УДК 517.98

М. Б. Беккер

Об одном интегральном представлении эрмитово положительных матричных ядер специальной структуры

1. Пусть $H(x)$ — эрмитова $(n \times n)$-матрица-функция, определенная на промежутке $\Delta = [0, l)$, $l \leqslant \infty$, причем H суммируема на любом сегменте $[0, b] \subset \Delta$.

Обозначим через $V(x; \lambda)$ локально абсолютно непрерывное решение матричного дифференциального уравнения

$$i\Omega \frac{dV(x; \lambda)}{dx} = \lambda H(x) V(x; \lambda), \quad x \in \Delta, \tag{1}$$

удовлетворяющее условию $V(0; \lambda) = I$. Здесь λ — действительный параметр,

$$\Omega = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}, \quad p + q = n.$$

Как известно, при фиксированном x $V(x; \lambda)$ является целой функцией λ.

В работе В. Э. Кацнельсона [1] рассматривался случай, когда $H(x) > 0$. Там была сформулирована следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы непрерывная $(n \times n)$-матрица-функция $H(x, y)$, $x, y \in \Delta$, допускала представление*

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} V(x; \lambda)\, d\Sigma(\lambda)\, V^*(y; \lambda), \tag{2}$$

где $d\Sigma(\lambda)$ — некоторая $(n \times n)$-матричная мера на R, необходимо и достаточно, чтобы K была эрмитово положительной и удовлетворяла соотношению

$$\Omega \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} H(y) + H(x) \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \Omega = 0. \tag{3}$$

Замечание. Производные в (3) понимаются в некотором обобщенном смысле.

2. В настоящей работе мы рассматриваем более общий случай, не требуя условия положительности $H(x)$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что утверждение теоремы 1 в части необходимости остается при этом в силе. Однако условия эрмитовой положительности и выполнения соотношения (3) недостаточно для справедливости представления (2). Оказывается, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть непрерывная эрмитово положительная матрица-функция $K(x, y)$, $x, y \in \Delta$, удовлетворяет соотношению (3). Тогда существует матричная $(n \times n)$-мера $d\Sigma(\lambda)$ на $\mathbb{R}$ такая, что почти всюду на $\Delta \times \Delta$ выполняется равенство*

$$H(x) K(x, y) H(y) = H(x) \int_{-\infty}^{\infty} V(x; \lambda)\, d\Sigma(\lambda)\, V^*(y; \lambda)\, H(y). \tag{2'}$$

В частности, если $\det H \neq 0$ на множестве $\mathcal{E}$ положительной меры, то равенство (2) справедливо для почти всех $x, y \in \mathcal{E}$.

Замечание. Равенство (3) понимается нами в смысле теории обобщенных функций Л. Шварца.

Отметим, что применяемый ниже метод отличается от использованного в работе [1] (в [1] проведена некоторая подготовка к доказательству теоремы 1).

Доказательство. Введем пространство $\mathcal{H}$ суммируемых на Δ вектор-функций $f : t \to \{f_j(t)\}_{j=1}^n$, равных нулю в некоторой левой полуокрестности точки l, своей для каждой функции.

Ясно, что для любой функции $f \in \mathcal{H}$

$$\|f\|^2 := \iint\limits_{\Delta\times\Delta} f^*(x) K(x, y) f(y)\, dxdy < \infty.$$

Тем самым пространство $\mathcal{H}$ становится пространством с (возможно, вырожденным) внутренним произведением.

Очевидно, что для любой функции $f \in \mathcal{H}$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$ определено отображение $\Phi : f \to \mathbb{C}^n$, задаваемое равенством

$$\Phi(f; \lambda) = \int\limits_{\Delta} V^*(x; \lambda)\, f(x)\, dx; \tag{4}$$

$\Phi(f; \lambda)$ при фиксированном $f \in \mathcal{H}$ является голоморфной функцией λ.

Введем теперь в $\mathcal{H}$ линейное отношение (л. о.) S.

Определение. *Будем говорить, что упорядоченная пара* $\{\varphi, \psi\}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, *принадлежит л. о.* S, *если существует функция* $h \in \mathcal{H}$ *со следующими свойствами*:

1) h *абсолютно непрерывна на* Δ;
2) $\psi(x) = i\Omega dh/dx$ *п. в. на* Δ;
3) $\varphi(x) = H(x)\, h(x)$;
4) $h(0) = 0$.

Функции, обладающие свойствами 1—4, будем называть функциями, порождающими л. о. S. *Множество всех порождающих л. о.* S *функций обозначим* $G(S)$.

Напомним, что множество $D(S) = \{\varphi \in \mathcal{H} : \exists \psi \in \mathcal{H}, \{\varphi, \psi\} \in S\}$ называется областью определения л. о. S.

Равенство (3) обеспечивает симметричность [2] введенного таким образом л. о. Легко видеть, что условие $\Phi(g; \lambda) = 0$ эквивалентно условию существования пары $\{\varphi, \psi\} \in S$ такой, что $\psi - \lambda\varphi = g$, $g \in \mathcal{H}$. Очевидно также, что $\Phi(\mathcal{H}; 0) = \mathbb{C}^n$. Следовательно, отображение $\Phi : g \to \Phi(g; \lambda) \in \mathbb{C}^n$ является направляющим отображением л. о. S [2].

Из основной теоремы работы [2] следует существование матричной $(n \times \times n)$-меры $d\Sigma(\lambda)$ на $\mathbb{R}$ такой, что для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in D(S)$ справедливо равенство

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \iint\limits_{\Delta\times\Delta} \varphi_2^*(x) K(x, y) \varphi_1(y)\, dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(\varphi_2; \lambda)\, d\Sigma(\lambda)\, \Phi(\varphi_1; \lambda). \tag{5}$$

С учетом определения множества $D(S)$ равенство (5) принимает вид

$$\iint\limits_{\Delta\times\Delta} h_2^*(x)\, U(x, y)\, h_1(y)\, dxdy = 0, \tag{6}$$

где

$$U(x, y) = H(x) \left\{K(x, y) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} V(x; \lambda)\, d\Sigma(\lambda)\, V^*(y; \lambda)\right\} H(y), \tag{7}$$

а h_1 и h_2 — функции из $G(S)$. Из равенства (6) следует

$$U(x, y) = 0, \quad x, y \in \Delta. \tag{8}$$

В самом деле, возьмем произвольное b такое, что $0 < b < l$, и произвольную непрерывную функцию χ_1, определенную на $[0, b]$, такую, что $\int\limits_0^b \chi_1(y)\, dy = 0$. Определим функцию $h_1(y)$, $y \in \Delta$, равенством

$$h_1(y) = \begin{cases} \int\limits_0^y \chi_1(t)\, dt, & y \leqslant b; \\ 0, & b < y < l. \end{cases}$$

Тогда $h_1 \in G(S)$ и равенство (6) принимает вид

$$\int\limits_0^b \Gamma(y)\, \chi_1(y)\, dy = 0, \tag{9}$$

где

$$\Gamma(y) = \int\limits_0^y \Big[\int\limits_\Delta h_1^*(x) U(x, t)\, dx \Big] dt \tag{10}$$

— непрерывная функция y. Из (9) и (10) следует [3, с. 204])

$$\int\limits_\Delta h_1^*(x) U(x, y)\, dx = 0 \tag{11}$$

для почти всех $y \in [0, b]$. Аналогично из (11) получаем $U(x, y) = 0$ п. в. на $[0, b] \times [0, b]$. В силу произвольности b отсюда получаем (8). Теорема доказана.

3. Отметим некоторые частные случаи. Если $\det H(x) \neq 0$ п. в. на Δ, то л. о. S оказывается оператором и утверждение теоремы 2 получается с помощью разработанного М. Г. Крейном метода направляющих функционалов [4].

Для $H(x) > 0$ интегральное представление (2) также может быть получено с помощью методов, разработанных Ю. М. Березанским и применимых в гораздо более общих ситуациях (см. [6], гл. VIII). (Ю. М. Березанский рассматривал скалярный случай, однако указанные методы легко обобщаются на матричный случай.)

Полагая $H(x) \equiv 1$, из соотношения (3) получаем, что $K(x, y)$ имеет смешанную, теплице — ганкелеву структуру

$$K(x; y) = \begin{pmatrix} T_1(x-y) & \Gamma(x+y) \\ \Gamma^*(x+y) & T_2(x-y) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где T_1 и T_2 — соответственно $p \times p$ и $q \times q$ эрмитовы матрицы-функции, а Γ — $(p \times q)$-матрица-функция. Именно такого типа матрицы явились отправными объектами работы [1].

Если одновременно $H(x) \equiv 1$ и $\Omega = 1$, то мы получаем матричный вариант теоремы Бохнера, которую на случай конечного интервала Δ обобщил М. Г. Крейн [4] (в скалярном случае обобщение теоремы Бохнера на случай конечного интервала дано М. Г. Крейном в работе [5]).

1. *Кацнельсон В. Э.* Интегральное представление эрмитово положительных ядер смешанного типа и обобщенная задача Нехари // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1985.— Вып. 43.— С. 54—70.
2. *Langer H., Textorius B.* A Generalization of M. G. Krein's method of directing functionals of linear relations // Proc. Roy. Soc. Edinburg A.— 1978.— **81**.— P. 237—246.
3. *Гурса Э.* Курс математического анализа: В 3-х т.— М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1934.— Т. 3.— 318 с.
4. *Крейн М. Г.* Про ермітові оператори з напрямними функціоналами // Зб. праць Ін-ту математики АН УРСР.— 1948.— № 10.— С. 83—106.
5. *Крейн М. Г.* О проблеме продолжения эрмитово положительных непрерывных функций // Докл. АН СССР.— 1940.— **24**, № 1.— С. 17—21.
6. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.

Физ.-хим. ин-т АН УССР, Одесса

Получено 02.01.86