УДК 517.9

Ю. А. Митропольский, Ф. У. Носиров

Воздействие случайных сил на гироскопические системы

Как известно, гироскоп широко используется в автоматических системах, управляющих подвижными объектами. При этом возникает задача определения точности показаний гироскопических устройств, типичным условием работы которых является наличие сил и моментов, вызванных перемещением в пространстве несущих объектов. Эти силы и моменты, а также ряд параметров самих гироскопических устройств являются, как правило, случайными из-за наличия случайных перемещений несущих объектов.

Для исследования случайных колебаний в таких системах применяется асимптотический метод Крылова — Боголюбова — Митропольского [1—3] с последующим применением метода уравнений Колмогорова — Фоккера—Планка [4—6].

В настоящей работе эти методы использованы для построения асимптотических решений в стохастических системах, описываемых уравнениями вида

$$\begin{aligned} dx_h/dt - \omega_h(\tau)\,y_h &= \varepsilon Q_h^{(1)}(\tau, \theta, x, y, \varepsilon), \\ dy_h/dt + \omega_h(\tau)\,x_h &= \varepsilon Q_h^{(2)}(\tau, \theta, x, y, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\, Q_h^{(3)}(\tau, \theta, x, y, \varepsilon)\,\dot{\eta}_h(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\tau = \varepsilon t$, $d\theta/dt = \nu(\tau)$, $Q_h^{(l)}(\tau, \theta, x, y, \varepsilon)$ ($l = 1, 2, 3$; $h = 1, 2, \ldots, N$) — периодические по θ функции с периодом 2π, причем $Q_h^{(l)}(\tau, \theta, x, y, \varepsilon)$, $\omega_h(\tau)$ и $\nu(\tau)$ имеют достаточное число производных при всех конечных значениях τ, θ, x, y и достаточно малых ε (совокупность $x_1, x_2, \ldots, x_N$ или $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_N$ обозначаем соответственно одной буквой x или y), $\dot{\eta}_h(t)$ — независимый процесс белого шума, являющийся обобщенной производной от винеровского процесса $\eta_h(t)$.

Для построения приближенного решения воспользуемся методом, изложенным в [2], однако для данной системы уравнений будем искать приближенное решение, соответствующее многочастотному режиму. Чтобы применить этот метод без существенных изменений и тем самым сохранить единообразие изложения, следует систему $2N$ уравнений первого порядка преобразовать к системе N уравнений второго порядка «квазинормального» [2, 7] вида.

После ряда элементарных выкладок система уравнений (1) может быть сведена к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$d^2x_h/dt^2 + \omega_h^2(\tau)\,x_h = \varepsilon X_h^{(1)}(\tau, \theta, x, \dot{x}, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\, X_h^{(2)}(\tau, \theta, \dot{x}, \varepsilon)\,\dot{\eta}_h(t), \tag{2}$$

где

$$X_h^{(1)}(\tau, \theta, x, \dot{x}, \varepsilon) = \frac{1}{\omega_h(\tau)} \frac{d\omega_h(\tau)}{d\tau} \frac{dx_h}{dt} + \nu(\tau) \frac{\partial Q_h^{(1)}(\tau, \theta, x, \dot{x}, \varepsilon)}{\partial\theta} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial Q_h^{(1)}(\tau, \theta, x, \dot{x}, \varepsilon)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial Q_h^{(1)}(\tau, \theta, x, \dot{x}, \varepsilon)}{\partial \dot{x}_i}\, \omega_i(\tau)\, x_i +$$

$$+ \omega_h Q_h^{(2)}(\tau, \theta, x, \dot{x}, \varepsilon),$$

$$X_h^{(2)}(\tau, \theta, x, \dot{x}, \varepsilon) = \omega_h(\tau)\, Q_h^{(3)}(\tau, \theta, x, y, \varepsilon).$$

Введем некоторые обозначения и вспомогательные определения, позволяющие упростить выкладки. Будем обозначать буквой m сложный индекс, представляющий набор N индексов $m_1, m_2, \ldots, m_N$, каждый из которых может принимать любые целые значения. Через a будем обозначать совокупность величин $a_1, a_2, \ldots, a_N$; через p и q — соответственно совокупности величин $p_1, p_2, \ldots, p_N$ и $q_1, q_2, \ldots, q_N$, где числа p_j и q_i являются взаимно простыми при всех $i = 1, 2, \ldots, N$. Пусть $p\varphi + \psi$ обозначает совокупность $p_1\varphi_1 + \psi_1, \ldots, p_N\varphi_N + \psi_N$, где $\varphi_h = \frac{1}{q_h}\theta$; $\omega(\tau)$—совокупность $\omega_1(\tau), \omega_2(\tau), \ldots$ $\ldots, \omega_N(\tau)$; $\omega^2(\tau)$ — совокупность $\omega_1^2(\tau), \omega_2^2(\tau), \ldots, \omega_N^2(\tau)$; при этом $m(p\varphi+\psi) = m_1(p_1\varphi_1 + \psi_1) + \ldots + m_N(p_N\varphi_N + \psi_N)$, а также $m^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_N^2$. Аналогичные обозначения введем также для дифференцирования и интегрирования функций, зависящих от совокупностей a, $p\varphi + \psi$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a}, \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial(p_i\varphi_i + \psi_i)} \frac{\partial}{\partial(p\varphi + \psi)},$$

$$\int \ldots \int f(p_1\varphi_1 + \psi_1, \ldots, p_N\varphi_N + \psi_N)\, d(p_1\varphi_1 + \psi_1) \ldots d(p_N\varphi_N + \psi_N) =$$

$$= \int f(p\varphi + \psi)\, d(p\varphi + \psi).$$

Приближенные решения уравнений (2) будем искать в виде асимптотических рядов

$$x_h = a_h \cos(p_h\varphi_h + \psi_h) + \varepsilon u_h^{(1)}(\tau, \theta, a, p\varphi + \psi) + \varepsilon^2 u_h^{(2)}(\tau, a, \theta, p\varphi + \psi) + \ldots, \tag{3}$$

где $u_h^{(i)}(\tau, \theta, a, p\varphi + \psi)$, $h = 1, 2, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots$,— периодические по θ и по $p\varphi + \psi$ функции с периодом 2π, а величины a_h, ψ_h, как функции времени, определяются уравнениями

$$\begin{aligned} da_h/dt &= \varepsilon A_1^{(h)}(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 A_2^{(h)}(\tau, a, \psi) + \ldots, \\ d\psi_h/dt &= \omega_h(\tau) - \frac{p_h}{q_h}\nu(\tau) + \varepsilon B_1^{(h)}(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 B_2^{(h)}(\tau, a, \psi) + \ldots, \end{aligned} \tag{4}$$

$$h = 1, 2, \ldots N,$$

причем выбор чисел p_h и q_h зависит от выбора рассматриваемого резонанса.

Для определения функций u_i, A_i, B_i, $i = 1, 2, \ldots$, подставим (3) и (4) в (2), разложим обе части полученного равенства по степеням малого параметра ε и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_h^{(1)}}{\partial\theta^2}\nu^2(\tau) + 2\frac{\partial u_h^{(2)}}{\partial\theta\partial(p\varphi + \psi)}\nu(\tau)\omega(\tau) + \frac{\partial^2 u_h^{(1)}}{\partial(p\varphi + \psi)}\omega^2(\tau) + \\ &+ \omega_h(\tau) u_1^{(h)} = X_h^{(10)}(\tau, a, \theta, p\varphi + \psi) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} X_h^{(20)}(\tau, a, \theta, p\varphi + \psi)\dot{\eta}_h(t) + \\ &+ \left[a_h \frac{\partial B_1^{(h)}}{\partial\psi}\left[\omega(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau)\right] + 2\omega_h(\tau) A_1^{(h)} + a_h\frac{d\omega_h(\tau)}{d\tau}\right]\sin(p_h\varphi_h + \psi_h) - \\ &- \left[\frac{\partial A_1}{\partial\psi}\left[\omega(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau)\right] - 2a_h\omega_h(\tau) B_1^{(h)}\right]\cos(p_h\varphi_h + \psi_h) = \\ &= \overline{X}_h^{(1,0)}(\tau, a, \theta, p\varphi + \psi) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\overline{X}^{(2,0)}(\tau, a, \theta, p\varphi + \psi)\dot{\eta}_h(t), \end{aligned} \tag{5}$$

где $\overline{X}_h^{(l,0)}(\tau, a, \theta, p\varphi + \psi) = X_h^{(l)}(\tau, \theta, a\cos(p\varphi + \psi), -a\omega\sin(p\varphi + \psi), 0)$, $l = 1, 2$.

Для определения функций $u_h^{(1)}$, $A_1^{(h)}$, $B_1^{(h)}$ из (5) разложим в ряд Фурье функции

$$\overline{X}_h^{(l,0)}(\tau, \theta, a, p\varphi+\psi) = \sum_{n,m} \overline{X}_{hnm}^{(l,0)}(\tau, a)\, e^{i\{n\theta+m(p\varphi+\psi)\}},$$

$$u_h^{(1)}(\tau, \theta, a, p\varphi+\psi) = \sum_{n,m} K_{nm}^{(n1)}(\tau, a)\, e^{i\{n\theta+m(p\varphi+\psi)\}}, \quad l = 1, 2,$$

где суммирование происходит по всем значениям сложного индекса m, а $X_{hnm}^{(l,0)}(\tau, a)$ определяются по формулам

$$\overline{X}_{hnm}^{(l,0)}(\tau, a) = \frac{2}{(2\pi)^{N+1}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{X}_h^{(l,0)}(\tau, a, \theta, p\varphi+\psi)\, a^{-i\{n\theta+m(p\varphi+\psi)\}} d\theta d(p\varphi+\psi).$$

Подставляя эти значения $\overline{X}_h^{(l,0)}(\tau, \theta, a, p\varphi+\psi)$ и $u_h^{(1)}(\tau, \theta, a, p\varphi+\psi)$ в уравнения (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем для определения неизвестных $K_{nm}^{(h1)}(\tau, a)$ соотношения

$$\{\omega_h^2(\tau) - [n^2\nu^2(\tau) + 2n\nu(\tau)\, m\omega(\tau) + m^2\omega^2(\tau)]\}\, K_{nm}^{(h1)}(\tau, a) =$$

$$= \overline{X}_{hnm}^{(1,0)}(\tau, a) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \overline{X}_{hnm}^{(2,0)}(\tau, a)\, \dot{\eta}_h(t),$$

откуда находим

$$K_{nm}^{(h1)}(\tau, a) = \frac{\overline{X}_{hnm}^{(1,0)}(\tau, a) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} X_{hnm}^{(2,0)}(\tau, a)\, \dot{\eta}_h(t)}{\omega_h(\tau) - [n\nu(\tau) + m\omega(\tau)]^2}.$$

Следовательно, для $u_h^{(1)}(\tau, \theta, a, p\varphi+\psi)$ получаем выражение

$$u_h^{(1)}(\tau, \theta, a, p\varphi+\psi) =$$

$$= \frac{\overline{X}_{hnm}^{(1,0)}(\tau, a) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \overline{X}_{hnm}^{(2,0)}(\tau, a)\, \dot{\eta}_h(t)}{\omega_h^2(\tau) - [n\nu(\tau) + m\omega(\tau)]^2}\, e^{i\{n\theta+m(p\varphi+\varphi)}.$$

В правых частях полученных рядов не должно быть членов, знаменатели которых $\omega_h^2(\tau) - [n\nu(\tau) + m\omega(\tau)]$ могут обратиться в нуль, следовательно, при суммировании должны отсутствовать те члены, для которых n и m удовлетворяют условию $n + m(p/q) = \mp p_h/q_h$, а для этого необходимо, чтобы величины $A_1^{(h)}(\tau, a, \psi)$ и $B_1^{(h)}(\tau, a, \psi)$ удовлетворяли соотношениям

$$\sum_{n,m} X_{hnm}^{(l,0)}(\tau, \theta, a, p\varphi+\psi)\, e^{i\{n\theta+m(p\varphi+\psi)\}} = 0, \tag{6}$$

в которых сумма $\sum\limits_{n,m}$ распространена на те значения n, $m_1, m_2, \ldots, m_N$, для которых $n + m(p/q) = \mp p_h/q_h$.

Из условий (6) для определения $A_1^{(h)}(\tau, a, \psi)$ и $B_1^{(h)}(\tau, a, \psi)$ получаем $2N$ соотношений

$$\left(\omega(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau)\right)\frac{\partial A_1^{(h)}}{\partial\varphi} - 2a_h\omega_h(\tau)\, B_1^{(h)} =$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^{N+1}} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q\psi} \left[\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} X_h^{(1,0)}(\tau, a, \theta, p\varphi+\psi) \cos(p_h\varphi_h + \right.$$

$$+ \psi_h) e^{-i\sigma q\psi} d\theta d(p\varphi + \psi) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} X_h^{(2,0)}(\tau, a, \theta, p\varphi + \psi) \cos(p_h\varphi_h +$$

$$+ \psi_h) e^{-i\sigma q\psi} d\theta d(p\varphi + \psi) \dot{\eta}_h(t)\Big],$$

$$\left(\omega(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau)\right) a_h \frac{\partial B_1^{(h)}}{\partial\psi} + 2\omega_h(\tau) A_1^{(h)} = -a_h \frac{d\omega_h(\tau)}{d\tau} - \tag{7}$$

$$- \frac{2}{(2\pi)^{N+1}} \sum_\sigma e^{i\sigma q\psi} \Big[\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} X_h^{(1,0)}(\tau, a, \theta, p\varphi + \psi) \sin(p_h\varphi_h + \psi_h) e^{-i\sigma q\psi} d\theta d(p\varphi +$$

$$+ \psi) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} X_h^{(2,0)}(\tau, a, \theta, p\varphi + \psi) \sin(p_h\varphi_h +$$

$$+ \psi_h) e^{-i\sigma q\psi} d\theta d(p\varphi + \psi) \dot{\eta}_h(t)\Big],$$

где σ есть сложный индекс $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, а $u_h^{(1)}(\tau, \theta, a, p\varphi + \psi)$ определяются выражениями

$$u_h^{(1)}(\tau, \theta, a, p\varphi + \psi) = \sum_{n,m} \frac{\left[X_{hnm}^{(1,0)}(\tau, a) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} X_{hnm}^{(2,0)}(\tau, a) \dot{\eta}_h(t)\right]}{\omega_h^2(\tau) - [n\nu(\tau) + m\omega(\tau)]^2} e^{i\{n\theta + m(p\varphi+\psi)\}},$$

$$n + m(p/q) \neq \pm p_h/q_h.$$

Таким образом, в улучшенном первом приближении случайные возмущения приводят к появлению в решении (3) уравнения (2) слагаемого, являющегося векторным «белым шумом».

Из уравнений (7) находим

$$A_1^{(h)}(\tau, a, \psi) = -\frac{a_h}{2\omega_h(\tau)} \frac{d\omega_h(\tau)}{d\tau} + \frac{2}{(2\pi)^{N+1}} \sum_\sigma e^{i\sigma q\psi} [H_{1h} X_{h_1}^{(1,0)} -$$

$$- H_{2h} X_{h2}^{(1,0)}] + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}(2\pi)^{N+1}} \sum_\sigma e^{i\sigma q\psi} [H_{1h} X_{h1}^{(2,0)} - H_{2h} X_{h2}^{(2,0)}] \dot{\eta}_h(t),$$

$$B_1^{(h)}(\tau, a, \psi) = -\frac{2}{(2\pi)^{N+1}} \sum_\sigma e^{i\sigma q\psi} [H_{1h} X_{h2}^{(1,0)} + H_{2h} X_{h1}^{(1,0)}] - \tag{8}$$

$$- \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}(2\pi)^{N+1}} \sum_\sigma e^{i\sigma q\psi} [H_{1h} X_{h2}^{(2,0)} + H_{2h} X_{h1}^{(2,0)}] \dot{\eta}_h(t),$$

где

$$X_{h1}^{(l,0)} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} X_h^{(l,0)} \cos(p_h\varphi_h + \psi_h) e^{-i\sigma q\psi} d\theta d(p\varphi + \psi),$$

$$X_{h2}^{(l,0)} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} X_h^{(l,0)} \sin(p_h\varphi_h + \psi_h) e^{-i\sigma d\psi} d\theta d(p\varphi + \psi), \quad l = 1, 2,$$

$$H_{h1} = \frac{[q\omega(\tau) - p\nu(\tau)]\sigma i}{4\omega_h^2(\tau) - \sigma^2[\omega(\tau)q - p\nu(\tau)]^2}, \quad H_{h2} = \frac{2\omega_h(\tau)}{4\omega_h^2(\tau) - \sigma^2[\omega(\tau)q - p\nu(\tau)]^2}.$$

Рассматривая колебания в области, близкой к резонансу с k-й собственной частотой, полагая в этом случае $\omega_h(\tau) - \frac{p_h}{q_h}\nu(\tau) = \varepsilon\Delta(\tau)$ и подставляя (8) в правую часть системы (4), находим

$$\frac{da_h}{dt}=\varepsilon\left(-\frac{da_h}{2\omega_k(\tau)}\frac{d\omega_h(\tau)}{d\tau}+\frac{2}{(2\pi)^{N+1}}\sum_{\sigma}e^{i\sigma q\psi}\left[H_{1h}X_{h1}^{(1,0)}-H_{2h}X_{h2}^{(1,0)}\right]\right)+$$
$$+\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{(2\pi)^{N+1}}\sum_{\sigma}e^{i\sigma q\psi}\left[H_{1h}X_{h1}^{(2,0)}-H_{2h}X_{h2}^{(2,0)}\right]\dot{\eta}_h(t),$$
$$\frac{d\psi_h}{dt}=\varepsilon\left(\Delta(\tau)-\frac{2}{(2\pi)^{N+1}}\sum_{\sigma}e^{i\sigma q\psi}\left[H_{1h}X_{h2}^{(1,0)}+H_{2h}X_{h1}^{(1,0)}\right]\right)- \tag{9}$$
$$-\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{(2\pi)^{N+1}}\sum_{\sigma}e^{i\sigma\varphi}\left(H_{1h}X_{h2}^{(2,0)}+H_{2h}X_{h1}^{(2,0)}\right)\dot{\eta}_h(t).$$

Систему (9), следуя [4], назовем системой стохастических уравнений в стандартной форме.

Для исследования системы (9) применим аналитический метод Колмогорова — Фоккера — Планка для плотности совместного распределения амплитуды и фазы, которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial a}[K_aW]-\frac{\partial}{\partial\psi}[K_\psi W]+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}[D_aW]+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial^2}{\partial a\partial\psi}[D_{a\psi}W]+\frac{\partial^2}{\partial\psi_2}[D_\psi W]\right\}, \tag{10}$$

где W — плотность совместного распределения амплитуды a_h и фазы ψ_h, удовлетворяющая необходимым условиям [4—6].

Коэффициенты сноса K_a, K_ψ и диффузии D_a, $D_{a\psi}$, D_ψ амплитуды и фазы в (10) имеют вид

$$K_a=\varepsilon\left[-\frac{a_h}{2\omega_h(\tau)}\frac{d\omega_h(\tau)}{d\tau}+\frac{2}{(2\pi)^{N+1}}\sum_{\sigma}e^{i\sigma q\psi}\left[K_{1h}X_{h1}^{(1,0)}-K_{2h}X_{h2}^{(1,0)}\right]\right],$$
$$K_\psi=\varepsilon\left[-\frac{2}{(2\pi)^{N+1}}\sum_{\sigma}e^{i\sigma q\psi}\left(K_{1h}X_{h2}^{(1,0)}+K_{2h}X_{h1}^{(1,0)}\right)\right],$$
$$D_a=\varepsilon\left[\frac{2}{(2\pi)^{N+1}}\sum_{\sigma}e^{i\sigma q\psi}\left(K_{1h}X_{h1}^{(2,0)}-K_{2h}X_{h2}^{(2,0)}\right)\right]^2,$$
$$D_\psi=\varepsilon\left[\frac{2}{(2\pi)^{N+1}}\sum_{\sigma}e^{i\sigma q\psi}\left(K_{h1}X_{h2}^{(2,0)}+K_{2h}X_{h1}^{(2,0)}\right)\right]^2,$$
$$D_{a\psi}=\varepsilon\left[-\frac{4}{(2\pi)^{2N+2}}\sum_{\sigma}e^{2i\sigma q\psi}\left(K_{1h}X_{h1}^{(2,0)}-K_{2h}X_{h2}^{(2,0)}\right)\left(K_{h1}X_{h}^{(2,0)}+K_{2h}X_{h1}^{(2,0)}\right)\right].$$

Дифференциальное уравнение (10) является параболическим дифференциальным уравнением в стандартной форме, для которого Р. З. Хасьминский [8] установил принцип усреднения.

После усреднения уравнения (10) согласно теореме Хасьминского приходим к усредненному уравнению КФП для плотности вероятностей W:

$$\frac{\partial W_0}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial a}[\bar{K}_aW_0]-\frac{\partial}{\partial\psi}[\bar{K}_\psi W_0]+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}[\bar{D}_aW_0]+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial^2}{\partial a\partial\psi}[\bar{D}_{a\psi}W_0]+\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}[\bar{D}_\psi W_0]\right], \tag{11}$$

где

$$\overline{K}_a = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_a d\psi, \;\; \overline{K}_\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_\psi d\psi,$$

$$\overline{D}_a = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_a d\psi, \; \overline{D}_{a\psi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_{a\psi} d\psi, \;\; \overline{D}_\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_\psi d\psi.$$

Для решения уравнения (11) может быть использован численный анализ, так как аналитическое решение этих уравнений в общем случае затруднено.

Приведем еще один сравнительно простой метод построения первого приближения для общего решения системы (1), основанный на применении принципа усреднения. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\frac{dx_h}{dt} - \omega_h(\tau)\, y_h = \varepsilon Q_h^{(1)}(\tau, \theta, x, y, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\, Q_h^{(3)}(\tau, \theta, x, y, \varepsilon)\, \dot{\eta}_h(t), \\ &\frac{dy_h}{dt} + \omega_h(\tau)\, x_h = \varepsilon Q_h^{(2)}(\tau, \theta, x, y, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\, Q_h^{(4)}(\tau, \theta, x, y, \varepsilon)\, \dot{\eta}_h(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Введем в систему (12) новые переменные a_h, ψ_h согласно формулам $x_h = a_h \cos(\theta + \psi_h)$, $y_h = -\dfrac{a_h \nu(\tau)}{\omega_h(\tau)} \sin(\theta + \psi_h)$. Тогда после ряда выкладок вместо системы (12) получим следующую:

$$\frac{da_h}{dt} = \varepsilon\left(\frac{\omega_{h\tau}(\tau)}{\omega_h(\tau)} - \frac{\nu_\tau'(\tau)}{\nu(\tau)}\right) a_h \sin^2(\theta + \psi_h) +$$

$$+ \frac{\omega_h^2(\tau) - \nu^2(\tau)}{\nu(\tau)}\, a_h \cos(\theta + \psi_h) \sin(\theta + \psi_h) + \varepsilon H_{h0}^{(1)} + \sqrt{\varepsilon}\, H_{h0}^{(3)} \dot{\eta}_h(t), \tag{13}$$

$$\frac{d\psi_h}{dt} = \varepsilon\left(\frac{\omega_{h\tau}(\tau)}{\omega_h(\tau)} - \frac{\nu_\tau(\tau)}{\nu(\tau)}\right) \sin(\theta + \psi_h) + \frac{\omega_h^2(\tau) - \nu^2(\tau)}{\nu(\tau)} \cos^2(\theta + \psi_n) -$$

$$- \frac{\varepsilon}{a_h} K_{h0}^{(2)} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{a_h} K_{h0}^{(4)} \dot{\eta}_h(t),$$

где

$$H_{h_0}^{(l_1)} = Q_{h0}^{(l_1)}(\tau, a, \theta, \theta + \psi, \varepsilon) \cos(\theta + \psi_h) - Q_{h0}^{(l_1+1)}(\tau, a, \theta, \theta + \psi, \varepsilon) \times$$

$$\times \frac{\omega_h(\tau)}{\nu(\tau)} \sin(\theta + \psi_n), \;\; l_1 = 1, 3,$$

$$H_{h0}^{(l_2)} = Q_{h0}^{(l_2-1)}(\tau, a, \theta, \theta + \psi, \varepsilon) \sin(\theta + \psi_h) + Q_{h0}^{(l_2)}(\tau, a, \theta, \theta + \psi, \varepsilon) \times$$

$$\times \frac{\omega_h(\tau)}{\nu(\tau)} \cos(\theta + \psi_h), \;\; l_2 = 2,4,$$

$$Q_{h0}^{(i)}(\tau, a, \theta, \theta + \psi, \varepsilon) = Q_h^{(i)}\left(\tau, \theta, a, \cos(\theta + \psi), \ldots, -\frac{a_1 \nu(\tau)}{\omega_1(\tau)} \sin(\theta + \psi), \ldots\right.$$

$$\left. \ldots, \varepsilon\right), \; h = 1, 2, \ldots, N; \; i = 1, 2.$$

Рассматривая колебания в области, близкой к резонансу с k-й собственной частотой, и полагая в этом случае $\omega_k(\tau) - \nu(\tau) = \varepsilon\Delta(\tau)$, можно к k-й паре уравнений системы (13) применить принцип усреднения. В результате получим

$$\frac{da_k}{dt} = \varepsilon\left(\frac{\omega'_{k\tau}(\tau)}{\omega_k(\tau)} - \frac{\nu'_\tau(\tau)}{\nu(\tau)}\right)a_k + \frac{\varepsilon}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi} H_{h0}^{(1)} d(\theta+\psi) +$$

$$+ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{(2\pi)^N}\dot{\eta}_n(t)\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi} H_{h0}^{(3)}\, d(\theta+\psi),$$

$$\frac{d\psi_h}{dt} = \varepsilon\Delta(\tau) - \frac{\varepsilon}{(2\pi)^N a_k}\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi} H_{h0}^{(2)}\, d(\theta+\psi) - \tag{14}$$

$$- \frac{\sqrt{\varepsilon}}{(2\pi)^N a_k}\dot{\eta}_h(t)\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi} H_{h0}^{(4)} d(\theta+\psi).$$

Полученные уравнения представляют собой систему в стандартной форме.

В случае автономной гироскопической системы система (12) приводится к виду

$$dx_h/dt - \omega_h(\tau)\, y_h = \varepsilon Q_h^{(1)}(\tau, x, y, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\, Q_h^{(3)}(\tau, x, y, \varepsilon)\,\dot{\eta}_h(t),$$

$$dy_h/dt + \omega_h(\tau)\, x_h = \varepsilon Q_h^{(2)}(\tau, x, y, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\, Q_h^{(4)}(\tau, x, y, \varepsilon)\,\dot{\eta}_h(t). \tag{15}$$

При принятых выше предположениях в невозмущенной системе возможны незатухающие колебания $x_h = a_h \cos(\omega_h(\tau)\, t + \psi_h)$, $y_h = -a_h \sin(\omega_h(\tau)\, t + \psi_h)$.

Ввиду того, что система (15) близка ($\varepsilon \ll 1$) к линейной консервативной, будем искать решение ее в первом приближении в виде

$$x_h = a_h \cos(\xi_h + \psi_h), \quad y_h = -a_h \sin(\xi_h + \psi_h), \tag{16}$$

где a_h, ψ_h — медленно меняющиеся функции, $d\xi/dt = \omega_h(\tau)$.

Рассматривая формулы (16) как формулы преобразования системы уравнений (15) к новым независимым переменным ψ_h, получаем вместо системы (15) следующую систему уравнений в стандартной форме:

$$da_h/dt = \varepsilon T_{h0}^{(1)}(\tau, a, \xi, \psi, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\, T_{h0}^{(3)}(\tau, a, \xi, \psi, \varepsilon)\,\dot{\eta}_h(t),$$

$$d\psi_h/dt = -\frac{\varepsilon}{a_h} T_{h0}^{(2)}(\tau, a, \xi, \psi, \varepsilon) - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{a_h} T_{h0}^{(4)}(\tau, a, \xi, \psi, \varepsilon)\,\dot{\eta}_h(t), \tag{17}$$

где

$$T_{h0}^{(l_1)}(\tau, a, \xi, \psi, \varepsilon) = Q_{h0}^{(l_1)}(\tau, a, \xi, \psi, \varepsilon)\cos(\xi_h + \psi_n) -$$

$$- Q_{h0}^{(l_1+1)}(\tau, a, \xi, \psi, \varepsilon)\sin(\xi_h + \psi_h), \quad l_1 = 1, 3,$$

$$T_{h0}^{(l_2)}(\tau, a, \xi, \psi, \varepsilon) = Q_{h0}^{(l_2-1)}(\tau, a, \xi, \psi, \varepsilon)\sin(\xi_h + \psi_n) +$$

$$+ Q_{h0}^{(l_2)}(\tau, a, \xi, \psi, \varepsilon)\cos(\xi_h + \psi_h), \quad l_2 = 2,4,$$

$$Q_{h0}^{(i)}(\tau, a, \xi, \psi, \varepsilon) = Q_h^{(i)}(\tau, a, \cos(\xi_1 + \psi_1), \dots, -a_1 \sin(\xi_1 + \psi_1), \dots, \varepsilon),$$

$$h = 1, 2, \dots, N; \quad i = 1, 2.$$

Усредняя полученную систему уравнений (17) по угловым переменным $\xi_h + \psi_h$, получаем уравнения первого приближения для a_h, ψ_h:

$$\frac{da_h}{dt} = -\frac{\varepsilon}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi} T_{h0}^{(1)}(\tau, a, \xi, \psi, \varepsilon)\, d(\xi+\psi) -$$

$$-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{(2\pi)^N}\dot{\eta}_h(t)\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi} T_{h0}^{(3)}\,d(\xi+\psi),$$

$$\frac{d\psi_h}{dt} = -\frac{\varepsilon}{(2\pi)^N a_h}\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi} T_{h0}^{(2)}\,d(\xi+\psi) - \tag{18}$$

$$-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{(2\pi)^N a_h}\dot{\eta}(t)\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi} T_{h0}^{(4)} d(\xi+\psi), \quad h = 1, 2, \dots, N,$$

где $d(\xi+\psi) = d(\xi_1+\psi_1)\dots d(\xi_N+\psi_N)$.

Заметим, что правые части уравнения (14) и (18) пропорциональны малому параметру ε, так что a_h и ψ_h — медленно изменяющиеся функции времени. Полученные уравнения (14) и (18) представляют собой систему стохастических дифференциальных уравнений в стандартной форме, исследование которой можно провести с помощью уравнений КПФ аналогично изложенному выше.

Подобные результаты можно получить в случае нелинейных систем с медленно изменяющимися случайными параметрами.

Отметим, что найти аналитическое решение уравнений (11) в общем виде довольно трудно. Однако в большинстве случаев этот метод позволяет находить стационарные плотности вероятности, исходя лишь из общего вида соответствующих уравнений движения системы. Для колебательных систем очень важным является вопрос нахождения стационарной плотности распределения амплитуды, так как анализ ее позволяет судить не только о распределении амплитуд, но и об их устойчивости.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.— М. : Наука, 1964.— 432 с.
3. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения.— Киев : Наук. думка, 1968.— 554 с.
5. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах // Приближенные методы исследования нелинейных систем.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976.— С. 102—145.
6. *Коломиец В. Г.* Об усреднении в стохастических уравнениях Ито // Мат. физика. — 1987.— **41**, № 7.— С. 1—5.
7. *Митропольский Ю. А., Носиров Ф. У.* Асимптотические методы нелинейной механики в теории гироскопических систем.— Киев, 1987.— 56 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.58).
8. *Хасьминский Р. З.* О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией // Теория вероятностей и ее применения.— 1963.— 8, № 1.— С. 3—25.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 31.12.87