УДК 517.946

В. Г. Коломиец, А. В. Рыбачок

Интегрирование уравнения Колмогорова—Фоккера—Планка обобщенным разделением аргументов

1. Исследование многих стохастических систем асимптотическими методами Крылова—Боголюбова—Митропольского в классе диффузионных процессов Маркова приводит к интегрированию уравнения КФП [1]. Весьма перспективным способом решения этой задачи является применение схемы обобщенного разделения аргументов (ОРА) В. Я. Скоробогатько и П. И. Каленюка [2, 3]. В данной работе предлагаются новые модификации этой схемы. Отметим, что принципиальная эффективность применения алгоритма ОРА к интегрированию уравнения КФП видна из результатов многих известных авторам исследований конкретных стохастических систем: решения стационарных уравнений КФП, разделяемость которых типична, после соответствующих преобразований имеют разделенный вид [1, 4, 5].

2. Используя работу [3], введем понятие разделяющегося оператора и разделленного решения, а также кратко изложим новые модификации ОРА. Ради простоты ограничимся скалярным случаем двух аргументов.

Определение. *Оператор R будем называть разделяющимся на функциях вида*

$$u(x, y) = \omega(x, X_1, X_2, \dots, X_p, y, Y_1, Y_2, \dots, Y_q), \tag{1}$$

а эти функции — разделенными, если

$$R(\omega) = \sum_{k=1}^{n} P_k(x, X_1, X_2, \dots, X_p) Q_k(y, Y_1, Y_2, \dots, Y_q), \tag{2}$$

где ω — некоторая фиксированная функция, P_k, Q_k, $k = \overline{1, n}$, некоторые интегро-дифференциальные операторы, $X_i = X_i(x)$, $x \in X$, $i = \overline{1, p}$, $Y_j = Y_j(y)$, $y \in Y$, $j = \overline{1, q}$, $p \in N$, $q \in N$.

Итак, задача нахождения разделенных решений вида (1) интегро-дифференциального уравнения

$$R(u) = 0 \tag{3}$$

с разделяющимся оператором R приводит к билинейному соотношению вида (2) порядка n:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(y) \equiv 0, \quad x \in X, \quad y \in Y. \tag{4}$$

Расщепление этого билинейного дифференциального тождества на конечную совокупность систем линейных соотношений позволит резделить аргументы исходного уравнения — свести задачу поиска решения уравнения (3) вида (1) к равносильной задаче интегрирования некоторой конечной совокупности систем обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений. Матричный алгоритм такого расщепления изложен в монографии [2].

Элементарные удобные схемы ОРА могут быть построены путем последовательного понижения порядка билинейного соотношения (4). Основаны они на следующих двух утверждениях.

Лемма 1. *Билинейное тождество* (4) *выполняется только в двух случаях:* $f_1(x) \equiv 0,\ x \in X$, *или* $g_1(y) = \sum_{k=2}^{n} c_k g_k(y),\ n \geqslant 2,\ y \in Y$.

Доказательство. Пусть $f_1(x_0) \neq 0$. Тогда, разделив соотношение (4) на $f_1(x_0)$, увидим, что функция $g_1(y)$ является линейной комбинацией $g_k(y)$, $k = \overline{2, n}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если выполнено тождество*

$$\varphi(x) + \psi(y) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)\psi_k(y) \equiv 0, \quad x \in X, \quad y \in Y, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $\varphi_k(x)$, $\psi_k(y)$, $k = \overline{1, m}$,— *произвольные заданные функции, то для произвольных фиксированных* $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$

$$\sum_{k=1}^{m} [\varphi_k(x) - \varphi_k(x_0)]\,[\psi_k(y) - \psi_k(y_0)] \equiv 0, \quad x \in X, \quad y \in Y. \tag{6}$$

Доказательство. Достаточно вычесть из тождества (5) это же тождество при фиксированном x_0, а затем из полученного соотношения то же соотношение при фиксированном y_0. Лемма 2 доказана.

Следует отметить, что в случае дифференцируемости функций $\varphi_k(x)$, $\psi_k(y)$, $k = \overline{1, m}$, $x \in X, y \in Y$, из тождества (5) следует

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k'(x)\psi_k'(y) \equiv 0, \quad x \in X, \quad y \in Y, \tag{7}$$

в чем легко убедиться взятием смешанной производной от обеих частей соотношения (5). Кроме того, соотношения, аналогичные (5)—(7), можно получить путем соответствующих преобразований только по одному из аргументов x, y.

В результате многократного применения доказанных выше лемм получаем довольно элементарные схемы ОРА. Для наглядности ограничимся случаем $n = 3$. В общем случае соотношение (4) допускает понижение порядка после применения леммы $2\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ раз.

Теорема. *Если* $f_2(x)\,g_1(y) \neq 0$, $x \in X$, $y \in Y$, *то билинейное тождество*

$$f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y) + f_3(x)g_3(y) \equiv 0 \tag{8}$$

равносильно совокупности двух систем линейных соотношений

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & -1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \equiv 0 \vee \begin{bmatrix} 1 & \beta & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & -1 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \equiv 0 \qquad (9)$$

при некоторых постоянных α *и* β.

Доказательство. Разделив соотношение (8) на $f_2(x)\, g_1(y)$ и затем применяя лемму 2, получаем

$$f_1(x)\, g_1(y) + f_2(x)\, g_2(y) + f_3(x)\, g_3(y) \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)} + \frac{g_2(y)}{g_1(y)} +$$

$$+ \frac{f_3(x)}{f_2(x)} \frac{g_3(y)}{g_1(y)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \equiv -\beta, \\ \dfrac{f_3(x)}{f_2(x)} = -\alpha, \\ \dfrac{g_2(y)}{g_1(y)} - \beta - \alpha \dfrac{g_3(y)}{g_1(y)} \equiv 0 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} \dfrac{g_2(y)}{g_1(y)} \equiv \alpha, \\ \dfrac{g_3(y)}{g_1(y)} \equiv \beta, \\ \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} + \alpha + \beta \dfrac{f_3(x)}{f_2(x)} \equiv 0, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Требование $f_2(x)\, g_1(y) \neq 0$, $x \in X$, $y \in Y$, очевидно, можно заменить условием, что функции $f_i(x)$, $g_i(y)$, $i = \overline{1, 3}$, непрерывны на числовых промежутках X и Y, а множество их нулей изолировано. В этом случае соотношение (8) на множестве нулей выражения $f_2(x)\, g_1(y)$ довыполняется по непрерывности. Если вообще нулями этого выражения формально пренебречь, то при переходе от соотношения (8) к соотношениям (9) теряются решения типа

$$\begin{gathered} f_2(x)\, g_1(x) = 0, \\ f_1(x)\, g_1(y) + f_2(x)\, g_2(y) + f_3(x)\, g_3(y) = 0 \end{gathered} \qquad (10)$$

и появляются «посторонние»

$$\begin{gathered} f_2(x)\, g_1(y) = 0, \\ f_1(x)\, g_1(y) + f_2(x)\, g_2(y) + f_3(x)\, g_3(y) \neq 0. \end{gathered} \qquad (11)$$

Замечание 2. Можно строить и другую схему разделения, дважды понизив порядок соотношения (8) на единицу. Таким путем произвольное билинейное тождество (4) заменяется равносильной совокупностью не более чем 2^n линейных систем с некоторым конечным числом разделяющих констант, не превышающим $n(n-1)/2$.

Замечание 3. Если переменные x или y — векторы, то приведенные выше утверждения дают обобщенные схемы частичного разделения, в частности схемы отделения одного из аргументов. Идентичные схемы ОРА можно построить и для систем интегро-дифференциальных уравнений в случае разделения по более чем двум переменным.

3. Приведем примеры применения схем ОРА к интегрированию уравнения КФП. Пример 1. Рассмотрим динамическую систему второго порядка

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b(x) = \dot{\xi}, \tag{12}$$

где a — константа, $b(x)$ удовлетворяет условию существования и единственности стохастического решения, например многочлен $\dot{\xi} = \dot{\xi}(t)$ — белый шум Ито с постоянной спектральной плоскостью S.

Как известно, плотность вероятности $W(x, \dot{x})$ следует искать из стационарного уравнения КФП [1]

$$-\dot{x}\frac{\partial w}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\dot{x}W) + b(x)\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{S}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0. \tag{13}$$

Применяя доказанную выше теорему, разделенное решение уравнения (13) вида

$$W(x, \dot{x}) = U(x)\,V(\dot{x}) \tag{14}$$

находим из билинейного дифференциального тождества порядка $n = 3$

$$-\dot{x}U'V + \beta(\dot{x}V)\,U' + \left[b(x)\,U' + \frac{S}{2}U''\right]V \equiv 0 \tag{15}$$

путем анализа единственного варианта разделения аргументов:

$$W(x, \dot{x}) = C\exp\left\{-\frac{\beta}{S}\left[\dot{x}^2 + 2\int_0^x g(\tau)\,d\tau\right]\right\}. \tag{16}$$

Здесь постоянная C определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(x, \dot{x})\,dx\,d\dot{x} = 1. \tag{17}$$

Таким образом, переменные x и $\dot{x}$ статистически независимы, причем переменная $\dot{x}$ распределена нормально. Это известный результат [1], полученный здесь строгим разделением переменных. В работе [5] решение (16) найдено другим путем: введением вспомогательной функции.

Пример 2. Будем исследовать случайные колебания динамической системы Ван-дер-Поля с одной степенью свободы при воздействии слабой периодической силы и белого шума Ито малой интенсивности [5]

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon\left[(1 - \gamma x^2)\,\dot{x} + p\cos\omega t\right] + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}, \tag{18}$$

Преобразование Крылова — Боголюбова — Митропольского

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} \cos\varphi \\ -\omega\sin\varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi = \omega t + \theta \tag{19}$$

приводит уравнение (18) к стандартному виду

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = -\frac{\varepsilon}{a\omega}\begin{bmatrix} af_*(a, \theta)\sin\varphi + \dfrac{\sigma^2}{2\omega}\cos^2\varphi \\ f_*(a, \theta)\cos\varphi - \dfrac{\sigma^2}{\omega a}\sin\varphi\cos\varphi \end{bmatrix} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega}\begin{bmatrix} f_*(a, \theta)\sin\varphi \\ f_*(a, \theta)\cos\varphi \end{bmatrix}\dot{\xi}, \tag{20}$$

где $f_*(a, \theta)$ — результат подстановки (19) в функцию $f(x, \dot{x}) = (1 - \gamma x^2)\,\dot{x} + p\cos\omega t$. Усредняя коэффициенты сноса и диффузии по явному времени, получаем следующее стационарное уравнение КФП для нахождения первого приближения плотности вероятности:

$$\frac{\partial}{\partial a}(K_1 W) + \frac{\partial}{\partial\theta}(K_2 W) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}(K_{11}W) + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(K_{22}W)\right], \tag{21}$$

где

$$K_1 = \frac{\sigma^2}{4\omega^2 a} + \frac{a}{2} - \frac{\gamma a^3}{8} - \frac{p\sin\theta}{2\omega},\ K_2 = \frac{-p\cos\theta}{2\omega a}, \quad K_{11} = \frac{\sigma^2}{2\omega^2}, \quad K_{22} = \frac{\sigma^2}{2\omega^2 a^2}. \tag{22}$$

Следуя изложенной выше методике ОРА, будем искать разделенное решение вида

$$W(a, \theta) = a \exp [A(a) + B(a) T(\theta)]. \tag{23}$$

Получаем билинейное дифференциальное тождество порядка $n = 8$:

$$\tau (A'' + A'^2) + \left[3\tau + \frac{a^2}{2} - \frac{\gamma a^4}{8}\right] A' + a - \frac{3}{2}\gamma a^3 - \frac{apA'}{2\omega}\sin\theta - \frac{pB}{2\omega} T'\cos\theta -$$

$$- \frac{apB'}{2\omega} T \sin\theta + \left[\tau + \frac{a^2}{2} - \frac{\gamma a^4}{8} - \tau(2B' + B'' + 2A'B')\right] T - \tau B'^2 T^2 -$$

$$- \tau \frac{B}{a} T'' - \tau \frac{B^2}{a} T'^2 \equiv 0, \tag{24}$$

где $\tau = (\sigma/2\omega)^2$, $a \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$

В данном примере неизвестные функции $A(a)$ и $B(a)$ удается найти как полиномы, а функцию $T(\theta)$ — как линейную комбинацию $\sin\theta$ и $\cos\theta$:

$$W(a, \theta) = Ca \exp\left[\left(\frac{a\omega}{\sigma}\right)^2 - \left(\frac{a^2\omega}{\sigma}\right)^2 \frac{\gamma}{8} - \frac{2\omega p}{\sigma^2} a \sin\theta\right], \tag{25}$$

где постоянная C определяется из условия нормировки.

Отметим, что формула плотности вероятности (25) получена в работе [4] эвристическим приравниванием аналога потока вероятности к нулю, а в раборе [5] — разложением по циклической координате.

4. Идея разделения аргументов играет особо важную роль при решении основных задач математической физики. Однако классическая схема разделения переменных Фурье ограничивалась расщеплением простейших билинейных тождеств второго порядка. Именно расщепление соотношений произвольного конечного порядка позволяет искать решения разделяющихся уравнений в наиболее общем разделенном виде.

Применение предложенных выше схем, а также построенных на основании их различных алгоритмов приближенного интегрирования [2] представляется практически удобным и принципиально достаточно универсальным техническим приемом нахождения разделенных решений, который допускает дальнейшее развитие для различных конкретных ситуаций. Так, имеет место следующий очевидный факт, дающий еще одну схему разделения: если исходное уравнение (3) на функциях типа (1) преобразуется к виду (4), то все компоненты $f_k(x)$, $k = \overline{1, n}$, соотношения (4) тождественно равны нулю, либо компоненты $g_k(y)$, $k = \overline{1, n}$, линейно зависимы.

Доказанные выше утверждения дают также конструктивные критерии существования соответствующих разделенных решений, однако применение их для установления неинтегрируемости в классе разделенных функций той или иной структуры представляет собой весьма трудоемкий процесс.

1. *Коломиец В. Г.* Случайные колебания нелинейных систем с сосредоточенными параметрами — Киев, 1980.— 59 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики ; 80.28).
2. *Скоробогатько В. Я.* Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.— Киев : Наук. думка, 1980.— 244 с.
3. *Каленюк П. І., Скоробогатько В. Я.* Якісні методи теорії диференціальних рівнянь.— К. : Наук. думка, 1977.— 123 с.
4. *Нгуен Донг Ань.* О решении уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова для системы Ван-Дер-Поля, подверженной периодическим и случайным воздействиям // Укр. мат. журн.— 1982.— 34, № 6.— С. 779—783.
5. *Нгуен Донг Ань.* К вопросу исследования случайных колебаний в неавтономных механических системах методом уравнений Колмогорова — Фоккера — Планка и асимптотическими методами нелинейной механики // Мат. физика. — 1983. — Вып. 34. — С. 80—85.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 22.10.87