УДК 517.948

В. В. Скричевский

Дифференцирование операторозначной меры в банаховом оснащении

Докажем теорему о дифференцируемости операторозначной меры в случае банахового оснащения [1, 2].

Пусть $(H_0, (\cdot, \cdot)_0)$ — гильбертово пространство, (B_-, H_0, B_+) — банахово оснащение, т. е. имеется тройка $B_- \supset H_0 \supset B_+$, где банахово пространство B_+ сепарабельно и плотно вложено в H_0, $B_- = B_+^*$, а двойственность на $B_- \times B_+$ является продолжением скалярного произведения в H_0. И пусть A — самосопряженный оператор в H_0, а $E(\cdot)$ — его разложение единицы. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. *Если существует неотрицательная, ограниченная функция f из $L_1(R^1, dx)$, удовлетворяющая условию: для любых $a < b$*

$$\varliminf_{\varepsilon \downarrow 0+} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b \left\| f\left(\frac{A-\lambda}{\varepsilon}\right)\right\|_{B_+, B_-} d\lambda < +\infty, \tag{1}$$

то существует σ-аддитивная скалярная мера такая, что:

1) $E \ll \mu$;

2) *для почти всех λ по* $\operatorname{mod} \mu$ *существует непрерывный неотрицательный оператор $\Psi(\lambda) \in L(B_+, B_-)$, для которого верно равенство: $u, v \in B_+$*

$$(E(\Omega)\, u, v)_0 = \int_\Omega (\Psi(\lambda)\, u, v)_0\, d\mu(\lambda).$$

Здесь $\|\cdot\|_{B_+ B_-}$ *— норма оператора действующего из B_+ в B_-.*

З а м е ч а н и е 1. Если в качестве функции f взять функцию $\dfrac{1}{x^2+1}$, то условие (1) примет вид

$$\varliminf_{\varepsilon \downarrow 0+} \frac{1}{2} \int_a^b \| R(\lambda + i\varepsilon) - R(\lambda - i\varepsilon)\|_{B_+, B_-} d\lambda < +\infty,$$

где $R(z)$ — резольвента оператора A в точке z.

З а м е ч а н и е 2. Ниже будет показано, что условие (1) выполнено, если оператор вложения O пространства B_+ в H_0 имеет вид

$$Ou = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, u)_0\, h_n, \tag{2}$$

где $\{h_n\}_1^\infty \subset H_0$, $\{\varepsilon_n\}_1^\infty \subset B_-$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| h_n \|_0 \| e_n \|_- = C < +\infty. \tag{3}$$

Таким образом, теорема включает в себя известные результаты Фойяша [5] о дифференцировании разложения единицы, установленные в случае операторов вложения указанного вида. Можно так же показать, что условие (1) выполняется и в случае гильбертового оснащения с квазиядерным оператором вложения O, т. е. теорема обобщает некоторые результаты о дифференцировании операторозначной меры, полученные Ю. М. Березанским [1, 4].

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Л е м м а. *Пусть T — самосопряженный оператор в H_0,* а $F(\cdot)$ *— его разложение единицы. Тогда для любой неотрицательной, ограниченной функции f из $L_1(R^1, dx)$ с нормой, отличной от нуля, для всех $u \in H_0$, $a < b$ выполняется равенство*

$$\varliminf_{\varepsilon \downarrow 0+} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b \left(f\left(\frac{T-\lambda}{\varepsilon}\right) u, u\right)_0 d\lambda = \frac{1}{\|f\|_{L_1}} \left\{ \int_0^{+\infty} f(x)\, dx \times \right.$$

$$\left. \times (F([a, b))\, u, u)_0 + \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx\, (F((a, b])\, u, u)_0 \right\}.$$

Доказательство леммы аналогично доказательству соответствующей формулы Стоуна [5] и поэтому мы его не приводим.

Вернемся к доказательству теоремы. Предположим, что $\int_{-\infty}^{0} f(x) dx \neq 0$.

Пусть S — полукольцо, порожденное интервалами $(a, b]$. Определим на S меру μ. Для этого через $\nu((a, b])$ обозначим следующую функцию:

$$\nu((a, b]) = \varlimsup_{\varepsilon \uparrow 0+} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b \left\| f\left(\frac{A-\lambda}{\varepsilon}\right)\right\|_{B_+, B_-} d\lambda.$$

Легко увидеть, что ν удовлетворяет следующим условиям:

1) если $(a_1, b_1] \subset (a_2, b_2]$, то $\nu((a_1, b_1]) \leqslant \nu((a_2, b_2])$;

2) $\nu(\varnothing) = 0$;

3) для всех $\{(a_n, b_n]\}_1^\infty : (a_k, b_k] \cap (a_m, b_m] = \varnothing$, $m \neq k$, $(a, b] = \bigcup_n (a_n, b_n]$, $\sum_{n=1}^\infty \nu((a_n, b_n]) \leqslant \nu((a, b])$.

Тогда определим $\mu((a, b])$ равной $\inf \left\{\sum_n \nu((a_n, b_n]) : (a, b] = \bigcup_n (a_n, b_n] (a_m, b_m] \cap (a_k, b_k] = \varnothing, m \neq k\right\}$. Докажем, что μ — мера на σ-кольце S. Для этого достаточно доказать только σ-аддитивность μ. Очевидно, что для любой последовательности $\{(a_n, b_n)\}_1^\infty$ такой, что $(a_m, b_m] \cap (a_k, b_k] = \varnothing$, $m \neq k$, $(a, b] = \bigcup_n (a_n, b_n]$, $\mu((a, b]) \geqslant \sum_{n=1}^\infty \mu((a_n, b_n])$ (это следует из условия 3). Зададим $\varepsilon > 0$. Пусть $\{\Omega_{n,k}^\varepsilon\}_{k=1}^\infty$ — такая последовательность полуоткрытых интервалов, что:

1) $\Omega_{n,p}^\varepsilon \cap \Omega_{n,m}^\varepsilon = \varnothing$, $p \neq m$, $[a_n, b_n] = \bigcup_k \Omega_{n,k}^\varepsilon$;

2) $\sum_{k=1}^\infty \nu(\Omega_{n,k}^\varepsilon) \leqslant \mu((a_n, b_n]) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Тогда

$$\sum_n \mu((a_n, b_n]) \geqslant \sum_n \left(\left(\sum_k \nu(\Omega_{n,k}^\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right) = \sum_{n,k} \nu(\Omega_{n,k}^\varepsilon) - \varepsilon \geqslant \mu((a, b]) - \varepsilon.$$

Итак, мы показали, что μ — σ-аддитивная мера на S. Докажем, что для любого $u \in B_+$, $(a, b] \in S$

$$(E((a, b])u, u)_0 \leqslant K\mu((a, b])\|u\|_+^2.$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Пусть $\Omega_n^\varepsilon = (a_n^\varepsilon, b_n^\varepsilon]$ такие, что $\Omega_m^\varepsilon \cap \Omega_k^\varepsilon = \varnothing$ $m \neq k$, $(a, b] = \bigcup_n \Omega_n^\varepsilon$, $\sum_n \nu(\Omega_n^\varepsilon) \leqslant \mu((a, b]) + \varepsilon$. Тогда

$$(E((a, b])u, u)_0 = \sum_n (E(\Omega_n^\varepsilon)u, u)_0 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx\right)^{-1} \sum_n \left(\int_0^{+\infty} f(x)\,dx\,(E([a_n^\varepsilon, b_n^\varepsilon])u, u\right)_0 +$$

$$+ \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx\,(E(\Omega_n^\varepsilon)u, u)_0\Big) \leqslant K\|u\|_+^2 \sum_n \nu(\Omega_n^\varepsilon) \leqslant K\|u\|_+^2(\varepsilon + \mu((a, b])).$$

В силу произвольности ε, u получим

$$\|E((a, b])\|_{B_+, B_-} \leqslant K\mu((a, b]), \tag{4}$$

а значит, и $E \ll \mu$.

Пусть L — рациональная оболочка некоторого счетного, плотного в B_+ множества. Можно показать [4], что существует множество R_L полной

μ-меры такое, что для всех $u, v \in L$, $\lambda \in R_L$ существует производная Радона — Никодима

$$\Psi(\lambda, u, v) = d(E(\lambda)u, v)_0/d\mu(\lambda) \text{ и } \Psi(\lambda, u, v) = \lim_{n\to+\infty}(E(\Delta_n)u, v)_0/d\mu(\Delta_n),$$

где Δ_n — последовательность интервалов некоторого разбиения оси, содержащих точку λ и стягивающихся к ней.

В силу последнего равенства и неравенства (4) можно заключить, что $E(\Delta_n)/\mu(\Delta_n)$ (как операторы, действующие из B_+ в B_-) слабо сходятся к некоторому оператору $\Psi(\lambda)$. Этот оператор и является исходным.

Приведенные выше рассуждения справедливы и тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = 0.$$

Необходимо лишь в качестве S взять полукольцо, порожденное интервалами вида $[a, b]$, и использовать тот факт, что

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx \neq 0.$$

Предположим теперь, что оператор вложения O пространства B_+ в H_0 имеет вид (2) и выполнено (3). Тогда согласно [3] $O^*E(\cdot)O$ всегда можно продифференцировать (в слабом смысле) по некоторой скалярной мере.

Покажем, что для любого самосопряженного оператора A, любой неотрицательной, ограниченной, с отличной от нуля нормой, функции f из $L_1(R^1, dx)$ выполняется условие (1) теоремы. Действительно, если $u \in B_+$, то

$$\left(f\left(\frac{A-\lambda}{\varepsilon}\right)u, u\right)_0 = \sum_{n,m}\left(f\left(\frac{A-\lambda}{\varepsilon}\right)h_n, h_m\right)_0 (e_n, u_n)_0 (e_m, u)_0 \leqslant$$

$$\leqslant \|u\|_+^2 \sum_{n,m}\left|\left(f\left(\frac{A-\lambda}{\varepsilon}\right)h_n, h_m\right)_0\right| \|e_n\|_- \|e_m\|_- \leqslant$$

$$\leqslant \|u\|_+^2 \left(\sum_{n}\left(f\left(\frac{A-\lambda}{\varepsilon}\right)h_m, h_n\right)_0^{1/2} \|e_n\|_-\right)^2 =$$

$$= \|u\|_+^2 \left(\sum_{n}\left(\left(f\left(\frac{A-\lambda}{\varepsilon}\right)h_n, h_n\right)_0 \frac{\|e_n\|_-}{\|h_n\|_0}\right)^{1/2} (\|e_n\|_- \|h_n\|_0)^{1/2}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C\|u\|_+^2 \sum_{n}\left(f\left(\frac{A-\lambda}{\varepsilon}\right)h_n, h_n\right)_0 \frac{\|e_n\|_-}{\|h_n\|_0}.$$

В силу этого равенства можно заключить, что

$$\left\|f\left(\frac{A-\lambda}{\varepsilon}\right)\right\|_{B_+B_-} \leqslant C\sum_{n}\left(f\left(\frac{A-\lambda}{\varepsilon}\right)h_n, h_n\right)_0 \frac{\|e_n\|_-}{\|h_n\|_0}.$$

Отсюда следует

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0+}\frac{1}{\varepsilon}\int_a^b \left\|f\left(\frac{A-\lambda}{\varepsilon}\right)\right\|_{B_+B_-} d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{n}\frac{\|e_n\|_-}{\|h_n\|_0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0+}\frac{1}{\varepsilon}\int_a^b\left(f\left(\frac{A-\lambda}{\varepsilon}\right)h_n, h_n\right)_0 d\lambda \leqslant C\sum_{n}\frac{\|e_n\|_-}{\|h_n\|_0}(h_n, h_n)_0 = C^2.$$

1. *Березанский Ю. М.* О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов // Укр. мат. журн.— 1959.— **11**, № 1.— С. 16—24.
2. *Березин Ф. А., Шубин М. А.* Уравнение Шредингера.— М. : Наука, 1983.— 392 с.
3. *Foias C.* Decompositions integrales des famies spectrales et semi-spectrales en operateurs qui sortent de l'espace hilbertien // Acta sci. Math.— 1959.— **20**, N 2—3.— P. 117—155.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.
5. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики.— М. : Мир, 1977.— 354 с.

Киев. ин-т автоматики им. XXV съезда КПСС Получено 12.05.86