УДК 517.937

В. М. Горбачук

Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторного уравнения первого порядка в банаховом пространстве

Рассмотрим уравнение

$$y'(t) - Ay(t) = 0, \quad t \in [0, \infty), \tag{1}$$

где $-A$ — генератор ограниченной голоморфной полугруппы e^{-tA} с углом φ в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. Напомним [1] что полугруппа e^{-tA} называется ограниченной голоморфной с углом φ, если она допускает аналитическое продолжение в сектор $S_\varphi = \{z : |\arg z| < \varphi\}$ со свойствами $e^{-(z_1+z_2)A} = e^{-z_1A}e^{-z_2A}$ для всех $z_1, z_2 \in S_\varphi$; при каждом $\varphi_1 < \varphi$ семейство e^{-zA} равномерно ограничено в S_{φ_1} и $e^{-zA}f \to f$, если $z \to 0$ в S_{φ_1}, для всех $f \in \mathfrak{B}$.

Под решением уравнения (1) понимается сильно непрерывно дифференцируемая на $[0, \infty)$ вектор-функция $y(t) : [0, \infty) \to \mathscr{D}(A)$ ($\mathscr{D}(A)$ — область определения оператора A), удовлетворяющая (1). В настоящей статье исследуется поведение решений уравнения (1) на бесконечности.

Обозначим через $C^\infty(A)$ множество всех бесконечно дифференцируемых векторов оператора $A : C^\infty(A) = \{f \mid f \in \bigcap_{n\geqslant 1} \mathscr{D}(A^n)\}$. Введем пространства

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \{f \in C^\infty(A) \mid \exists c > 0, \exists \alpha > 0 : \|A^n f\| \leqslant c\alpha^n n^{n\beta}, \forall n \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \{f \in C^\infty(A) \mid \forall \alpha > 0 \, \exists c = c(\alpha) : \|A^n f\| \leqslant c\alpha^n n^{n\beta}, \forall n \in \mathbb{N}\}$$
$$(\forall \beta \geqslant 0)$$

(см., например, [2]). Векторы из пространств $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A) \overset{\mathrm{df}}{=} \mathfrak{A}(A)$ и $\mathfrak{G}_{(1)}(A) \overset{\mathrm{df}}{=} \mathfrak{A}_c(A)$ называются аналитическими и соответственно целыми векторами оператора A; векторы из $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) \overset{\mathrm{df}}{=} \exp_A \mathfrak{B}$ — векторами экспоненциального типа [3]. Известно [4], что если $-A$ — генератор ограниченной голоморфной полугруппы, то $\overline{\mathfrak{G}_{(1)}(A)} = \mathfrak{B}$.

В работе [5] показано, что всякое решение уравнения (1) представимо в виде

$$y(t) = e^{tA}f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n f}{n!} t^n, \quad f \in \mathfrak{A}_c(A), \tag{2}$$

где e^{tA} — оператор, обратный к e^{-tA} (в данном случае он существует ввиду того, что $\operatorname{Ker} e^{-tA} = \{0\}$).

Теорема 1. *Пусть $-A$ — генератор ограниченной голоморфной полугруппы с углом $\varphi < \pi/2$. Если для решения $y(t)$ уравнения (1) на $[0, \infty)$ выполняется оценка*

$$\|y(t)\| \leqslant c_a e^{at^\beta}, \quad \beta < \frac{\pi}{2(\pi - \varphi)}, \tag{3}$$

с некоторыми постоянными $a > 0$, $c_a > 0$, то $y(t) \equiv g \in \operatorname{Ker} A$; в случае, когда $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, $y(t) \equiv 0$.

Доказательство. Из формулы (2) видно, что всякое решение уравнения (1) может быть представлено в виде $y(t) = e^{-(t_0-t)A}y(t_0)$, $t \leqslant t_0$, откуда $y^{(n)}(t) = A^n e^{-(t_0-t)A} y(t_0)$, $t \leqslant t_0$, $\forall t_0 > 0$. Поскольку необходимым и достаточным условием того, чтобы полугруппа e^{-tA} была ограниченной голоморфной, является условие $\exists c > 0 \ \forall t > 0 \ \forall n \in N \ \|A^n e^{-tA}\| \leqslant c^n n^n t^{-n}$

(см. [1], § X. 8), то

$$\| y^{(n)}(t) \| = \| A^n e^{-(t_0-t)A} y(t_0) \| \leqslant c^n n^n (t_0 - t)^{-n} \| y(t_0) \|.$$

Полагая в представлении (2) $t = 0$, находим $y^{(n)}(0) = A^n f$, а значит, согласно (3) $\| A^n f \| \leqslant c^n n^n c_a e^{at_0^\beta} t_0^{-n}$. Беря $t_0 = n^{1/\beta}$, получаем

$$\| A^n f \| \leqslant c^n n^n c_a e^{an} n^{-n/\beta} = c_1 b^n n^{-n(1-\beta)/\beta}.$$

Воспользуемся легко проверяемым тождеством, справедливым при условии $-1 \in \rho(B)$ ($\rho(\cdot)$ — резольвентное множество оператора):

$$(B + I)^{-1} f = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k B^k f + (-1)^n B^n (B + I)^{-1} f,$$

применив его к оператору $B = tA$. Замечая, что $\| (tA)^n (tA + I)^{-1} f \| \leqslant \leqslant \mathrm{const} \cdot (btn^{-(1-\beta)/\beta})^n$, получаем

$$g(t) = (tA + I)^{-1} f = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k A^k f.$$

Последний ряд сходится при любом комплексном z, т. е. функция $g(z) = (zA + I)^{-1} f$ целая. Ее порядок $\rho = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \dfrac{\ln \ln M(r)}{\ln r}$, где $M(r) = \max_{|z|=r} \| g(z) \|$. Согласно [6, с. 501]

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln \left(1/\sqrt[n]{\| A^n f \|}\right)} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln \left(c_1^{-1/n} b^{-1} n^{(1-\beta)/\beta}\right)} = \frac{\beta}{1-\beta} < \frac{\pi}{\pi - 2\varphi}.$$

Если положить $\varphi = \pi/2 - \alpha$, то $\rho < \pi/(2\alpha)$.

Так как $-A$ — генератор ограниченной голоморфной полугруппы с углом φ, то резольвента A определена и голоморфна в секторе $S = \{z: \alpha < |\arg z| \leqslant \pi\}$ и для z из этого сектора $\| (zI + A)^{-1} \| \leqslant M/|z|$, откуда

$$\| g(z) \| = \| (z^{-1} I + A)^{-1} \| / |z| \leqslant M, \quad z \in S. \tag{4}$$

В частности, $g(z)$ ограничена на лучах $\arg z = \pm(\alpha + \varepsilon)$. Возьмем угол $\{z : |\arg z| \leqslant \alpha + \varepsilon\}$ раствора $\gamma\pi$, где $\gamma = 2(\alpha + \varepsilon)/\pi$, ε выбирается так, чтобы $\rho < \pi/2(\alpha + \varepsilon)$. Это возможно ввиду строгого неравенства $\rho < \pi/(2\alpha)$. Поскольку порядок функции $g(z)$ $\rho < \pi/2(\alpha + \varepsilon) = 1/\gamma$ и на границе угла она ограничена, то по теореме Фрагмена—Линделефа [6] в рассматриваемом угле $\| g(z) \| \leqslant M_1 < \infty$. Принимая во внимание (4), находим, что $g(z)$ ограничена во всей комплексной плоскости. В силу теоремы Лиувилля $g(z) \equiv g$.

Таким образом, $(tA + I)^{-1} f = g \in \mathfrak{B}$, т. е. $f = tAg + g$, что возможно лишь при $Ag = 0$. Поэтому $f = g \in \operatorname{Ker} A$ и $y(t) \equiv g$.

Теорема 2. *Если нормальный оператор A в гильбертовом пространстве $\mathfrak{B}$ генерирует ограниченную голоморфную полугруппу с углом $\varphi = \pi/2 - \alpha$, а $y(t)$ — решение уравнения* (1), *то оценка*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \| y(t) \| \leqslant c e^{\varepsilon t}, \quad c = \mathrm{const},$$

влечет $y(t) \equiv g \in \operatorname{Ker} A$.

Доказательство. Из представления (2) и основной спектральной теоремы для нормальных операторов следует

$$e^{-2\varepsilon t} \| y(t) \|^2 = \int_{|\arg \lambda| \leqslant \alpha} e^{2(\mathrm{Re}\lambda - \varepsilon)t} d(E_\lambda f, f) \leqslant c^2$$

(E_λ — разложение единицы оператора A). При всех $\lambda : \mathrm{Re}\lambda > \varepsilon$ подынтегральная функция стремится к бесконечности при $t \to +\infty$. В силу теоремы

Фату $(E_\Delta f, f) = 0$ при $\Delta \subset \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \varepsilon\}$, а так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $(E_\Delta f, f) = 0$, если $0 \notin \Delta$. Следовательно, $f \in \operatorname{Ker} A$, а $y(t) = e^{tA} f \equiv f$.

В случае, когда $A = A^* \geqslant 0$, аналогичная теорема доказана в [7]. В зависимости от поведения решения $y(t)$ уравнения (1) в окрестности бесконечно удаленной точки в его представлении (2) элемент f может быть охарактеризован более детально. Следующая теорема дает эту характеристику.

Теорема 3. *Пусть $-A$ — генератор ограниченной голоморфной полугруппы, $y(t) = e^{tA}f$ $(f \in \mathfrak{A}_c(A))$ — решение уравнения* (1) *на* $[0, \infty)$. *Тогда*

$$(f \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)\,(\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)),\ 0 \leqslant \beta < 1) \Leftrightarrow (\forall a > 0\,(\exists a > 0)\ \exists c_a : \| y(t) \| \leqslant c_a e^{at^\alpha}) \tag{5}$$

(α *и* β *связаны соотношением* $\beta = (\alpha - 1)/\alpha$).

Доказательство. Предположим, что $\forall a > 0\ \exists c_a$: $\| y(t) \| \leqslant c_a e^{at^\alpha}$, $\alpha \geqslant 1$. Тогда из доказательства теоремы 1 следует

$$\| A^n f \| = \| y^{(n)}(0) \| \leqslant c^n n^n t_0^{-n} \| y(t_0) \| \quad \forall t_0 > 0.$$

Используя оценку (5) при $t_0 = (n/a)^{1/\alpha}$, получаем

$$\| A^n f \| \leqslant c_a c^n t_0^{-n} e^{at_0^\alpha} = c_a (c a^{1/\alpha} e)^n n^{n(\alpha - 1)/\alpha}.$$

Благодаря произвольности a, $f \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ с $\beta = (\alpha - 1)/\alpha$. Обратно, пусть $f \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$, $0 \leqslant \beta < 1$. На основании (2)

$$\| y(t) \| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n f}{n!} t^n \right\| \leqslant c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} a^n n^{n\beta} \quad \forall a > 0.$$

Рассмотрим целую функцию $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} a^n n^{n\beta}$. Ее порядок

$$\rho = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\ln n}{\ln (1/\sqrt[n]{a^n n^{n\beta}/n!})} = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\ln n}{\ln n^{1-\beta}} = (1 - \beta)^{-1}.$$

Тип ее $\sigma = \mu^\rho / e\rho$, где $\mu = \varlimsup\limits_{n \to \infty} (n^{1/\rho} \sqrt[n]{a^n n^{n\beta}/n!}) = \varlimsup\limits_{n \to \infty} (n^{1-\beta} a n^\beta / n) = a$, т. е. $\sigma = a^\rho / e\rho = e^{-1} a^{1/(1-\beta)} (1 - \beta)$. Поэтому $\forall a > 0$ $\| y(t) \| \leqslant c_a e^{at^\alpha}$, $\alpha = (1 - \beta)^{-1} \geqslant 1$.

Доказательство в случае $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ аналогично.

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Гармонический анализ: Самосопряженность.— М. : Мир, 1978.— 395 с.
2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 283 с.
3. *Радыно Я В.* Пространство векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР.1— 1983.— **27**, № 9.— С. 791—793.
4. *Князюк А. В.* Граничные значения бесконечно дифференцируемых полугрупп.— Киев, 1985.— 48 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.69).
5. *Горбачук В. М., Мацишин И. Т.* О решениях эволюционных уравнений с вырождением в банаховом пространстве // Спектральная теория дифференциально-операторных уравнений.— Киев, Ин-т математики АН УССР, 1986.— С. 5—10.
6. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций.— М.; Л. : Гостехиздат, 1950.— 703 с.
7. *Горбачук М. Л., Пивторак Н. И.* О решениях эволюционных уравнений параболического типа с вырождением // Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, № 8.— С. 1317—1324.

Киев. политехн. ин-т

Получено 02.02.88