УДК 517.988.68

Н. Г. Кузьма

Асимптотическое расщепление систем дифференциальных уравнений второго порядка с медленно меняющимися и осциллирующими коффициентами

Вопрос об асимптотическом расщеплении систем линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядков, а также порядка $n \geqslant 1$ освещен в работах [1—5]. В настоящей работе представлен алгоритм расщепления систем дифференциальных уравнений второго порядка с медленно меняющимися и осциллирующими коэффициентами вида

$$d^2x/dt^2 + B(t, \tau, \varepsilon)\, x = 0, \tag{1}$$

где $x(t, \varepsilon)$ — искомая вектор-функция переменного $t \in [0, L/\varepsilon]$, $B(t, \tau, \varepsilon)$ — $(n \times n)$-матрица; $\tau = \varepsilon t$, $L > 0$ — фиксированное число; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ — малый параметр.

Предполагаем, что выполняются условия:

1) матрица $B(t, \tau, \varepsilon)$ допускает асимптотическое разложение

$$B(t, \tau, \varepsilon) = B_0(\tau) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s B_s(t, \tau), \quad B_s(t, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\omega t} B_{sm}(\tau); \tag{2}$$

2) собственные значения $\lambda_j(\tau)$, $j = \overline{1, n}$, матрицы $B_0(\tau)$ $\forall \tau \in [0, L]$ образуют две изолированные группы, т. е. такие, что $\lambda_i(\tau) \neq \lambda_j(\tau)$, где $i = \overline{1, n_1}$; $j = \overline{n_1 + 1, n}$; $n - n_1 = n_2$;

3) элементы $B_{sm}(\tau)$ разложения (2) непрерывно дифференцируемы по τ достаточное число раз.

При построении алгоритма расщепления нам понадобится неособенная матрица $V(\tau)$, которая преобразует $B_0(\tau)$ к квазидиагональному виду

$$W_0(\tau) = V^{-1}(\tau)\, B_0(\tau)\, V(\tau) = [W_{10}(\tau),\ W_{20}(\tau)], \tag{3}$$

где $W_{10}(\tau)$ — $(n_1 \times n_1)$-матрица с собственными значениями первой группы $\lambda_j(\tau)$; $W_{20}(\tau)$ — $(n_2 \times n_2)$-матрица с собственными значениями второй группы $\lambda_j(\tau)$, $i = \overline{1, n_1}$; $j = \overline{n_1 + 1, n}$; $n_1 + n_2 = n$.

Возможность формального расщепления системы (1) на две независимые подсистемы устанавливает следующая теорема.

Теорема. *Если в системе* (1) *матрица* $B(t, \tau, \varepsilon)$ *такова, что имеют место условия* 1—3, *то систему* (1) *посредством подстановки*

$$x = T(t, \tau, \varepsilon)\, dy/dt + \Omega(t, \tau, \varepsilon)\, y \tag{4}$$

можно привести к виду

$$d^2y/dt^2 + M(t, \tau, \varepsilon)\, dy/dt + N(t, \tau, \varepsilon)\, y = 0, \tag{5}$$

в котором матрицы $M(t, \tau, \varepsilon)$ *и* $N(t, \tau, \varepsilon)$ *имеют квазидиагональную* *структуру*

$$M(t,\tau,\varepsilon)=\begin{Vmatrix} M_1(t,\tau,\varepsilon) & 0 \\ 0 & M_2(t,\tau,\varepsilon)\end{Vmatrix},\quad N(t,\tau,\varepsilon)=\begin{Vmatrix} N_1(t,\tau,\varepsilon) & 0 \\ 0 & N_2(t,\tau,\varepsilon)\end{Vmatrix} \tag{6}$$

а $M_i(t,\tau,\varepsilon)$, $N_i(t,\tau,\varepsilon)$ — *суть квадратные матрицы порядка* n_i, $i=1,2$.

Предполагается, что матрицы $T(t,\tau,\varepsilon)$, $\Omega(t,\tau,\varepsilon)$, $M(t,\tau,\varepsilon)$, $N(t,\tau,\varepsilon)$ *допускают разложения*

$$\begin{gathered}
T(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s T_s(t,\tau),\quad T_s(t,\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\omega t}T_{sm}(\tau),\\
\Omega(t,\tau,\varepsilon)=\Omega_0(\tau)+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s\Omega_s(t,\tau),\quad \Omega_s(t,\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\omega t}\Omega_{sm}(\tau),\\
M(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{s=2}^{\infty}\varepsilon^s M_s(t,\tau),\quad M_s(t,\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\omega t}M_{sm}(\tau),\\
N(t,\tau,\varepsilon)=N_0(\tau)+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s N_s(t,\tau),\quad N_s(t,\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\omega t}N_{sm}(\tau).
\end{gathered}\tag{7}$$

Следовательно, $M_i(t,\tau,\varepsilon)$ *и* $N_i(t,\tau,\varepsilon)$, $i=1,2$, *из* (6) *имеют представления вида*

$$\begin{gathered}
M_i(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{s=2}^{\infty}\varepsilon^s M_{is}(t,\tau),\quad M_{is}(t,\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\omega t}M_{ism}(\tau),\\
N_i(t,\tau,\varepsilon)=N_{i0}(\tau)+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s N_{is}(t,\tau),\quad N_{is}(t,\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\omega t}N_{ism}(\tau).
\end{gathered}\tag{8}$$

Доказательство теоремы заключается в построении алгоритма определения неизвестных элементов разложений (7), (8). Подставляя вектор-функцию $x(t,\varepsilon)$, определенную (4), в систему (1) и в полученном выражении приравнивая нулю коэффициенты при $y(t,\varepsilon)$ и dy/dt, получаем следующие уравнения:

$$\begin{gathered}
B(t,\tau,\varepsilon)\Omega(t,\tau,\varepsilon)+T(t,\tau,\varepsilon)M(t,\tau,\varepsilon)N(t,\tau,\varepsilon)-\varepsilon T(t,\tau,\varepsilon)dN/d\tau-\\
-im\omega T(t,\tau,\varepsilon)N(t,\tau,\varepsilon)-2\varepsilon dT/d\tau N(t,\tau,\varepsilon)-2im\omega T(t,\tau,\varepsilon)N(t,\tau,\varepsilon)-\\
-\Omega(t,\tau,\varepsilon)N(t,\tau,\varepsilon)-m^2\omega^2\Omega(t,\tau,\varepsilon)+2i\varepsilon m\omega d\Omega/d\tau+\varepsilon^2d^2\Omega/d\tau^2=0,
\end{gathered}\tag{9}$$

$$\begin{gathered}
B(t,\tau,\varepsilon)T(t,\tau,\varepsilon)-\varepsilon T(t,\tau,\varepsilon)dM/d\tau-im\omega T(t,\tau,\varepsilon)M(t,\tau,\varepsilon)+\\
+T(t,\tau,\varepsilon)M(t,\tau,\varepsilon)M(t,\tau,\varepsilon)-T(t,\tau,\varepsilon)N(t,\tau,\varepsilon)-2\varepsilon dT/d\tau M(t,\tau,\varepsilon)-\\
-2im\omega T(t,\tau,\varepsilon)M(t,\tau,\varepsilon)-\Omega(t,\tau,\varepsilon)M(t,\tau,\varepsilon)-m^2\omega^2T(t,\tau,\varepsilon)+\\
+2\varepsilon im\omega dT/d\tau+\varepsilon^2d^2T/d\tau^2+2\varepsilon d\Omega/d\tau+2im\omega\Omega(t,\tau,\varepsilon)=0.
\end{gathered}\tag{10}$$

Сравнивая в (9) и (10) коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, получаем систему рекуррентных уравнений

$$[B_0(\tau)-m^2\omega^2E]\,\Omega_s(t,\tau)-\Omega_s(t,\tau)N_0(\tau)=\Omega_0(\tau)N_s(t,\tau)+F_s(t,\tau),\tag{11}$$

$$\begin{gathered}
[B_0(\tau)-m^2\omega^2E]\,T_s(t,\tau)-T_s(t,\tau)N_0(\tau)=\Omega_0(\tau)M_s(t,\tau)+L_s(t,\tau),\\
s=0,1,2,\ldots,
\end{gathered}\tag{12}$$

где векторы $F_s(t,\tau)$ и $L_s(t,\tau)$ определяются через уже известные величины.

Отделяя в (11), (12) коэффициенты при сомножителях $e^{im\omega t}$, имеем

$$[B_{00}(\tau) - m^2\omega^2 E]\,\Omega_{sm}(\tau) - \Omega_{sm}(\tau)\,N_{00}(\tau) = \Omega_{00}(\tau)\,N_{sm}(\tau) + F_{sm}(\tau), \tag{13}$$

$$[B_{00}(\tau) - m^2\omega^2 E]\,T_{sm}(\tau) - T_{sm}(\tau)\,N_{00}(\tau) = \Omega_{00}(\tau)\,M_{sm}(\tau) + L_{sm}(\tau),$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad s = 0, 1, 2, \dots . \tag{14}$$

Умножая слева уравнения (13), (14) на матрицу $V^{-1}(\tau)$ и вводя новые матрицы

$$Q_{sm}(\tau) = V^{-1}(\tau)\,\Omega_{sm}(\tau), \quad P_{sm}(\tau) = V^{-1}(\tau)\,T_{sm}(\tau),$$

$$H_{sm}(\tau) = V^{-1}(\tau)\,F_{sm}(\tau), \quad K_{sm}(\tau) = V^{-1}(\tau)\,L_{sm}(\tau), \tag{15}$$

приходим к следующей системе матричных уравнений:

$$W_{00}(\tau)\,Q_{sm}(\tau) - Q_{sm}(\tau)\,W_{00}(\tau) = N_{sm}(\tau) + H_{sm}(\tau), \tag{16}$$

$$W_{00}(\tau)\,P_{sm}(\tau) - P_{sm}(\tau)\,W_{00}(\tau) = M_{sm}(\tau) + K_{sm}(\tau). \tag{17}$$

Разрешимость уравнений систем (16), (17) доказывается по алгоритму, предложенному в работе [4] с использованием результатов [6].

Результаты теоремы, согласно структуре матриц $M(t, \tau, \varepsilon)$ и $N(t, \tau, \varepsilon)$, позволяют расщепить исходную систему (1) на две подсистемы меньшей размерности того же порядка.

Об асимптотическом характере в смысле Крылова—Боголюбова—Митропольского полученного формального решения при определенных условиях свидетельствует оценка $\| x(t, \varepsilon) - x_p(t, \varepsilon) \| \leqslant C\varepsilon^p$, где $x(t, \varepsilon)$ — точное решение уравнения (1), $x_p(t, \varepsilon)$ — приближенное решение, получаемое из соотношений (4), если в формальных разложениях (7) ограничиться p слагаемыми, C — постоянная, не зависящая от ε.

1. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1966.— 252 с.
2. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.— К. : Вища шк., 1971.— 228 с.
3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1969.— 536 с.
4. *Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф.* Асимптотическое расщепление систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных.— Киев, 1978.— 40 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 78.34).
5. *Шкиль Н. И., Кушнир В. А.* Асимптотическое расщепление систем линейных дифференциальных уравнений высших порядков с малым параметром при производной // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 2.— С. 226—231.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.— 576 с.

Киев. инж.-строит. ин-т

Получено 12.05.88