УДК 517.53

В. И. Белый, И. В. Стрелковская

Приближение функций аналитическими комплексными сплайнами в областях с квазиконформной границей

Пусть G — конечная область с квазиконформной границей $\Gamma = \partial G$, $o \in G$, $A(\overline{G})$ — класс функций, аналитических в G и непрерывных на замыкании $\overline{G}$. Рассматриваются аналитические в области G сплайны, построенные на основе интегрального представления функций класса $A(\overline{G})$, полученного в работе [1], и плоских комплексных сплайнов, введенных в [2]. Аналитические сплайны такого типа, ассоциированные с линейными элементами на триангуляционной сетке, анонсированы в [3]. В отличие от интерполяционных аналитических сплайнов, строящихся с помощью контурных интегралов (см. [4]), аппроксимативные свойства которых изучались во многих работах (см., например, [5—7]), для исследуемых нами сплайнов гладкость и даже спрямляемость границы области G не являются необходимыми.

Приведем основные определения и процедуру построения аналитических сплайнов. Пусть $\overline{G} \subset Q$, где $Q = [a, a + H] \times [b, b + H]$ — квадрат со стороной $H > 0$; N — натуральное число, $h_N = H/N$; $x_k = a + kh_N$; $y_j = b + jh_N$, $k, j = 0, 1, \ldots, N$. Тогда $Q = \bigcup\limits_{k,j=0}^{N-1} Q_{k,j}$, где $Q_{k,j} = \{z = x + iy : x \in [x_k, x_{k+1}],\ y \in [y_j, y_{j+1}]\}$ — квадратные ячейки разбиения Q с шагом $h_N = H/N$. Такое разбиение обозначим через Δ_N, причем будем опускать индекс N в h_N и Δ_N, если рассматривается фиксированное разбиение. Положим $G_N = \bigcup Q_{k,j}$ по всем k, j, для которых $Q_{k,j} \cap G \neq \varnothing$. В дальнейшем при сравнении величин $a > 0$ и $b > 0$ будем употреблять символ «$\asymp$» ($a \asymp b$, если существуют константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, для которых $C_1 b \leqslant a \leqslant C_2 b$) и «$\lesssim$» ($a \lesssim b$, если $a \leqslant Cb$; $C = \mathrm{const}$).

Пусть $y(z)$ — квазиконформное отражение комплексной плоскости $\mathbb{C}$ относительно Γ [8]; $y(z)$ можно выбрать каноническим в том смысле, что обеспечивается выполнение следующих свойств (см. [9, 10]): 1) $y(z)$—антиквазиконформное отображение, $y(\Gamma) = \Gamma$; $y(0) = \infty$, $y[y(z)] = z$; 2) при достаточно малом фиксированном $\delta > 0$ в области $\mathbb{C}_\delta = \mathbb{C} \setminus \{U_\delta \cup U'_\delta\}$, где $U_\delta = \{z : |z| < \delta\}$; $U'_\delta = y(U_\delta)$, отражение $y = y(z)$ изменяет евклидовы длины в конечное число раз, причем $|y_z| \lesssim 1$, $|y_{\bar z}| \lesssim 1$ почти при всех $z \in \mathbb{C}_\delta$; $|y_z| \lesssim |y(z)|^2$, $|y_{\bar z}| \lesssim |y(z)|^2$ при $z \in U_\delta$; $|y_z| \lesssim |z|^{-2}$; $|y_{\bar z}| \lesssim |z|^{-2}$ при $z \in U'_\delta$.

Всякую функцию $f \in A(\overline{G})$ можно непрерывно продолжить в $\mathbb{C}$, полагая $f(z) = f[y(z)]$ при $z \in C\overline{G}$. Нетрудно видеть, что модуль непрерывности $\omega(f; t)$ функции f в $\overline{G}$ после продолжения в Q может увеличиться не более, чем в конечное число раз.

Как показано в [1], для $f(z) \in A(\overline{G})$ справедливо интегральное представление

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{CG} \frac{f[y(\zeta)]}{(\zeta - z)^2}\, y_{\bar\zeta} d\sigma_\zeta = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{G} \frac{f(\zeta)}{(y(\zeta) - z)^2}\, y_{\bar\zeta} d\sigma_\zeta, \tag{1}$$

где $z \in G$; $\zeta = x + iy$; $d\sigma_\zeta = dxdy$, $CG = \mathbb{C} \setminus G$.

Следуя Опферу и Пури [2], построим по сетчатой области G_N плоский комплексный сплайн $s_\Delta(z)$, интерполирующий функцию $f(z)$ (или ее продолжение) в вершинах квадратов $Q_{k,j}$, вошедших в G_N, полагая

$$s_\Delta(z) = a + bz + c\bar z + d(z^2 - \bar z^2) \text{ при } z \in Q_{k,j} \subset G_N, \tag{2}$$

где коэффициенты a, b, c, d определяются из условия интерполирования $f(z)$ в точках $z_{k,j} = x_k + iy_j$. Функция $s_\Delta(z)$ непрерывна в G_N [2].

Определение 1. *Аналитическим плоским сплайном в области G с квазиконформной границей назовем функцию*

$$S_\Delta(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{CG}\frac{s_\Delta[y(\zeta)]}{(\zeta-z)^2}\,y_{\bar\zeta}d\sigma_\zeta = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G}\frac{s_\Delta(\zeta)}{(y(\zeta)-z)^2}\,y_{\bar\zeta}d\sigma_\zeta, \tag{3}$$

где $s_\Delta(z)$ *— плоский комплексный сплайн.*

Если $s_\Delta(z)$ интерполирует функцию $f(z)$ в узлах $z_{k,j}$, то будем использовать обозначение $S_\Delta(f;z)$ для аналитического сплайна (3). Аналитичность функции $S_\Delta(z)$ в G очевидна, возможность ее непрерывного продолжения на Γ следует из более общего результата, доказанного в [10].

Теорема 1. *Пусть G — конечная область с квазиконформной границей Γ, $0\in G$, $f(z)\in A(G)$. Тогда для аналитического сплайна $S_{\Delta_N}(f;z)$ справедлива оценка*

$$|f(z)-S_{\Delta_N}(f;z)|\leqslant M\omega(f;h_N)\left|\ln\frac{1}{h_N}\right|, \tag{4}$$

где константа M не зависит от N. Если Γ — квазигладкая кривая, то справедлива оценка*

$$|f(z)-S_{\Delta_N}(f;z)|\leqslant M\omega(f;h_N). \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть функция $\varphi(z)$ непрерывна в клеточной области G_N, а $s_\Delta(z)$ — плоский комплексный сплайн (2), интерполирующий $\varphi(z)$ в узлах $\{z_{k,j}\}$. Тогда $|\varphi(z)-s_\Delta(z)|\leqslant 4\omega(\varphi;h)$, где $h=h_N$ и $\omega(\varphi;t)$ — модуль непрерывности функции φ в G_N.*

Лемма 2. *Если плоский комплексный сплайн $s_\Delta(z)$ интерполирует непрерывную функцию $\varphi(z)$ в узлах области $\overline{G}_N$, то для любых точек $z\in\overline{G}_N$ и $\zeta\in\overline{G}_N$ выполняется соотношение*

$$|s_\Delta(z)-s_\Delta(\zeta)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{24\omega(\varphi;h)}{h}|z-\zeta| & \text{при}\quad |z-\zeta|\leqslant h;\\[2ex] 9\omega(\varphi;|z-\zeta|)\leqslant\dfrac{18\omega(\varphi;h)}{h}|z-\zeta| & \text{при}\quad |z-\zeta|>h,\end{cases}$$

где $\omega(\varphi;t)$ — модуль непрерывности функции φ в $\overline{G}_N$.

Доказательство лемм 1 и 2 фактически содержится в [11, с. 54—56], где рассмотрен случай вещественных функций. Достаточно применить оценки из [11] отдельно к вещественной и мнимой частям функций $\varphi(z)$ и $s_\Delta(z)$ и провести выкладки технического характера.

Лемма 3. *Пусть $s_\Delta(z)$ — плоский комплексный сплайн, интерполирующий функцию $f(z)\in A(\overline{G})$ в узлах области G_N, а $Q_{k,j}$ — один из квадратов, составляющих G_N, причем $Q_{k,j}\subset G$. Тогда при $z\in Q_{k,j}$ справедливы неравенства*

$$|f(z)-s_\Delta(z)|\leqslant 4h\,\|f'(z)\|_{C(Q_{k,j})}, \tag{6}$$

$$|f(z)-s_\Delta(z)|\leqslant 2h^2\,\|f''(z)\|_{C(Q_{k,j})}, \tag{7}$$

где $\|\cdot\|_{C(Q_{k,j})}=\max\limits_{z\in Q_{k,j}}|\cdot|$.

Доказательство. При $z\in Q_{k,j}$ разность $f(z)-s_\Delta(z)$ является суммой аналитической и антианалитической функций и потому $\max|f(z)-s_\Delta(z)|$ достигается на границе $\partial Q_{k,j}$, где и достаточно проверить выполнение неравенств (6) и (7). Пусть $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Предположим, что z принадлежит стороне $\overline{z_{k,j}z_{k+1,j}}$ квадрата $Q_{k,j}$ (на остальных сторонах оценки полностью аналогичны). Представляя $\operatorname{Re}s_\Delta(z)$ в виде $\operatorname{Re}s_\Delta(z)=A+t(B-A)$ (см. [11]), имеем

$$\operatorname{Re}s_\Delta(x+iy_j)=u(x_k,y_j)+\frac{x-x_k}{h}[u(x_{k+1},y_i)-u(x_k,y_j)].$$

* Кривая Γ называется квазигладкой (в смысле М. А. Лаврентьева), если при $z_1,z_2\in\Gamma$ длина меньшей дуги $s(z_1\cup z_2)$ с концами z_1 и z_2 $|z_1-z_2|$. Такая кривая квазиконформна.

Пользуясь формулой Лагранжа, получаем

$$|u(x, y_j) - \operatorname{Re} s_\Delta(x + iy_j)| \leqslant 2|x - x_k| \max_{z \in Q_{k,j}} |u'_x(x, y)|. \tag{8}$$

Аналогично оценивается $|v(x, y_j) - \operatorname{Im} s_\Delta(x + iy_j)|$. Отсюда, используя очевидные неравенства, находим $|f(z) - s_\Delta(z)| \leqslant 4h \| f'(z) \|_{C(Q_{k,j})}$. По теореме Ролля существует точка $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$, для которой $[u(x, y_j) - \operatorname{Re} s_\Delta(x + iy_j)]'_x = 0$. Тогда при $z \in \overline{z_{k,j} z_{k+1,j}}$

$$|u(x, y_j) - \operatorname{Re} s_\Delta(x + iy_j)| = \left| \int_{x_k}^{x} ds \int_{\xi_k}^{s} \frac{d^2}{dt^2} [u(t, y_j) - \operatorname{Re} s_\Delta(t + iy_j)]\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_{x_k}^{x} ds \int_{\xi_k}^{s} u''_{t^2}(t, y_j)\, dt \right| \leqslant h^2 \| f''(z)_{C(Q_{k,j})} \tag{9}$$

и аналогичное неравенство выполняется для $v(x, y_j)$, откуда следует (7). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $f(z) \in A(\overline{G})$, где G — конечная область с квазиконформной границей Γ. Тогда при $\rho(z, \Gamma) = \min_{\zeta \in \Gamma} |z - \zeta|$.*

$$|f''(z)| \leqslant \frac{\omega[\rho(z, \Gamma)]}{[\rho(z, \Gamma)]^2}, \quad z \in G, \tag{10}$$

где $\omega(t) = \omega(f; t)$ — модуль непрерывности функции f на $\overline{G}$.

Доказательство. Из интегрального представления (1) находим при $z \in G$

$$f''(z) = -\frac{6}{\pi} \iint_{CG} \frac{f[y(\zeta)]}{(\zeta - z)^4} y_{\bar\zeta} d\sigma_\zeta = -\frac{6}{\pi} \iint_{CG} \frac{f[y(\zeta)] - f[y(z)]}{(\zeta - z)^4} y_{\bar\zeta} d\sigma_\zeta.$$

Выбирая $\delta > 0$ так, чтобы обеспечить выполнение свойств 1, 2 отражения $y(z)$, заключаем, что при $z \in U_\delta$ $|f''(z)| \leqslant 1$ и неравенство (10) тривиально, а при $z, \zeta \in \mathbb{C}_\delta$: $|y(\zeta) - y(z)| \asymp |\zeta - z|$ и $|y_{\bar\zeta}| \leqslant 1$, поэтому

$$|f''(z)| \leqslant \iint_{CG \setminus U'_\delta} \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|^4} d\sigma_\zeta + \iint_{U'_\delta} \frac{d\sigma_\xi}{|\zeta - z|^4 |\zeta|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega[\rho(z, \Gamma)]}{\rho(z, \Gamma)} \iint_{CG \setminus U'_\delta} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|^3} + 1 \leqslant \frac{\omega[\rho(z, \Gamma)]}{[\rho(z, \Gamma)]^2},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если $Q_{k,j} \subset G_N$ — такой квадрат, что $\rho(Q_{k,j}, \Gamma) \geqslant h$, то для всякой точки $z \in Q_{k,j}$ справедлива оценка*

$$|f(z) - s_\Delta(z)| \leqslant \frac{h^2 \omega[f; \rho(z, \Gamma)]}{[\rho(z, \Gamma)]^2} \leqslant \frac{2h\omega(f; h)}{\rho(z, \Gamma)}. \tag{11}$$

Доказательство теоремы 1. Сначала оценим величину $|f(z) - S_\Delta(f; z)|$ в точках $z \in G$, расположенных вблизи Γ. Пусть $z \in G$ — такая точка, что $\rho(z, \Gamma) < h/2$; $z_0 \in \Gamma$, $|z - z_0| = \rho(z, \Gamma)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $h = h_N < 1$. Положим $d = \operatorname{diam} \overline{G}$, $\Omega_h = \{\zeta \in CG: |\zeta - z_0| \leqslant mh\}$, где $m > 0$ — константа, не зависящая от z_0 и h, выбор которой осуществим следующим образом. Рассмотрим окружность $C_h = \{\zeta : |\zeta - z_0| = mh\}$ и зафиксируем m таким, чтобы при всех z_0 и всех $\zeta \in C_h \cap CG$ выполнялось условие $|y(\zeta) - z_0| \geqslant 3h$. Поскольку в силу свойств отражения $y(z)$ $|y(\zeta) - z_0| \asymp |\zeta - z_0|$, то такое m существует. Зафиксируем также достаточно малую окрестность $U_\delta = \{z : |z| < \delta\}$ так, чтобы для $U'_\delta = y(U_\delta)$ выполнялись свойства 1 и 2 отражения $y(z)$ и

$$\rho(\Gamma, U'_\delta) = \inf_{z\in\Gamma,\ z'\in U'_\delta} |z - z'| > 3d. \tag{12}$$

Выделим из CG множества $\Omega_1 = CG \setminus \Omega_h$ и $\Omega_2 = \Omega_1 \setminus U'_\delta$. В силу (1) и (3) имеем

$$f(z) - S_\Delta(f; z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{CG} \frac{f[y(\zeta)] - s_\Delta[y(\zeta)]}{(\zeta - z)^2} y_{\bar\zeta} d\sigma_\zeta =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_h} - \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_2} - \frac{1}{\pi}\iint_{U'_\delta} =: \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3. \tag{13}$$

Обозначим $R = \max_{z\in\Gamma,\ z'\in U'_\delta} |z - z'|$; $r = \rho(\Gamma, U'_\delta)$. Применяя лемму 1, получаем

$$|\mathcal{J}_2| \leqslant \omega(f; h) \iint_{\Omega_2} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|^2} \leqslant \omega(f; h) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{(m-1/2)h}^{R} \frac{dt}{t} =$$

$$= 2\pi \ln \frac{2R}{(2m-1)h}\, \omega(f; h) \leqslant \omega(f; h) \ln \frac{1}{h}, \tag{14}$$

где $\omega(f; t)$ — модуль непрерывности функции f в $\overline{G}$;

$$|\mathcal{J}_3| \leqslant \omega(f; h) \iint_{U'_\delta} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta|^2 |\zeta - z|^2} \leqslant \omega(f; h). \tag{15}$$

Интеграл $\mathcal{J}_1$ запишем в виде

$$\mathcal{J}_1 = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_h} \frac{f[y(\zeta)] - f(z_0)}{(\zeta - z)^2} y_{\bar\zeta} d\sigma_\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_h} \frac{s_\Delta(z_0) - s_\Delta[y(\zeta)]}{(\zeta - z)^2} y_{\bar\zeta} d\sigma_\zeta +$$

$$+ [f(z_0) - s_\Delta(z_0)] \iint_{\Omega_h} \frac{y_{\bar\zeta} d\sigma_\zeta}{(\zeta - z)^2} =: \mathcal{J}_4 + \mathcal{J}_5 + \mathcal{J}_6. \tag{16}$$

Первый интеграл в (16) удовлетворяет соотношению

$$|J_4| \leqslant \omega(f; h), \tag{17}$$

доказательство которого имеется в [1, с. 357-358] (соотношение (7.38)). Для оценки интеграла J_5 воспользуемся леммой 2 и соотношением

$$|y(\zeta) - z_0| \asymp |\zeta - z_0|, \tag{18}$$

вытекающим из свойств 1, 2 отражения $y(z)$. Имеем

$$|\mathcal{J}_5| \leqslant \frac{\omega(f; h)}{h} \iint_{\Omega_h} \frac{|z_0 - y(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} d\sigma_\zeta \leqslant \frac{\omega(f; h)}{h} \iint_{\Omega_h} \frac{|z_0 - \zeta|}{|\zeta - z|^2} d\sigma_\zeta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\omega(f; h)}{h} \iint_{\Omega_h} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|} \leqslant 4\pi\left(m + \frac{1}{2}\right)\omega(f; h). \tag{19}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \begin{cases} z - z_0 & \text{при } z \in \overline{G}; \\ y(z) - z_0 & \text{при } z \in C\overline{G}. \end{cases}$$

К ней применима формула Бореля — Помпею, поэтому в рассматриваемой точке z будем иметь

$$\varphi(z) = z - z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_h}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega_h}\frac{\varphi_{\bar\zeta}}{\zeta - z}\,d\sigma_\zeta,$$

откуда после дифференцирования и несложных преобразований с учетом (18) имеем

$$\left|\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega_h}\frac{y_{\bar\zeta}}{(\zeta - z)^2}\,d\sigma_\zeta\right| \leqslant 1 + \frac{m^2h^2}{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 h^2} \leqslant 1. \tag{20}$$

Из (20) и леммы 1 находим

$$|\mathcal{J}_6| \leqslant \omega(f;\,h). \tag{21}$$

Из (13) — (17), (19) и (21) следует неравенство

$$|f(z) - S_\Delta(f;\,z)| \leqslant \omega(f;\,h)\ln\frac{1}{h}, \tag{22}$$

в котором константа в соотношении $\leqslant$ не зависит от z и h. Устремляя z к границе Γ, убеждаемся в справедливости (22) при всех $z \in \Gamma$, а значит, по принципу максимума, при всех $z \in \bar G$. Первая часть теоремы доказана.

В проведенном доказательстве оценка (14) была единственной содержащей $\ln\frac{1}{h}$. Покажем теперь, что если Γ — квазигладкая кривая, то оценка для $|\mathcal{J}_2| \leqslant \omega(h)$. Пусть $Q_1 = \{\zeta : \zeta \in G \setminus U_\delta;\ |\zeta - z_0| \geqslant 3h\}$. Тогда в силу выбора $m > 0$ $y(\Omega_2) \subset Q_1$. Обозначим: $Q_2 = \{\zeta \in Q_1 : \rho(\zeta, \Gamma) \geqslant (3h|z_0 - \zeta|)^{1/2}\}$; $Q_3 = Q_1 \setminus Q_2$; $Q_3^{(j)} = \{\zeta \in Q_3 : 3\cdot 2^j h \leqslant |\zeta - z_0| \leqslant 3\cdot 2^{j+1}h\}$, $j = 0, 1, \ldots, K$, где $Q_3^{(K)} \neq \varnothing$, а при всех $j > K$ $Q_3^{(j)} = \varnothing$. Пользуясь следствием 1 леммы 4 и очевидным при $\zeta \in Q_1$ соотношением $|y(\zeta) - z| \asymp |\zeta - z_0|$, получаем

$$|\mathcal{J}_2| = \left|-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{y(\Omega_2)}\frac{f(\zeta) - s_\Delta(\zeta)}{(y(\zeta) - z)^2}\,y_{\bar\zeta}\,d\sigma_\zeta\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\iint\limits_{Q_2}\frac{|f(\zeta) - s_\Delta(\zeta)|}{|y(\zeta) - z|^2}\,|y_{\bar\zeta}|\,d\sigma_\zeta +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\iint\limits_{Q_3}\frac{|f(\zeta) - s_\Delta(\zeta)|}{|y(\zeta) - z|^2}\,|y_{\bar\zeta}|\,d\sigma_\zeta =: |\mathcal{J}_7| + |\mathcal{J}_8|, \tag{23}$$

$$|\mathcal{J}_7| \leqslant h^2\iint\limits_{Q_2}\frac{\omega[\rho(\zeta, \Gamma)]}{[\rho(\zeta, \Gamma)]^2\,|y(\zeta) - z|^2}\,d\sigma_\zeta \leqslant h\omega(h)\iint\limits_{Q_2}\frac{d\sigma_\zeta}{\rho(\zeta, \Gamma)\,|\zeta - z_0|^2} \leqslant$$

$$\leqslant h^{1/2}\omega(h)\iint\limits_{Q_2}\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z_0|^{5/2}} \leqslant \omega(h). \tag{24}$$

Интеграл $|\mathcal{J}_8|$ оценим с помощью леммы 1:

$$|\mathcal{J}_8| \leqslant \frac{4\omega(h)}{\pi}\iint\limits_{Q_3}\frac{d\sigma_\zeta}{|y(\zeta) - z|^2} \leqslant \omega(h)\iint\limits_{Q_3}\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z_0|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \omega(h)\sum_{j=0}^{K}\iint\limits_{Q_3^{(j)}}\frac{d\sigma\zeta}{|\zeta - z_0|^2} \leqslant \frac{\omega(h)}{9}\sum_{j=0}^{K}\frac{\operatorname{mes} Q_3^{(j)}}{2^{2j}h^2}. \tag{25}$$

Известно [12, с. 118], что ε-окрестность $U(\gamma, \varepsilon)$ спрямляемой дуги γ имеет площадь $\operatorname{mes} U(\gamma, \varepsilon) \leqslant \pi\varepsilon$ дл. γ. Поэтому, если при движении вдоль Γz_j — первая точка входа в множество $Q_3^{(j)}$, а z_j' — последняя точка выхода из $Q_3^{(j)}$, то дуга $\gamma_j = \widetilde{z_j z_j'}$ в силу квазигладкости Γ будет иметь длину дл. $\gamma_j \leqslant 2^j h$ и тогда $\operatorname{mes} U(\gamma_j; \sqrt{3}\cdot 2^{\frac{j+2}{2}} h) \leqslant 2^{3j/2} h^2$. Следовательно, $\operatorname{mes} Q_3^{(j)} \leqslant 2^{\frac{3j}{2}} h^2$. Подставляя эту оценку в (25), окончательно находим

$$|\mathcal{I}_8| \leqslant \omega(h) \sum_{j=0}^{K} \frac{1}{2^{j/2}} \leqslant \omega(h) \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j/2} \leqslant \omega(h). \tag{26}$$

Из (23), (24) и (26) следует $|I_2| \leqslant \omega(h)$, что и доказывает вторую часть теоремы 1.

Замечание. Вопрос о возможности усилить оценку (4), опустив логарифм, для произвольной квазиконформной области или хотя бы для случая, когда $\partial G = \Gamma$ — спрямляемая квазиконформная кривая, остается открытым.

Несомненным достоинством аналитических плоских сплайнов $S_\Delta(z)$ по сравнению с комплексными плоскими сплайнами $s_\Delta(z)$ с точки зрения аппроксимативных свойств является возможность равномерной аппроксимации внутри G всех производных аналитической функции производными от $S_\Delta(z)$. Точнее, справедлива следующая теорема, очевидным образом вытекающая из леммы 1.

Теорема 2. *Пусть $f(z) \in A(\overline{G})$, где G — конечная область с квазиконформной границей. Тогда для точек любого компакта $F \subset G$ при всех $j = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы неравенства*

$$|f^{(j)}(z) - S_{\Delta_N}^{(j)}(f; z)| \leqslant M_j \omega(h_N),$$

где константы M_j не зависят от h_N.

Сравнивая теорему 1 с аналогичными результатами для аналитических сплайнов, определяемых контурными интегралами, в частности с оценками Вронича [5—7], убеждаемся, что она справедлива в случаях, когда контурные аналитические сплайны не могут быть определены из-за неспрямляемости границы, а для квазигладких границ оценка (5) сильнее аналогичной оценки в [6].

1. *Белый В. И.* Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей // Мат. сб.— 1977.— **102**, № 3.— С. 331—361.
2. *Opfer G., Puri M.* Complex planar splines // J. Approxim. Theory.— 1981.— **31**, № 4.— P. 383—402.
3. *Belyi V. I.* On analytic splines in regions with a quasiconformal boundary // Int. Conf. constructive theory of functions : Abstreds (Golden Sands (Varna), May 27 — June 2, 1984.— Sofia : Bulg. Acad. of Sci., 1984.— P. 6.
4. *Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.* Complex cubic splines // Trans. Amer. Math. Soc.— 1967.— **129**.— P. 391—413.
5. *Wronicz Z.* Approximation by complex splines // Zes. nauk. UJ. Pr. mat.— 1979.— **20**.— P. 67—88.
6. *Wronicz Z.* Interpolation by complex cubic splines // Constructive theory of functions: Proc. Int. Conf. (Blagoevgrad, May 30 — June 6, 1977).— Sofia : Bulg. Acad. of Sci., 1980.— P. 549—558.
7. *Wronicz Z.* On approximation by complex splines // Constructive theory of functions' 81: Proc. Int. Conf. (Varna, Jyne 1—5, 1981).— Sofia : Bulg. Acad. of Sci., 1983.— P. 577—583.
8. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям.— М. : Мир, 1969.— 133 с.
9. *Белый В. И., Гридасова И. В.* Исследование граничных свойств одного интегрального преобразования // Теория отображений и приближение функций.— Киев: Наук. думка, 1983.— С. 20—29.
10. *Белый В. И., Гридасова И. В.* Некоторые сингулярные интегралы с квазиконформной границей // Мат. заметки.— 1985.— **37**, № 4.— С. 497—506.
11. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций.— М. : Наука, 1980.— 352 с.
12. *Дынькин Е. М.* Гладкость интегралов типа Коши // Исследования по линейным операторам и теория функций. Зап. науч. семинаров ЛОМИ.— 1979.— **92**, вып. 9.— С. 115—133.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 29.10.86