти до уваги, що метрика ρ^{Δ} еквівалентна метриці

$$\sigma^{\Delta}(\psi_1, \psi_2) = \sup_{\varepsilon>0} \min \left\{ \varepsilon, \sup_{x \in D} \Delta(\psi_1^{\varepsilon}(x), \psi_2^{\varepsilon}(x)) \right\}, \tag{13}$$

де $\psi^{\varepsilon}(x) = \psi(V_{\varepsilon}(x))$ і $V_{\varepsilon}(x)$ — ε-окіл точки $x \in D$. Тепер залишилось тільки ввести в (13) розподіли функцій ψ_1 та ψ_2. Замінимо множини ψ_1^{ε} та ψ_2^{ε} на відповідні усереднені розподіли

$$F_{\psi_i}^{\varepsilon}(x, z) = \frac{1}{\operatorname{mes} V_{\varepsilon}(x)} \int_{V_{\varepsilon}(x)} F_{\psi_i}(x', z)\, dx', \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

де $F_{\psi}(x, z)$ — функція розподілу для ψ, тобто

$$F_{\psi}(x, z) = \chi_Z(\psi(x)) \quad \text{для} \quad \psi \in C^k(D, R^m).$$

Тут $Z = (-\infty, z^1) \times (-\infty, z^2) \times \ldots \times (-\infty, z^m)$, $(z^1, z^2, \ldots, z^m) = z \in R^m$ і $\chi_A(\cdot)$ — індикатор (характеристична функція) множини A. Таким чином, одержуємо метрику

$$\rho_1^{\#}(\psi_1, \psi_2) = \sup_{\varepsilon>0} \min \left\{ \varepsilon, \sup_{x \in D} \int_{R^m} |F_{\psi_1}^{\varepsilon}(x, z) - F_{\psi_2}^{\varepsilon}(x, z)|\, dz \right\}. \tag{15}$$

Формулу (15) можна застосувати до класу функцій, який є значно ширшим, ніж клас $C^k(D, R^m)$, а саме, до класу $\mathfrak{R}^0(D, R^m)$, що складається з функцій (однозначних детермінованих та випадкових) $\psi: D \to R^m$, заданих всіма своїми скінченновимірними розподілами

$$F_{\psi}(x_1, \ldots, x_r; z_1, \ldots, z_r), \quad x_j \in D, \quad z_j \in R^m, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

тобто ймовірностями одночасної реалізації співвідношень

$$\psi(x_j) \in \prod_{i=1}^{m} (-\infty, z_j^i), \quad \text{де} \quad (z_j^1, \ldots, z_j^m) = z_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \quad r = 1, 2, \ldots.$$

Проте формула (15) буде коректною тільки на множині $\mathfrak{R}^1(D, R^m)$ функцій $\psi \in \mathfrak{R}^0(D, R^m)$ таких, що

$$F_{\psi}^{\varepsilon}(x, z) \to F_{\psi}(x, z) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \quad z \in R^m,$$

для майже всіх (за мірою Лебега) $(x, z) \in D \times R^m$.

Зрозуміло, що $\rho_1^{\#}$ є лише напівметрикою на просторі $\mathfrak{R}^1(D, R^m)$, в той час як на просторі $C^k(D, R^m)$ функціонал $\rho_1^{\#}$ задає метрику. Щоб перетворити $\rho_1^{\#}$ на метрику, необхідно включити у формулу (15) всі скінченновимірні розподіли і тим самим одержати метрику

$$\rho^{\#}(\psi_1, \psi_2) =$$

$$= \sup_{\varepsilon>0} \min \left\{ \varepsilon, \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{3^{r-1}} \sup_{(x_1, \ldots, x_r) \in D^r} \int_{R^m} \ldots \int_{R^m} |F_{\psi_1}^{\varepsilon}(x_1, \ldots, x_r; z_1, \ldots, z_r) - \right.$$

$$\left. - F_{\psi_2}^{\varepsilon}(x_1, \ldots, x_r; z_1, \ldots, z_r)|\, dz_1 \ldots dz_r \right\}, \tag{16}$$

яка коректна на множині $\mathfrak{R}(D, R^m)$ функцій $\psi \in \mathfrak{R}^0(D, R^m)$ таких, що

$$F_{\psi}^{\varepsilon}(x_1, \ldots, x_r; z_1, \ldots, z_r) \to F_{\psi}(x_1, \ldots, x_r; z_1, \ldots, z_r), \quad \text{коли} \quad \varepsilon \to 0,$$

при будь-яких $r = 1, 2, \ldots$ і майже всіх $(x_1, \ldots, x_r; z_1, \ldots, z_r)$. Поряд з випадковими функціями простір $\mathfrak{R}(D, R^m)$ містить детерміновані функції, неперервні або розривні з множиною розривів нульової міри Лебега.

Для $\varphi \in C^k(D, R^m)$ і будь-яких фіксованих $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r \in D$ та $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_r \in R^m$ усереднений розподіл $F^{\varepsilon}_{\psi}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{z}_r)$ можна інтерпретувати як частоту, з якою вектор-функція $(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_r))$ набуває значень з множини $\prod_{j=1}^{r} \prod_{i=1}^{m} (-\infty, \bar{z}_j^i)$, де $(\bar{z}_j^1, \ldots, \bar{z}_j^m) = \bar{z}_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$, коли $(x_1, \ldots, x_r)$ змінюється на множині $V_{\varepsilon}(\bar{x}_1) \times V_{\varepsilon}(\bar{x}_2) \times \ldots \times V_{\varepsilon}(\bar{x}_r)$.

Згідно з запропонованою вище схемою поповнимо у метриці $\rho^{\#}$ фазовий простір $C^k(D, R^m)$ динамічної системи (6) функціями з $\mathfrak{R}(D, R^m)$. Простір $\mathfrak{R}(D, R^m)$ є некомпактним, тому немає гарантії, що всі траєкторії динамічної системи мають непорожні ω-граничні множини в $\mathfrak{R}(D, R^m)$.

Означення 3 [16]. *Будемо говорити, що в детермінованій системі* $\{C^k(D, R^m), T, S^t\}$ *має місце автостохастичність, якщо у системи є масивна множина траєкторій, ω-граничні множини яких містять випадкові функції з простору* $\mathfrak{R}(D, R^m)$.

В залежності від задачі термін „масивна множина" може означати множину додатної міри, множину другої категорії, всюди щільну множину і т. п. Нижче будуть розглянуті приклади динамічних систем з автостохастичністю.

2. Різницеві рівняння з неперервним аргументом: утворення структур, самоподібність, фрактали, автостохастичність. Розглянемо рівняння (1). Розв'язки $y: R^+ \to I$ вважаються C^1-гладкими, крім, можливо, точок $x = 1, 2, \ldots$. Рівняння (1) індукує нескінченновимірну дискретну динамічну систему

$$\{C^1([0, 1], I), Z^+, S^n\}, \tag{17}$$

$$S[\varphi] = f \circ \varphi \quad \text{для} \quad \varphi \in C^1([0, 1], I),$$

на некомпактному фазовому просторі $C^1([0, 1], I)$. Компактні ω-граничні множини будуть мати ті і тільки ті траєкторії $S^n[\varphi]$, які є компактними (як множини в $C^1([0, 1], I)$).

Атрактор. Типовою (в C^0-топології) є ситуація, коли траєкторії системи (17), за винятком нерухомих точок (а це є функції $\varphi \equiv \alpha$, $\alpha \in \operatorname{Fix} f$), не мають компактних ω-граничних множин у фазовому просторі системи. Тому відповідно до запропонованого в п. 1 поповнимо фазовий простір $C^1([0, 1], I)$ до простору напівнеперервних зверху функцій $C^{\Delta}([0, 1], I)$, в якому динамічна система (17) має атрактор.

Щоб з'ясувати, що являє собою цей атрактор, ми повинні продовжити дію системи (17) на розширений фазовий простір. У даному випадку це можна зробити: система (17), очевидно, індукує динамічну систему

$$\{C^{\Delta}([0, 1], I), Z^+, S^n\}, \tag{18}$$

$$S[\psi] = f \circ \psi \quad \text{для} \quad \psi \in C^{\Delta}([0, 1], I).$$

Виявляється, що при досить загальних умовах на f та φ можна побудувати ω-граничні множини майже всіх траєкторій системи (17). Ці умови наведено у [13]. Щоб сформулювати їх, нам потрібно використати множини

$$Q_f(w) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{j > 0} \overline{\bigcup_{i \geq j} f^i(V_{\varepsilon}(w))},$$

$$Q_f^+(w) = \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcap_{j>0}\overline{\bigcup_{i\geq j} f^i(V_\varepsilon^+(w))}, \quad Q_f^-(w) = \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcap_{j>0}\overline{\bigcup_{i\geq j} f^i(V_\varepsilon^-(w))},$$

де $V_\varepsilon(w) = (w-\varepsilon, w+\varepsilon)\cap I$, $V_\varepsilon^+(w) = [w, w+\varepsilon)\cap I$, $V_\varepsilon^-(w) = (w-\varepsilon, w]\cap I$,

$$D(f) = \{w \in I:\ \text{траєкторія } f^n(w) \text{ є нестійкою за Ляпуновим}\},$$

$$D_0(f) = \{w \in D(f):\ Q_f(\omega) \neq Q_f^+(w) \neq Q_f^-(w)\}.$$

Множина $Q_f(w)$ — це область впливу точки w при відображенні f, а $Q_f^+(w)$ та $Q_f^-(w)$ — відповідно право- та лівостороння області впливу w.

Нам також буде потрібно поняття ω-інтервалу: *ω-інтервалом* відображення $f\colon I \to I$ називається інтервал на I, траєкторії точок якого мають одну і ту ж саму ω-граничну множину; ω-інтервал називається нетривіальним, якщо відповідна ω-гранична множина не є циклом або замиканням майже періодичної траєкторії.

Тепер ми в змозі сформулювати умови на f та φ. Позначимо через $\Phi(f)$ підмножину функцій $\varphi \in C^1([0,1], I)$ з такими властивостями:

якщо $\varphi(x) \equiv \text{const}$ при $x \in [x', x'']$, то $[x', x''] \not\subset \varphi^{-1}(D(f))$;

якщо $\varphi(x)$ має екстремум в точці x^*, то $x^* \notin \varphi^{-1}(D_0(f))$;

Виявляється, що множина $\Phi(f)$ містить майже всі функції з $C^1([0,1], I)$, якщо $D_0(f)$ є множиною першої категорії. Ситуація, коли $D_0(f)$ — множина першої категорії, не є винятковою. Зокрема, це типова ситуація для гладких унімодальних (тобто з одним екстремумом) відображень: в C^1-топології для майже всіх таких відображень $f\colon I \to I$ множина $D_0(f)$ ніде не щільна на I.

Теорема 1 [13]. *Нехай відображення f не має нетривіальних ω-інтервалів. Якщо $\varphi \in \Phi(f)$, то ω-гранична множина $\omega[\varphi]$ траєкторії $S^n[\varphi]$, $n \in Z^+$, системи* (17) *має вигляд*

$$\omega[\varphi] = \overline{\bigcup_{n\geq 0} f^n \circ f^\Delta \circ \varphi}, \tag{19}$$

де f^Δ — напівнеперервна зверху функція

$$f^\Delta(w) = \bigcap_{k>0} Q_{f^{k!}}(w), \quad w \in I, \tag{20}$$

і, таким чином, $\omega[\varphi]$ є замиканням траєкторії $S^n[f^\Delta \circ \varphi]$, $n \in Z^+$, системи (18), *причому в залежності від f і незалежно від φ траєкторія $S^n[f^\Delta \circ \varphi]$, $n \in Z^+$, являє собою або цикл, або майже періодичну траєкторію. Якщо $D_0(f)$ є множиною першої категорії, то*

$$\Omega = \overline{\bigcup_{\varphi\in\Phi(f)} \omega[\varphi]} = \overline{\bigcup_{\varphi\in\Phi(f)}\overline{\bigcup_{n\geq 0} f^n \circ f^\Delta \circ \varphi}}. \tag{21}$$

є атрактором динамічної системи (12).

Теорема 1 говорить про те, що траєкторії $S^n[\varphi]$ динамічної системи (17) поводять себе відносно просто: вони є асимптотично періодичними або асимптотично майже періодичними, але в той же час поведінка окремого елемента траєкторії — функції $(S^n[\varphi])(x)$ — при $n \to \infty$ є, взагалі кажучи, досить складною і визначається властивостями граничної функції $f^\Delta \circ \varphi$. Функція $f^\Delta \circ \varphi$, як відображення з $[0,1]$ в I, є:

однозначною і неперервною на множині $[0, 1]\setminus\varphi^{-1}(D(f))$, зокрема, якщо J — ω-інтервал відображення f, то $f^{\Delta}\circ\varphi$ є константою на кожному інтервалі із множини $\varphi^{-1}(J)$;

многозначною в точках множини $\varphi^{-1}(D(f))$, причому $(f^{\Delta}\circ\varphi)(x^*)$ — замкнений нетривіальний інтервал при $x^*\in\varphi^{-1}(D(f))$.

Як бачимо, множина $\varphi^{-1}(D(f))$ є основною характеристикою складності граничної функції $f^{\Delta}\circ\varphi$. Типовим є випадок, коли множина $\varphi^{-1}(D(f))$ нескінченна: якщо відображення f має цикл періоду $n>2$ і існує точка $x^*\in$ $\in[0,1]$ така, що $\varphi(x^*)$ належить басейну цього циклу, то $\varphi^{-1}(D(f))$ — нескінченна множина [13]. Тоді поведінку функції $(S^n[\varphi])(x)$ при $n\to\infty$ можна назвати хаотичною, зокрема, число коливань $(S^n[\varphi])(x)$ з неспадаючою амплітудою необмежено зростає при $n\to\infty$.

Відмітимо, що динамічна система (17) може мати траєкторії, відмінні від асимптотично періодичних та майже періодичних, але таких траєкторій „мало" — вони можуть породжуватись лише функціями з $C^1([0,1],I)\setminus\Phi(f)$. А саме, нехай для деякої точки $w=w^*$ її ω-гранична множина $\omega_f[w^*]$ при відображенні f не є циклом або замиканням майже періодичної траєкторії, а початкова функція $\varphi^*(x)$ така, що $\varphi^*(x)\equiv w^*$ при $x\in[x',x'']$, $x'<x''$ (очевидно, що $\varphi^*\notin\Phi(f)$). Тоді ω-гранична множина $\omega[\varphi^*]$ відповідної траєкторії $S^n[\varphi^*]$ системи (17), очевидно, уже не може мати ніякої властивості періодичності, оскільки якщо $\psi\in\omega[\varphi^*]$, то $\psi(x)\equiv\omega^*$ при $x\in[x',x'']$, де ω^* — деяка точка множини $\omega_f[w^*]$.

Граничні структури. На збіжність траєкторії $S^n[\varphi]$, $\varphi\in\Phi(f)$, до ω-граничної множини $\omega[\varphi]=\overline{\bigcup_{n\geq 0}S^n\psi_\varphi}$ можна дивитися як на процес утворення структур, а точки множини $\omega[\varphi]$ розглядати як граничні (при $n=\infty$) структури. Це тим більше має сенс, оскільки граничні структури є самоподібними, і з цієї причини розв'язки рівняння (1) можна застосувати для моделювання каскадного процесу утворення когерентних структур. Оскільки граничні структури, що продукуються траєкторією $S^n[\varphi]$, одержуються із граничної структури $f^{\Delta}\circ\varphi$, яку назвемо базовою, то достатньо розглянути властивості тільки $f^{\Delta}\circ\varphi$.

Між множиною базових структур $\mathfrak{S}(f)=\{f^{\Delta}\circ\varphi:\ \varphi\in\Phi(f)\}$ і множиною функцій $\Phi(f)$ не існує взаємно однозначної відповідності. Множина $\mathfrak{S}(f)$ містить істотно „менше" елементів, ніж множина $\Phi(f)$, оскільки різні траєкторії динамічної системи (17) можуть утворювати при $n\to\infty$ одну і ту ж базову структуру. Проте якщо $f\circ f^{\Delta}\neq f^{\Delta}$, то множина $\mathfrak{S}(f)$ досить масивна, щонайменше зліченно-параметрична.

Структури з $\mathfrak{S}(f)$ видаються зовсім хаотичними, але вони у певному сенсі впорядковані. Ступінь впорядкованості структур можна охарактеризувати за допомогою поняття самоподібності. Просто кажучи, структуру називають самоподібною, якщо вона містить як завгодно малі „куски", кожний з яких є зменшеною копією всієї структури. Ми використаємо наступне математичне визначення самоподібності.

Означення 4 [13]. *Назвемо структуру $\psi\in\mathfrak{S}(f)$ самоподібною у точці x', якщо існують послідовність вкладених околів $U_0\supset U_1\supset\ldots$, що стягуються до точки x', і послідовність зберігаючих орієнтацію дифеоморфізмів*

$$\gamma_i\colon U_i \to U_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

таких, що

$$(\psi \circ \gamma_i)(x) = \psi(x), \quad x \in U_i, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Теорема 2. *Базова структура* $f^{\Delta} \circ \varphi$ *є самоподібною у кожній точці* x', *для якої* $\varphi(x')$ *є прообразом деякої відштовхуючої періодичної точки* f (*тобто* $\varphi(x')$ *є точкою Мілоревича відображення* f).

Як добре відомо, самоподібність і фрактальність часто супроводжують одна одну.

Означення 5. *Структуру* $\psi \in \mathfrak{S}(f)$ *назвемо фрактальною, якщо фрактальний вимір її графіка більший від* 1, *тобто більший від його топологічного виміру.*

Скористаємось однією з версій фрактального виміру, а саме, „box-counting" виміром. Нагадаємо його визначення. Нехай A — обмежена множина з R^m і α_r — покриття множини A відкритими множинами діаметра $\le r$. „Box-counting" вимір множини A визначається формулою

$$\dim_b A = \lim_{r \to 0} \frac{\log N_r(A)}{\log (1/r)},$$

де $N_r(A) = \inf\limits_{\alpha_r} N_{\alpha_r}(A)$, $N_{\alpha_r}(A)$ — число множин у найменшому скінченному підпокритті з α_r.

Теорема 3. *Якщо* $\varphi \in \Phi(f)$, $\omega[\varphi]$ — *цикл і* $\dim_b(\varphi([0,1]) \cap D(f)) \neq 0$, *то відповідна базова структура* $f^{\Delta} \circ \varphi$ *є фрактальною, а саме*

$$1 + \dim_b(\varphi([0,1]) \cap D(f)) \le \dim_b(\operatorname{gr} f^{\Delta} \circ \varphi) \le 2. \tag{22}$$

Автостохастичність. Коли атрактор відображення f містить цикл (транзитивних) інтервалів, існує щонайменше один підінтервал у $[0,1]$, на якому при $n \to \infty$ поведінка $(S^n[\varphi])(x)$, як функції $[0,1] \to I$, є хаотичною: елементи відповідної ω-граничної множини $\omega[\varphi]$ — це функції, багатозначні в кожній точці цього підінтервалу і тому при великих n значення функції $(S^n[\varphi])(x)$ неможливо однозначно обчислити. Ми покажемо, що в цьому випадку за досить загальних умов на f система (17) демонструє автостохастичність. Наші припущення є такими:

1) відображення f має інваріантну міру μ, носієм якої є цикл інтервалів $J_1, J_2, \ldots, J_p$ з періодом $p \ge 1$, тобто

$$\operatorname{supp}\mu = \bigcup_{i=1}^{p} J_i, \quad f(J_i) = J_{i+1 \,(\mathrm{mod}\, p)};$$

2) міра μ еквівалентна мірі Лебега на $\operatorname{supp}\mu$;

3) відображення f^p має властивість перемішування, тобто

$$\mu(A \cap f^{-pn}(B)) \to \mu(A)\mu(B) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

для будь-яких μ-вимірних множин $A, B \subset J_i$, $1 \le i \le p$;

4) $\operatorname{mes} E_* = 0$, де $E_* = \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{p} \bigcup\limits_{j \ge 0} \partial(f^{-jp}(J_i))}$;

5) відображення f є несингулярним відносно міри Лебега, тобто якщо

$\operatorname{mes} A = 0$, то $\operatorname{mes} f^{-1}(A) = 0$ для будь-якої вимірюваної за Лебегом множини A.

Ці умови, зокрема, мають місце, якщо відображення f є унімодальним, має від'ємну похідну Шварца і задовольняє умови Коле – Екманна

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n} \log \left| \frac{d}{dw} f^n(c) \right|, \quad c \text{ — точка екстремуму } f.$$

Розширимо клас розглядуваних динамічних систем, припустивши, що система (17) має фазовий простір $C([0,1], I)$. Нехай $C^{\#}([0,1], I)$ — поповнення фазового простору $C([0,1], I)$ системи (17) в метриці $\rho^{\#}$ функціями з $\mathfrak{R}([0,1], I)$ і $\rho^{\#}$ — метрика в $C^{\#}([0,1], I)$. Система (17) індукує (за неперервністю) дискретну динамічну систему

$$\{C^{\#}([0,1], I), Z^+, S^n\}, \tag{23}$$

$$S[\psi] = f \circ \psi \quad \text{для} \quad \psi \in C^{\#}([0,1], I),$$

де під суперпозицією функцій f і ψ розуміємо функцію із $C^{\#}([0,1], I)$, задану всіма своїми скінченновимірними розподілами

$$F_{S^n[\psi]}(x_1, \dots, x_r; z_1, \dots, z_r) = P\{\psi(x_j) \in f^{-1}((-\infty, z_j)),\ j = 1, \dots, r\},$$

$$x_1, \dots, x_r \in [0,1], \quad z_1, \dots, z_r \in R, \quad r = 1, 2, \dots .$$

Тут через $P\{e_j,\ j = 1, \dots, r\}$ позначено ймовірність сумісної реалізації співвідношень $e_1, e_2, \dots, e_r$.

Простір $C^{\#}([0,1], I)$ є некомпактним (як і простори $C([0,1], I)$ та $\mathfrak{R}([0,1], I)$). Проте виявляється, що при зроблених вище припущеннях існує досить масивна підмножина функцій $\varphi \in C([0,1], I)$ така, що відповідні траєкторії $S^n[\varphi]$ некомпактні у $C([0,1]; I)$, але компактні у $C^{\#}([0,1], I)$ і, таким чином, мають в $C^{\#}([0,1], I)$ непорожні компактні ω-граничні множини.

Теорема 4 [24, 25]. *Нехай відображення f задовольняє умови 1 – 5. Якщо $\varphi \in C([0,1], I)$ — несингулярна (відносно міри Лебега) функція і $\varphi([0,1]) \subset \subset \overline{\bigcup_{j\geq 0} f^{-j}(\operatorname{supp} \mu)}$, то ω-гранична множина $\omega[\varphi]$ траєкторії $S^n[\varphi]$ є циклом періоду p (динамічної системи (23)), який складається з випадкових функцій, а саме,*

$$\omega[\varphi] = \{f^{\#} \circ \varphi, f \circ f^{\#} \circ \varphi, \dots, f^{p-1} \circ f^{\#} \circ \varphi\}, \tag{24}$$

де $f^{\#}$ — чисто випадковий процес з функцією розподілу

$$F_{f^{\#}}(w, z) = p\,\mu(J_i \cap (-\infty, z)) \quad \text{при} \quad w \in \bigcup_{j\geq 0} \operatorname{int} f^{-jp}(J_i), \quad 1 \leq i \leq p. \tag{25}$$

Під суперпозицією $f^{\#} \circ \varphi$ випадкової функції $f^{\#}$ та детермінованої функції φ ми розуміємо випадкову функцію, задану скінченновимірними розподілами

$$F_{f^{\#} \circ \varphi}(x_1, \dots, x_r; z_1, \dots, z_r) = F_{f^{\#}}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_r); z_1, \dots, z_r),$$

$$x_1, \dots, x_r \in [0,1], \quad z_1, \dots, z_r \in R, \quad r = 1, 2, \dots .$$

3. Граничні задачі для рівнянь з частинними похідними: утворення структур, просторово-часовий хаос. Результати п. 2 знаходять застосування в теорії рівнянь з частинними похідними і, зокрема, дозволяють запропонувати

сценарій розвитку просторово-часового хаосу [26]. Тут ми викладемо лише загальні положення.

Нехай ми маємо нелінійну граничну задачу

$$u_t = \boldsymbol{D}_x(u), \quad \boldsymbol{H}(u)|_{\partial D} = 0, \quad u \in C^1(D \times R^+, R^m), \quad D \subset R^l, \quad l, m \geq 1, \qquad (26)$$

де $\boldsymbol{D}_x$ та $\boldsymbol{H}$ — диференціальні оператори.

Позначимо через $u_\varphi(x, t)$ розв'язок задачі (26), що відповідає початковій умові $u(x, 0) = \varphi(x)$. Якщо для кожного $\varphi \in C^1(D, R^m)$ розв'язок $u_\varphi(x, t)$ існує при всіх $t \in R^+$ і неперервно залежить від φ, то задача (26) породжує нескінченновимірну динамічну систему з неперервним часом

$$\{C^1(D, R^m), R^+, S^t\}, \qquad (27)$$

$$(S^t[\varphi])(x) = u_\varphi(x, t) \quad \text{для} \quad \varphi \in C^1(D, R^m).$$

Системи вигляду (27) можна інтерпретувати як моделі неперервних середовищ (наприклад, електромагнітних полів). Як правило, хаотизація реальних середовищ відбувається через каскадний процес утворення структур, найменші масштаби яких визначаються внутрішнім опором. В ідеальному середовищі (без внутрішнього опору) структурам „дозволяється" подрібнюватися до нескінченно малих масштабів, що може спричиняти просторово-часовий хаос, який в границі (при $t = \infty$) допускає ймовірнісний опис (явище автостохастичності).

Загальні поняття. Спочатку ми запропонуємо математичний формалізм для опису процесу самозародження структур у неперервних середовищах і їх динаміки у просторі та часі. Тут наведемо лише основні означення (повний список див. в [26]).

Нехай $Y_\nu(\mathcal{D}, E_\rho)$ — простір функцій $v(z)\colon \mathcal{D} \to E_\rho$, де $\mathcal{D} \subset R^m$, E_ρ — топологічний простір з метрикою ρ і ν — метрика в просторі Y_ν.

Означення 6. *Нехай ζ — деяке додатне число і $G \subset \mathcal{D}$ — замкнена множина. Будемо називати функцію $v(z)|_G$ ζ-структурою (що функція $v(z)$ утворює над областю G), якщо*

$$\sup_{z', z'' \in G} \rho\{v(z'), v(z'')\} \geq \zeta.$$

Назвемо ζ порогом чутливості ζ-структури $v(z)|_G$.

Надалі будемо вважати поріг фіксованим і використовувати термін „структура" без позначки ζ. Окрім того, під словом „область" будемо розуміти замкнену область.

Означення 7. *Структури $v_1(z)|_{G_1}$ і $v_2(z)|_{G_2}$ будемо називати ε-когерентними, якщо існує афінне перетворення $g\colon G_1 \to g(G_1)$ таке, що*

$$\nu\{v_1(z)|_{G_1}, v_2(g(z))|_{G_1}\} < \varepsilon \quad і \quad \Delta(g(G_1), G_2) < \varepsilon.$$

Означення 8. *Структуру $v(z)|_G$ назвемо ε-самоподібною, якщо існує область $G' \subset G$ така, що $\Delta(G', G) > \varepsilon$ і структури $v(z)|_G$ та $v(z)|_{G'}$ є ε-когерентними.*

Щоб описати динаміку структур, необхідно виділити серед змінних $z \in \mathcal{D}$ ту, яка відповідатиме часу. Покладемо $\mathcal{D} = D \times R^+$, $z = (x, t)$, де $x \in D \subset R^{l-1}$, $t \in R^+$, і вважатимемо t за час. Структуру $v(z)|_G$, для якої $G = G^* \times \{t^*\}$, G^* — область із D, t^* — точка із R^+, будемо називати *просторовою*. Ми будемо, головним чином, цікавитися еволюцією просторових структур із плином

часу. Надалі просторову структуру $v(x,t)|_{G^*\times\{t^*\}}$ будемо позначати $v(x,t^*)|_{G^*}$.

Означення 9. *Під ε-шляхом структури $v(x,t^*)|_{G^*}$ будемо розуміти множину* $1\mathrm{t}_\varepsilon(v(x,t^*)|_{G^*}) = \{v(x,t)|_{G^*}$: *для кожного* $\delta>0$ *існує послідовність попарно ε-когерентних структур* $v(x,t_i)|_{G_i}$, $i=1,2,\dots,r$, *таких, що*

1) $(t_1, G_1)=(t^*, G^*)$, $(t_r, G_r)=(t, G)$;

2) $|t_{i+1}-t_i|<\delta$ *і* $\Delta(G_{i+1}, G_i)<\delta$, $i=1,2,\dots,r-1\}$.

Означення 10. *Будемо говорити, що функція $v\in Y_\nu(D\times R^+, E_\rho)$ демонструє каскадний процес утворення ε-когерентних структур в області D_0 на нескінченному інтервалі часу $[t_0,\infty]$, якщо існують*

монотонна, відносно щільна послідовність моментів часу t_i, $i=1,2,\dots$, $t_0<t_1<t_2<\dots$,

послідовність областей $G_{ij}\subset D_0$, $i=1,\dots$, $j=1,\dots,k_i$, *де* $k_i\geq \varkappa k_{i-1}$ *з деякою константою* $\varkappa>1$,

такі, що

1) *структури* $v(x,t_i)|_{G_{ij}}$, $i=0,1,\dots$, $j=0,1,\dots,k_i$, *є попарно ε-когерентними;*

2) $v(x,t_i)|_{G_{ij}}\notin \mathrm{lt}_\varepsilon(v(x,t_r))|_{G_{rs}})$ *при* $(i,j)\neq(r,s)$, $i,r=0,1,\dots$, $j=0,1,\dots,k_i$, $s=0,1,\dots,k_r$.

Тепер дамо означення граничних структур, які утворює функція $v\in Y_\nu$ при $t\to\infty$. Нехай G — область в D. Позначимо через $Z_\nu(G,E_\rho)$ простір функцій $w: G\to E_\rho$ таких, що для будь-яких $v\in Y_\nu$ і $t^*\in R^+$ можна знайти $w(x)=v(x,t^*)|_G$.

Означення 11. *Будемо називати функцію $w\in Z_\nu(D,E_\rho)$ граничною структурою, яка утворюється функцією $v\in Y_\nu(D\times R^+,E_\rho)$ над областю G, якщо $w(x)|_G$ є структурою і існує нескінченно зростаюча послідовність моментів часу t_i, $i=1,2,\dots$, така, що*

$$\nu\{v(x,t_i)|_G, w(x)|_G\}\to 0 \quad \text{при} \quad i\to\infty.$$

Позначимо через $\mathcal{V}_\zeta(v;G)$ множину граничних структур, утворюваних функцією $v\in Y_\nu$ над областю G. Очевидно, що множина $\mathcal{V}_\zeta(v;G)$ є непорожньою для кожної функції $v\in Y_\nu$, якщо простір Z_ν компактний.

Означення 12. *Граничну структуру $w\in\mathcal{V}(v;G)$ назвемо фрактальною, якщо „box-counting" вимір графіка функції $w: G\to E_\rho$ більший, ніж його топологічний вимір.*

Підкреслимо, що властивості структур, які утворюються функціями із простору Y_ν, істотно залежать від вибраної у цьому просторі метрики ν.

Каскадний процес утворення структур. Повернемося до граничної задачі (26) і відповідної динамічної системи (27). У випадку, коли D_x — лінійний оператор, задача (26) за певних умов зводиться до тих чи інших різницевих рівнянь з неперервним аргументом [13, 15], завдяки чому з'являється можливість знайти залежність $S^t[\varphi]$ від φ у явному вигляді, що дозволяє істотно полегшити дослідження.

Найпростішими задачами, для яких викладене має місце, є задачі (2), (3) і (4), (5). У цьому пункті ми розглянемо задачу (4), (5), хоча вона і є більш

складною, ніж (2), (3), оскільки поведінку розв'язків задачі (4), (5), завдяки наявності двох просторових змінних, легше наочно продемонструвати (мал. 2). З іншого боку, результати, одержані для задачі (4), (5), не залежать від кількості просторових змінних і, зокрема, залишаються справедливими для задачі (2), (3).

Отже, нехай $u_\varphi(x,t) \in C^1(D \times R^+, R^2)$ — розв'язок граничної задачі (4), (5), що відповідає початковому стану $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C^1(D, I^2)$, $D = R \times [0,1]$. Не обмежуючи загальності, припустимо, що $\det(a_{ij}) = 0$ (останнього завжди можна досягти заміною змінних [13]). Задачі (4), (5) відповідає динамічна система

$$\{C^1(D, I^2), R^+, S^t\}, \tag{28}$$

де оператор зсуву $S^t[\varphi] = (S_1^t[\varphi], S_2^t[\varphi])$ вздовж розв'язку $u_\varphi(x,t)$ задається формулами

$$(S_i^t[\varphi])(x) =$$

$$= f^{[\eta_i(x_2,t)]} \circ \xi_\varphi\left(x_1 - \frac{b}{c}x_2 + b\{\eta_i(x_2,t)\}, c\{\eta_i(x_2,t)\}\right), \quad i = 1,2, \tag{29}$$

$$\eta_1(x_2,t) = \frac{x_2 + a_{12}t}{c}, \quad \eta_2(x_2,t) = \frac{(1-c)x_2 + a_{12}t}{c} + 1,$$

$$\xi_\varphi(z,\tau) = \begin{cases} \varphi_1(z,\tau), & \tau \in [0,1), \\ \varphi_2\left(z - b + b\dfrac{\tau - c}{1-c}, \dfrac{\tau - c}{1-c}\right), & \tau \in [1,c), \end{cases} \tag{30}$$

$$b = \frac{a_{21} - a_{11}}{a_{22}}, \quad c = 1 - \frac{a_{12}}{a_{22}},$$

$[\cdot]$ позначає цілу частину, а $\{\cdot\}$ — дробову частину числа.

При кожному фіксованому $t^* \in R^+$ точка траєкторії $(S^{t^*}[\varphi])(x)$ — деяке векторне поле — описує просторовий стан системи (28) – (30), в який ця система переходить із початкового стану $\varphi(x)$ за час $t = t^*$. Як і у випадку різницевих рівнянь, існує множина $\Phi(f,A) \subset C^1(D, I^2)$, де $A = (a_{ij})$, така, що в розширеному фазовому просторі $C^\Delta(D, I^2)$ замикання ω-граничних точок сукупності траєкторій $S^t[\varphi]$, $\varphi \in \Phi(f,A)$, є атрактором динамічної системи (28) – (30) за умов, що відображення f не має нетривіальних ω-інтервалів і $D_0(f)$ — множина першої категорії. Цей атрактор в типових ситуаціях складається з функцій $\psi \in SC_\Delta(D, 2^{I^2})$ з нескінченним числом точок багатозначності. Тому для майже всіх початкових станів $\varphi \in C^1(D, I^2)$ їх еволюція $S^t[\varphi]$ при великих значеннях t є нерегулярною в просторі-часі: в системі спостерігається просторово-часовий хаос, який супроводжується утворенням структур спадаючих масштабів.

Виходячи з наведених вище понять, розглянемо особливості процесу утворення структур траєкторіями динамічної системи (28) – (30). Перебіг цього процесу істотно залежить від властивостей ітерацій відображення f (про що, зокрема, свідчать формули (29)), і зрештою, від того, яким є атрактор відображення f. У типових ситуаціях (принаймні, для відображень, близьких до квадратичних [35]) цей атрактор являє собою або цикл, або цикл (транзитивних) інтервалів, або канторівську множину. Ми розглянемо тут дуже стисло другий випадок, коли атрактор відображення f — цикл інтервалів, який позначимо $\{J_1, J_2, \ldots, J_p\}$ (у цьому випадку маємо найпростіші формулювання). Більш повне дослідження особливостей (і відмінностей) процесу утворення структур у

всіх трьох випадках міститься в [26]. Для системи (28) – (30) простір $Y_v(D \times \times R^+, R^2)$ — це простір $C^1(D \times R^+, I^2)$. Вибір метрики у цьому просторі є дуже важливим. Традиційна C^1-метрика є малопридатною, оскільки в цій метриці можна розвинути змістовну теорію утворення структур траєкторіями системи лише на скінченному інтервалі часу [26], тоді як нас цікавить поведінка траєкторій при $t \to \infty$. Природно застосувати метрику розширеного фазового простору, а саме, метрику Δ.

Покладемо

$$\zeta^* = \min_{1 \le k \le n} \operatorname{mes} J_k$$

і візьмемо ζ^* за поріг чутливості. Нехай $\varphi \in \Phi(f, A)$.

Теорема 5. *Для будь-якої області $G \subset D$ існує момент часу $t^* > 0$ такий, що при $t' > t^*$ точка траєкторії $(S^{t'}[\varphi])(x)$ утворює над G просторову ζ^*-структуру.*

Теорема 6. *Для довільного $\varepsilon > 0$ і будь-якої області $G \subset D$ існують область $G' \subset G$ і момент часу $t^* > 0$ такі, що траєкторія $(S^t[\varphi])(x)$ утворює ε-самоподібну ζ^*-структуру над областю G' при кожному фіксованому $t > t^*$.*

Теорема 7. *Для довільного $\varepsilon > 0$ і будь-якої області $G \subset D$ існує момент часу $t^* > 0$ такий, що траєкторія $(S^t[\varphi])(x)$ демонструє каскадний процес утворення ε-когерентних ζ^*-структур (нескінченно спадаючих масштабів) в області G на нескінченному інтервалі часу $[t^*, \infty)$.*

Щоб проаналізувати граничні структури, які утворюються траєкторіями системи (28) – (30), бажано вибрати простір граничних структур $Z_v(G, R^2)$, $G \subset$ $\subset D$, компактним. Метрика Δ передбачає вибір (компактного) простору напівнеперервних зверху функцій $C^{\Delta}(G, I^2)$ за простір граничних структур $Z_v(G, R^2)$.

Теорема 8. $\mathcal{V}_{\zeta^*}(S^t[\varphi]; G) \neq \varnothing$ *для будь-якої області $G \subset D$.*

Для довільного $\varepsilon > 0$ і будь-якої області $G \subset D$ кожна структура з множини $\mathcal{V}_{\zeta^*}(S^t[\varphi]; G)$ є фрактальною (а саме, її „box-counting" вимір дорівнює 4).

В розглядуваному випадку граничні структури моделюють просторові „турбулентні плями" і за певних умов на f можна здійснити їх імовірнісний опис (про що йде мова в наступному пункті).

Фрактальний вимір граничних структур, що утворюються траєкторіями динамічної системи (28) – (30), визначається фрактальним виміром множини $D(f)$, а саме, якщо $\dim_b D(f) = q$, $0 \le q \le 1$, то серед граничних структур, утворюваних траєкторією $S^t[\varphi]$, $\varphi \in \Phi(f, A)$, є структури, „box-counting" вимір яких дорівнює $2(1+q)$. Теорема 8 розглядає крайній випадок $q = 1$, коли множина $D(f)$ співпадає з інтервалом I. Типовим же (принаймні, у топологічному сенсі) є випадок, коли атрактор відображення f — цикл і $D(f)$ — канторова множина, для якої $0 < q < 1$. Для динамічної системи (28) – (30) це спричиняє утворення кожною траєкторією $S^t[\varphi]$, $\varphi \in \Phi(f, A)$, фрактальних структур з „box-counting" виміром більшим 2 (тобто більшим їх топологічного виміру), але меншим 4. Отже, коли $0 < q \le 1$, *майже кожний початковий стан $\varphi \in \Phi(f, A)$ породжує турбулентність* (в сенсі означення 2).

4. Граничні задачі для рівнянь з частинними похідними: автостохастичність — імовірнісний опис просторово-часового хаосу. Покажемо, що навіть найпростіші граничні задачі вигляду (26), а саме, (2), (3) і (4), (5), можуть

мати властивість автостохастичності. Розглянемо динамічну систему (28)–(30), яка відповідає граничній задачі (4), (5). Відповідно до п. 1 перейдемо до нового фазового простору $C^{\#}(D, I^2)$ з метрикою $\rho^{\#}$, який є поповненням (у метриці $\rho^{\#}$) вихідного фазового простору $C^1(D, I^2)$ функціями з $\mathfrak{R}(D, I^2)$. Півгрупа S^t індукує на $C^{\#}(D, I^2)$ динамічну систему

$$\{C^{\#}(D, I^2), R^+, S^t\}, \tag{31}$$

де траєкторія $S^t[\psi] = \left((S_1^t[\psi]), (S_2^t[\psi])\right)$ для $\psi \in C^{\#}(D, I^2)$ визначається формулами (29), (30), в яких φ замінено на ψ (що розуміємо під суперпозицією випадкових та детермінованих функцій, ми пояснили у п. 2).

Теорема 9. *Нехай відображення f задовольняє умови 1–5 з п. 2 і $h = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{12}\, a_{22}}$. Якщо $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C^1(D, I^2)$ є несингулярною відносно міри Лебега функцією і $\varphi_i(D) \subset \overline{\bigcup_{j \geq 0} f^{-j}(\operatorname{supp}\mu)}$, $i = 1, 2$, то ω-гранична множина $\omega[\varphi]$ траєкторії $S^t[\varphi]$ є циклом періоду ph динаміної системи* (31), *який складається з випадкових векторних полів, а саме,*

$$\omega[\varphi] = \bigcup_{t \in [0, ph)} \{S^t[\hat{f} \circ \varphi]\}, \tag{32}$$

де $\hat{f} \circ \varphi = (f^{\#} \circ \varphi_1, f^{\#} \circ \varphi_2)$, $f^{\#}$ — чисто випадковий процес, заданий формулою (25).

Для задачі (2), (3) має місце аналогічний результат з $h = \frac{a_2 - a_1}{a_1\, a_2}$.

Для спрощення в подальшому будемо вважати $h = 1$.

Позначимо через $\Phi^{\#}(f)$ множину початкових станів φ, які задовольняють умови теореми 9. Теорема 9 говорить про те, що *кожний початковий стан* $\varphi \in \Phi^{\#}(f)$ *породжує сильну турбулентність* (в сенсі означення 2).

При $p > 1$ різним початковим станам з $\Phi^{\#}(f)$ відповідають, взагалі кажучи, різні ω-граничні множини (періодичні траєкторії у $C^{\#}(D, I^2)$). Інша ситуація має місце при $p = 1$. У цьому випадку ω-гранична множина $\omega[\varphi]$ одна і та сама для будь-якого початкового стану $\varphi \in \Phi^{\#}(f)$ і складається з однієї „точки" $\hat{f} \circ e$, де $e = (id, id)$. Дійсно, при $p = 1$ функція розподілу $F_{f^{\#}}(x, z)$ випадкового процесу $f^{\#}(x)$ не залежить від x і тому всі траєкторії динамічної системи (28)–(30), що породжуються множиною $\Phi^{\#}(f)$, притягуються до однієї-єдиної точки $\hat{f} \circ e$ — нерухомої точки динамічної системи (31).

Нехай, наприклад, в граничних умовах вихідної задачі (2), (3) чи (4), (5)

$$f\colon\ w \mapsto 4w(1-w), \quad w \in I = [0, 1].$$

Відображення f задовольняє умови 1–5 з п. 2, зокрема, має інваріантну міру

$$\mu(dw) = \frac{1}{\pi} \frac{dw}{\sqrt{w(1-w)}}$$

з носієм I періоду 1. У цьому випадку майже всі траєкторії відповідної динамічної системи притягуються до точки $\hat{f} \circ e$, де $f^{\#}$ має розподіл

$$F_{f^{\#}}(x, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{w(1-w)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{z}\,.$$

Таким чином, атрактор динамічної системи складається з однієї нерухомої точки $\hat{f} \circ e$.

Автостохастичність може спостерігатися не для всіх (як у системі (31)–(30)), а тільки для частини початкових станів. Ми одержимо приклад такої ситуації, якщо у задачі (2), (3) введемо до граничних умов залежність від похідних по t. Найпростіший спосіб це зробити — покласти

$$u_1 = u_2|_{x=0}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = g(u_2)\frac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{x=1} \tag{33}$$

Інтегруючи другу з умов (33), одержуємо

$$u_1 = u_2|_{x=0}, \quad u_1 = f(u_2) + \lambda|_{x=1}, \tag{34}$$

де f — первісна функції g, λ — константа інтегрування. Отже, гранична умова (33) замінюється однопараметричною сім'єю граничних умов (34), і, таким чином, задача (2), (33) зводиться до задачі вигляду (2), (34), у якої нелінійність в граничних умовах задається відображенням

$$f_\lambda\colon w \mapsto f(w) + \lambda,$$

яке залежить від параметра λ. Кожному початковому стану $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \in C^1([0,1], R^2)$ відповідає, взагалі кажучи, лише одне із співвідношень (34), а саме, співвідношення з $\lambda = \gamma[\varphi]$, де функція $\gamma\colon C^1([0,1], R^2) \to R$ задається формулою

$$\gamma[\varphi] = \varphi_1(1) - f(\varphi_2(1)). \tag{35}$$

Для відображення f_λ існує (напіввідкритий) інтервал $\Lambda(g)$ значень λ такий, що для кожного $\lambda \in \Lambda(g)$ існує обмежений замкнений невироджений f_λ-інваріантний інтервал I_λ. Нехай

$$\boldsymbol{B}^1(g) = \{\varphi \in C^1([0,1], R^2)\colon \gamma[\varphi] \in \Lambda(g) \text{ та } \varphi_i(x) \in I_{\gamma[\varphi]} \text{ при } x \in [0,1], \quad i = 1,2\}.$$

Критерій обмеженості розв'язків: *відмінний від константи розв'язок граничної задачі* (2), (33), *породжений початковою функцією* $\varphi \in C^1([0,1], R^2)$, *є обмеженим тоді і тільки тоді, коли* $\varphi \in \boldsymbol{B}^1(g)$.

Гранична задача (2), (33) задає динамічну систему

$$\{C^1([0,1], R^2), T, S^t\}, \tag{36}$$

де $S^t[\varphi]$ визначається формулами (29) і (30), в яких $f(w)$ замінено на $f_{\gamma[\varphi]}(w) = f(w) + \gamma[\varphi]$, і, більш того, індукує на фазовому просторі $C^1([0,1], R^2)$ міру

$$\nu(\mathcal{F}) = \operatorname{mes}\{\lambda\colon \lambda = \gamma(\varphi), \ \varphi \in \mathcal{F}\}$$

для будь-якої відкритої множини $\mathcal{F} \subset C^1([0,1], R^2)$.

Теорема 10 [18]. *Нехай g — лінійна функція. Тоді для задачі* (2), (33) *існують множини Φ_d, $\Phi_r \subset C^1([0,1], R^2)$ додатної ν-міри такі, що ω-гранична множина $\omega[\varphi]$ траєкторії $S^t[\varphi]$ відповідної динамічної системи* (36) *складається з*

детермінованих векторних полів, що утворюють в $C^\#([0,1], R^2)$ або періодичну траєкторію, або сім'ю майже періодичних траєкторій, якщо $\varphi \in \Phi_d$;

випадкових векторних полів, що утворюють в $C^\#([0,1], I)$ періодичну

траєкторію або сім'ю майже періодичних траєкторій, якщо $\varphi \in \Phi_r$; *при цьому для будь-якого* $p \geq 1$ *існує* $\varphi_{(p)} \in \Phi_r$ *таке, що період* $\omega[\varphi_{(p)}]$ *дорівнює* p, *і в будь-якій точці* $x \in [0,1]$ *із зростанням* p *дисперсія кожного із (випадкових) векторних полів, що належить* $\omega[\varphi_{(p)}]$, *спадає до нуля.*

Більш детальний аналіз властивостей випадкових функцій із множини $\omega[\varphi]$, $\varphi \in \Phi_r$, подано в [18].

Можливі випадки, коли „точки" ω-граничної множини виявляться „частково" випадковими, „частково" детермінованими: для кожної „точки" як функції $D \to R^m$ область D розбивається на дві частини D_1 і D_2 (ненульової міри Лебега) такі, що на D_1 вона є випадковою функцією, а на D_2 — детермінованою. Приклад такої ситуації одержимо, розглянувши двовимірний аналог задачі (3), (33) — систему рівнянь (4) з граничними умовами, що включають похідні по t:

$$u = u_2|_{x_2=0}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = g(u_2)\frac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{x_2=1}. \tag{37}$$

Теорема 11 [18]. *Нехай* g — *лінійна функція. Якщо* $\det(a_{ij}) = 0$, *то для задачі* (4), (37) *існують відкриті множини* Φ_d, $\Phi_r \subset C^1(D, R^2)$ *такі, що* ω-*гранична множина* $\omega[\varphi]$ *траєкторії* $S^t[\varphi]$ *відповідної динамічної системи складається з*

детермінованих векторних полів, що утворюють в $C^{\#}(D, R^2)$ *періодичну траєкторію, якщо* $\varphi \in \Phi_d$;

випадкових векторних полів, що утворюють в $C^{\#}(D, R^2)$ *сім'ю майже періодичних траєкторій, якщо* $\varphi \in \Phi_r$; *при цьому для будь-якого* $\varphi \in \Phi_r$ *область* D *розпадається на дві підмножини* $D_1 = D_1(\varphi)$ *та* $D_2 = D_2(\varphi)$ *додатної міри Лебега такі, що всі „точки" ω-граничної множини* $\omega[\varphi]$ *є детермінованими на* D_1 *і випадковими на* D_2.

Теорему 11 можна дещо уточнити. Введемо (як і для одновимірної задачі) функцію

$$\gamma[\varphi](x_1) = \varphi_1(x_1, 1) - f(\varphi_2(x_1, 1)), \quad x_1 \in R, \tag{38}$$

і позначимо $\lambda^-(\varphi) = \inf\limits_{x_1 \in R} \gamma[\varphi](x_1)$, $\lambda^+(\varphi) = \sup\limits_{x_1 \in R} \gamma[\varphi](x_1)$ і $\Lambda[g, \varphi] = [\lambda^-(\varphi), \lambda^+(\varphi)]$.

Критерій обмеженості розв'язків: *відмінний від константи розв'язок граничної задачі* (4), (37), *породжений початковою функцією* $\varphi \in C^1(D, R^2)$, *є обмеженим тоді і тільки тоді, коли* $\varphi \in B^2(g)$, *де*

$$B^2(g) = \{\varphi \in C^1(D, R^2): \Lambda[g, \varphi] \subset \Lambda(g)$$

$$\varphi_i\left(\frac{b}{c}x_2 + \gamma[\varphi](x_1), x_2\right) \in I_{\gamma[\varphi](x_1)} \text{ при } x \in D, \ i = 1, 2\}.$$

Нехай λ^* — точна верхня грань значень λ, для яких відображення f_λ має цикли тільки періодів 2^m, $m = 1, 2, \ldots$ (тобто λ^* — найбільше із значень λ, при яких топологічна ентропія f_λ дорівнює нулю).

Критерій турбулентності: *якщо* $\Lambda[g, \varphi] \cap \{\lambda > \lambda^*\} \neq \varnothing$, *то для задачі* (4), (37) *початковий стан* φ *породжує турбулентність; якщо ж* $\Lambda[g, \varphi] \cap \cap \{\lambda \geq \lambda^*\} \neq \varnothing$, *то* φ *не породжує турбулентність.*

Нехай $\Lambda_{\text{per}}(g) = \{\lambda \in \Lambda(g)$: f_λ має притягуючий цикл$\}$, $\Lambda_{\text{reno}}(g) = \{\lambda \in$

$\in \Lambda(g)$: f_λ має канторову множину, яка притягує майже всі точки з $I_{f_\lambda}\}$ і $\Lambda_{\text{acim}}(g) = \{\lambda \in \Lambda(g)$: f_λ має абсолютно неперервну відносно міри Лебега інваріантну міру$\}$. Відомо, що $\Lambda_{\text{per}}(g)$ містить відкриту щільну в $\Lambda(g)$ підмножину [33], проте $\operatorname{mes}\Lambda_{\text{per}}(g) \neq \operatorname{mes}\Lambda(g)$, оскільки $\operatorname{mes}\Lambda_{\text{acim}}(g) > 0$ [34], але все ж $\operatorname{mes}(\Lambda_{\text{per}} \cup \Lambda_{\text{reno}} \cup \Lambda_{\text{acim}}) = \operatorname{mes}\Lambda$ [35].

Означення 13. *Для кожної із розглядуваних граничних задач будемо називати розв'язок $u_\varphi(x,t)$ асимптотично періодичним (асимптотично майже періодичним), якщо траєкторія $S^t[\varphi]$ відповідної динамічної системи є асимптотично періодичною (асимптотично майже періодичною) в C^Δ- або в $C^\#$-просторі.*

Теорема 12. *Нехай* $\det(a_{ij}) = 0$, g *— лінійна функція і* $\varphi \in B^2(g)$. *Тоді розв'язок* u_φ *задачі* (4), (37) *є*

асимптотично періодичним, якщо $\Lambda[g,\varphi] \subset \Lambda_{\text{per}}(g)$; *при цьому* $\omega[\varphi]$ *складається з детермінованих (напівнеперервних) функцій; початковий стан* φ *породжує турбулентність тоді і тільки тоді, коли* $\Lambda[g,\varphi] \subset \{\lambda > \lambda^*\}$;

асимптотично майже періодичним, якщо $\gamma[\varphi] \neq \text{const}$ *і* $\Lambda[g,\varphi] \cap \cap \Lambda_{\text{acim}}(g) \neq \varnothing$; *при цьому* $\omega[\varphi]$ *складається з випадкових функцій; якщо* $\gamma[\varphi](x_1) \neq \text{const}$ *ні на якому інтервалі, то для будь-якої з цих випадкових функцій область* D *усюди щільно покривають „ламінарні плями" — відкриті множини, на яких функція дорівнює константам, що змінюються від функції до функції (під час руху по* ω*-граничній множині) періодично з різними як завгодно великими періодами.*

Насправді припущення, що g є лінійною функцією, може бути суттєво послаблене. Наприклад, *усі твердження в теоремах* 10 – 12 *мають місце* і тоді, коли припустити, що (A) g *є* C^2*-функцією з* $|g'(w)| \geq \varepsilon > 0$ *та* $(w-s)g''(w) \geq 0$ *для всіх* $w \in R^1$ *і деякого* $s \in R^1$ (у цьому випадку первісна від g є унімодальною функцією з від'ємним шварціаном).

Як свідчать наведені вище теореми, явище автостохастичності в детермінованих системах не є екзотичним, воно може мати місце для певних класів граничних умов. Самі теореми базуються на теоремі Якобсона про те, що в однопараметричних сім'ях квадратичних або близьких до них одновимірних відображень квазівипадкові відображення не є винятковими: міра Лебега множини $\Lambda_{\text{acim}}(g)$, як зазначалось вище, є додатною. З цього, наприклад, випливає, що ν-міра множини $\{\varphi \in C^1([0,1],R^2)$: $\gamma[\varphi] \in \Lambda_{\text{acim}}(g)\}$, початкові функції з якої якраз і ведуть до автостохастичності в задачі (2), (33), є також додатною.

Можна задати питання: звідки виникає випадковість в повністю детермінованих граничних задачах, в чому коріння того, що гладкі векторні поля з часом перетворюються в випадкові? Для розуміння цього буде корисним таке зауваження. Всі задачі, які ми тут розглядаємо, мають ту спільну особливість, що вони зводяться до задач про коливання континуальної сім'ї незв'язаних між собою осциляторів: можна вважати, що в кожній точці області D знаходиться маятник, коливання якого визначаються відображенням f і не залежать від коливань маятників в інших точках області D. У випадку задачі (2), (3) чи (4), (5) маятники одні й ті самі в усіх точках області D і не залежать від початкових станів (теорема 9). Для задачі (2), (33) вже з'являється залежність від початкових станів, проте для кожного конкретного початкового стану закон коливання маятників в усіх точках області D один і той самий (теорема 10). Для задачі (4), (37) ситуація ще більш ускладнюється: для маятників в різних точках області D закони коливань, взагалі кажучи, різні і це може спричиняти до

того, що для конкретного початкового стану відповідні граничні стани на деяких підмножинах з D будуть детермінованими, а на деяких інших — випадковими (теорема 11).

Викладене вище свідчить про певну близькість розглядуваних задач до задач про коливання в гратах або ланцюжках зв'язаних відображень, в яких розглядаються дискретні (скінченні або зчисленні) сім'ї відображень (на відміну від континуальних сімей незв'язаних відображень) і яким в останні роки присвячено багато робіт. Відзначимо, що при наявності тих чи інших збурень у розглядуваних нами задачах вони можуть зводитися до континуальних сімей зв'язаних відображень. В цьому випадку ми маємо деякі результати, представлені в [13]. Зрозуміло, що задачі, які виникають в різного роду застосуваннях, в кращому разі можна розглядати як збурення задач, про які йде мова, і, отже, побудова відповідної теорії збурень вельми актуальна.

5. Універсальні властивості деяких нескінченновимірних систем. Теореми попереднього пункту можна суттєво розширити і уточнити, якщо використати ще деякі факти теорії одновимірних динамічних систем, зокрема добре відомі властивості, які часто називають універсальними у тому сенсі, що вони мають місце для багатьох класів динамічних систем. Слово „універсальності" з'явилось, мабуть, вперше в роботах Фейгенбаума [4, 6], де були встановлені „універсальні" константи $\delta = 4{,}6992\ldots$ та $\alpha = 2{,}5029\ldots$. Перша з них відповідає за швидкість, з якою відбуваються біфуркації подвоєння періоду циклів в однопараметричних сім'ях гладких відображень, а друга показує, у скільки разів при подвоєннях періоду зменшується амплітуда коливань.

Послідовність, в якій при біфуркаціях з'являються цикли тих чи інших періодів, визначається таким „універсальним" порядком:

$$1 \lhd 2 \lhd 2^2 \lhd 2^3 \lhd \ldots \lhd 5\cdot 2^2 \lhd 3\cdot 2^2 \lhd \ldots$$

$$\ldots \lhd 5\cdot 2 \lhd 3\cdot 2 \lhd \ldots \lhd 9 \lhd 7 \lhd 5 \lhd 3. \qquad (39)$$

Якщо маємо сім'ю неперервних відображень $f_\lambda\colon R \to R$ і через $\lambda(m)$ позначаємо нижню границю значень параметра λ, при яких відображення f_λ має цикл періоду m, то $\lambda(m_1) \le \lambda(m_2)$, якщо $m_1 \lhd m_2$.

В роботі [28] розглядались різницеві рівняння та граничні задачі, що залежать від параметра, і були сформульовані деякі універсальні властивості біфуркаційних значень параметрів та амплітуд коливань розв'язків. В роботах [12, 23, 28] розглядались диференціально-різницеві рівняння та граничні задачі з граничними умовами типу (33), для яких „універсальності" мають місце для стратифікації простору початкових станів, побудованій на основі асимптотичної поведінки розв'язків. Нижче ми формулюємо декілька типових тверджень для граничної задачі (2), (33). Для цього нам досить, щоб для функції g в (33) виконувалось припущення (А).

Нехай φ_ξ, $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, є сім'єю функцій з $B^1(g)$, які неперервно залежать від параметра ξ, і, крім того, $\lambda_i = \gamma[\varphi_{\xi_i}]$, $i = 1, 2$.

Теорема 13. *Якщо відображення* $f_\lambda\colon w \mapsto f(w) + \lambda$ *при* $\lambda = \lambda_1$ *не має циклів періоду* n_1, *а при* $\lambda = \lambda_2$ *має цикл періоду* n_2 *і* $n_1 \lhd n_2$, *то для довільного* n, $n_1 \lhd n \lhd n_2$,

існує інтервал $\Xi_n \subset (\xi_1, \xi_2)$ *такий, що при* $\xi \in \Xi_n$ *розв'язок задачі* (2), (33) *з початковою функцією* φ_ξ *є асимптотично* n*-періодичним*;

якщо $n_1 \ne 2^k$, *існує* $\xi_n' \in \Xi_n$ *таке, що* ω*-гранична множина* $\omega[\varphi_{\xi_n'}]$ *в* $C^\#$ *є періодичною траєкторією з періодом* n, *точки якої є випадковими функціями.*

Нехай відображення $p\colon [\xi_1, \xi_2] \to \Lambda(g)$, що визначається формулою

$p(\xi) = \gamma[\varphi_\xi]$, є дифеоморфізмом, який не змінює орієнтацію. Нехай $\xi(m)$ — нижня границя значень $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$, для яких відповідний розв'язок u_φ задачі (2), (33) є асимптотично m-періодичним (якщо він існує).

Теорема 14. *Справедливі такі асимптотичні формули:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi(2^n) - \xi(2^{n-1})}{\xi(2^{n+1}) - \xi(2^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\xi(2^n m) - \xi(2^{n-1} m)}{\xi(2^{n+1} m) - \xi(2^n m)} \doteq \delta$$

для будь-якого непарного $m > 1$ *і*

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{\xi(2^n(2m+1)) - \xi(2^n(2m+3))}{\xi(2^n(2m+3)) - \xi(2^n(2m+5))} = \delta^*,$$

де $\delta^* = 2{,}948\ldots$.

Ці граничні співвідношення є наслідком відповідних універсальних співвідношень для значень $\lambda(m)$ параметра λ у відображенні f_λ, які виконуються за умов (A) [4, 5, 36].

Позначимо через $r(m)$ нижню границю значень параметра λ, для яких f_λ має гладку інваріантну міру з носієм, що складається з m інтервалів (і, отже, є циклом інтервалів періоду m). Відомо, що для $m \neq 2^k$ $\lambda(m) < r(m) < \lambda(m')$ при будь-якому m', якщо $m \lhd m'$, а при $m = 2^k$ $\lambda(6m) < r(m) < \lambda((2l+1)m)$ для будь-якого $l > 0$. Таким чином, для $r(m)$ мають місце ті ж кількісні співвідношення, що й для $\lambda(m)$. Якщо $\lambda \in (\lambda(2^n), r(2^{n-1})]$, $n \geq 1$, відображення f_λ має „поглинаючий" цикл інтервалів періоду 2^n, який „затягує в себе" всі траєкторії за винятком зчисленної їх кількості (що „приклеюються" до відштовхуючих циклів періодів $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$). Позначимо його $J(f_\lambda)$. При $\lambda = r(2^{n-1})$ цей цикл якраз є носієм гладкої міри. Нехай $d_n = \sup_{\lambda \in (\lambda(2^n), r(2^{n-1})]} d(\lambda)$, де через $d(\lambda)$ позначено довжину найдовшого з 2^n інтервалів, що складають $J_{(f_\lambda)}$. Тоді $\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = \alpha$. Це, зокрема, означає, що кожну траєкторію відображення f_λ (за винятком згаданих вище) можна, починаючи з деякого моменту, наблизити періодичною траєкторією періоду 2^n з точністю $\sim \alpha^{-n}$.

Твердження теореми 10 можуть бути суттєво уточнені таким чином.

Позначимо через $\mathcal{P}_n$ множину $\{\varphi \in B^1(g)\colon \lambda(2^n) < \gamma[\varphi] < \lambda(2^{n+1})\}$, через Q_n множину $\{\varphi \in B^1(g)\colon \lambda(2^n) < \gamma[\varphi] < r(2^{n+1})\}$ і через $\mathcal{R}_n$ множину $\{\varphi \in Q_n\colon \gamma[\varphi] \in \Lambda_{\text{acim}}(g)\}$.

Теорема 15. *Розв'язок задачі* (2), (33) *є*

асимптотично 2^n*-періодичним для* $\varphi \in \mathcal{P}_n$; *при цьому* $\omega[\varphi]$ — *цикл періоду* 2^n, *що складається з детермінованих функцій*;

асимптотично періодичним для майже кожного $\varphi \in Q_n \setminus \mathcal{R}_n$; *при цьому* $\omega[\varphi]$ — *цикл періоду, кратного* 2^n, *що складається з детермінованих функцій*;

асимптотично періодичним для майже кожного $\varphi \in \mathcal{R}_n$; *при цьому* $\omega[\varphi]$ — *цикл періоду, кратного* 2^n, *що складається з випадкових функцій.*

Крім того, для ν*-міри множин* $\mathcal{P}_n$, Q_n, $\mathcal{R}_n$ *мають місце такі універсальні співвідношення:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu(\mathcal{P}_n)}{\nu(\mathcal{P}_{n+1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\nu(Q_n)}{\nu(Q_{n+1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\nu(\mathcal{R}_n)}{\nu(\mathcal{R}_{n+1})}=\delta. \qquad (40)$$

Теорема 16. *Існує константа $C>0$ така, що для будь-якого $\varepsilon>0$ і кожного $\varphi\in Q_n$ знайдеться 2^n-періодична кусково-постійна функція p_φ, що має властивість: для розв'язку u_φ задачі* (2), (33) *існує $\tau(\varepsilon)>0$ таке, що при $\tau>\tau(\varepsilon)$*

$$\operatorname{mes}\{(x,t)\colon \|u_\varphi(x,t)-p_\varphi(x,t)\|_{R^2}>c2^{-n} \text{ при } \tau<t<\tau+1\}<\varepsilon. \qquad (41)$$

Можна відмітити, що (41) вказує на швидке спадання дисперсій для випадкових функцій, які складають граничні траєкторії, коли $n\to\infty$. Однак, як показує (40), і кількість тих початкових функцій з $\mathcal{R}_n$, які приводять до цих граничних станів, також швидко спадає при зростанні n.

Поведінка розв'язків у випадку двовимірної граничної задачі (4), (37), як зазначалося вище, значно складніша. Це пов'язано, в першу чергу, з тим, що поведінка розв'язку визначається в різних точках області D відображенням f_λ з різними значеннями параметра λ, а отже, і з різними, як правило, асимптотичними властивостями. Але коли $\Lambda(g,\varphi)\subset\{\lambda<\lambda^*\}$ (і тому траєкторії у всіх f_λ асимптотично періодичні), неважко сформулювати деякі аналоги теорем 13 та 14. Наприклад, *якщо φ_ξ, $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, є сім'єю функцій з $B^2(g)$, які неперервно залежать від параметра ξ, і $\Lambda[g,\varphi_{\xi_1}]\subset\{\lambda<\lambda(2^{m_1})\}$, а $\Lambda[g,\varphi_{\xi_2}]\cap\{\lambda>\lambda(2^{m_2})\}\neq\varnothing$, $m_1<m_2$, то для кожного m, $m_1<m<m_2$, існує інтервал $\Xi_m\subset(\xi_1,\xi_2)$ такий, що при $\xi\in\Xi_m$ розв'язок задачі* (4), (37) *з початковою функцією φ_ξ є асимптотично 2^m-періодичним*

Якщо ж $\Lambda[g,\varphi]$ — нетривіальний інтервал, що перетинається, наприклад, з множиною $\Lambda_{\text{reno}}(g)$ або $\Lambda_{\text{acim}}(g)$, то розв'язок задачі (4), (37) вже не є асимптотично періодичним, і в цьому випадку треба використовувати універсальні властивості, які мають місце одночасно для всіх відображень f_λ, $\lambda\in\Lambda[g,\varphi]$, або ж розглядати властивості розв'язків не на всьому „фізичному просторі" D, а наприклад, на деяких його підмножинах або й в окремих точках $x\in D$.

1. *Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // Успехи мат. наук. – 1984. – 39, № 3. – С. 3–37.
2. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // Communs Math. Phys. – 1971. – **20**. – P. 167–192. (Переклад рос.: Д. Рюэль, Ф. Такенс. О природе турбулентности // Странные аттракторы. – М.: Мир, 1981.)
3. *Li T. Y., Yorke J.* Period three implies chaos // Amer. Math. Mon. – 1975. – **82**. – P. 985–992.
4. *Feigenbaum M.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Statist. Phys. – 1978. – **19**. – P. 25–52.
5. *Collet P., Tresser C.* Itération d'endomorphismes et groupe de renormalisation // J. Phys. C5. – 1978. – **25**.
6. *Feigenbaum M.* The universal metric properties of nonlinear transformations // J. Statist. Phys. – 1979. – **21**. – P. 669–706.
7. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи мат. наук. – 1983. – **38**, № 2. – С. 343–374.
8. *Sharkovskii A. N.* How complicated can be one dimensional dynamical systems: descriptive estimates of sets // Dynamical Systems and Ergodic Theory. – 1989. – **23**. – P. 447–453.
9. *Шарковский А. Н.* Колебания, описываемые автономными разностными и дифференциально-разностными уравнениями // Proc. VIII ICNO (Prague, 1978). – Prague: Academia, 1979. – P. 1073–1078.
10. *Шарковский А. Н.* „Сухая" турбулентность // Short comm. Int. congress of mathematicians (Warszawa, August 16–24, 1983), X, sect. 12. – Warszawa, 1983.
11. *Sharkovsky A. N.* Dry turbulence // Plasma Theory and Nonlinear and Turbulence Processes in Physics. – World Scientific, 1984. – P. 1621–1626.
12. *Шарковский А. Н., Сивак А. Г.* Универсальный порядок и универсальная скорость бифурка-

ций решений дифференциально-разностных уравнений // Приближенные и качественные методы теории дифференциально-разностных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 98–105.
13. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с. (Переклад англ.: A. N. Sharkovsky, Yu. L. Maistrenko and E. Yu. Romanenko. Difference Equations and Their Applicatiuons (Ser. Mathematics and Its Applications, v. 250). – Kluwer Acad. Publ.., 1993. – 358 p.)
14. *Sharkovsky A. N., Maistrenko Yu. L., Romanenko E. Yu.* Attractors of difference equations and turbulence // Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics. – World Scientific, 1987. – **1**. – P. 520–536.
15. *Романенко Е. Ю., Шарковский А. Н.* Качественное исследование некоторых краевых задач: сложные колебательные режимы // Дифференциально-функциональные уравнения и их применения к краевым задачам. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 74–87.
16. *Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu.* Problems of turbulence theory and iteration theory // Proc. ECIT-91. – World Scientific, 1992. – P. 241–252.
17. *Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu.* Ideal turbulence: attractors of deterministic systems may lie in the space of random fields // Int. J. Biffurcation and Chaos. – 1992. – **2**, № 1. – P. 31–36.
18. *Шарковський О. М., Романенко О. Ю.* Автостохастичність: атрактори детермінованих задач можуть містити випадкові функції // Допов. НАН України. – 1992. – № 10. – С. 33–37.
19. *Sharkovsky A. N., Maistrenko Yu. L., Deregel Ph., Chua L. O.* Dry turbulence from a time-delayed Chua's circuit // Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos. – World Scientific, 1993. – P. 993–1041.
20. *Romanenko E. Yu., Vereikina M. B.* On simulation of spatial-temporal chaos: the simplest mathematical pattern and computer graphics // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 10. – С. 1398–1410.
21. *Sharkovsky A. N.* Chaos from a time-delayed Chua's circuit // IEEE Trans. Circuits and Systems. I. – 1993. – **40**, № 10. – P. 781–783.
22. *Sharkovsky A. N.* Ideal Turbulence in an idealized time-delayed Chua's circuit // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1994. – **4**, № 2. – P. 303–309.
23. *Sharkovsky A. N., Sivak A. G.* Universal phenomena in solution bifurcation of some boundary value problems // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – **1**, № 2. – P. 147–157.
24. *Romanenko E. Yu., Sharkovsky A. N.* Self-stochasticity in dynamical systems as a scenario for deterministic spatio-temporal chaos // Chaos and Nonlinear Mech. Ser. B. – 1995. – **4**. – P. 172–181.
25. *Romanenko E. Yu.* On chaos in continuous difference equations // World Scientific Series in Appl. Anal. – 1995. – **4**. – P. 617–630.
26. *Romanenko E. Yu., Sharkovsky A. N., Vereikina M. B.* Self-structuring and self-similarity in boundary value problems // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1995. – **5**, № 5. – P. 1407–1418; and // Thirty years after Sharkovskii's theorem: new perspectives (Proc. Conf.). – World Scientific, 1995. – P. 145 – 156.
27. *Sharkovsky A. N., Deregel Ph., Chua L. O.* Dry turbulence and period-adding phenomena from a 1 – D map with time delay // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1995. – **5**, № 5. – P. 1283 – 1302; and // Thirty years after Sharkovskii's theorem: new perspectives (Proc. Conf.). – World Scientific, 1995. – P. 21 – 40.
28. *Sharkovsky A. N.* Universal phenomena in some infinite-dimensional dynamical systems // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1995. – **5**, № 5. – P. 1419–1425; and // Thirty years after Sharkovskii's theorem: new perspectives (Proc. Conf.). – World Scientific, 1995. – P. 157 – 164.
29. *Gorodetski A., Ilyashenko Yu.* Minimal and strange attractors // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1996. – **6**, № 6. – P. 1177–1183.
30. *Крылов Н. С.* Работы по обоснованию статистической физики . – М.: Изд-во АН СССР, 1950. – 208 с.
31. *Born M.* Vorhersagbarkeit in der klassischen Mechanik // Z. Physik. – 1958. – **153**. – S. 372–388.
32. *Prigogine I., Stengers I.* Entre le Temps et l'Éternité. – Paris: Coll. Champs, Flammarion, 1992.
33. *Graczyk J., Swiatek G.* Hyperbolicity in the real quadratic family. – 1995. – (Preprint № PM 192/PennState Univ.).
34. *Jakobson M. V.* Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one dimensional maps // Communs Math. Phys. – 1981. – **81**. – P. 39–88.
35. *Martens M., Nowicki T.* Invariant measures for typical quadratic maps. – 1996. – (Preprint № 1996/6/ SUNY, Stony Brook). – 14 p.
36. *Коляда С. Ф., Сивак А. Г.* Универсальные константы для однопараметрических отображений // Осцилляция и устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1992. – С. 53–60.

Одержано 09. 10.96