УДК 517.523

*К. М. Слепенчук*

# Аналог одной теоремы Хана для бесконечных произведений

Преобразуем бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k) \tag{1}$$

с помощью матрицы $A=\|a_{nk}\|$ следующим образом: $A_n=\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_{nk}u_k)$.

Дадим определение суммируемости бесконечного произведения [1]. Если последовательность $\{A_n\}$ сходится к конечному, отличному от нуля пределу $p$, то говорят, что бесконечное произведение (1) $A$-суммируемо к $p$.

Числовую последовательность $\{u_k\}$ называют абсолютно сходящейся, если $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k-u_{k-1}|<\infty$, $u_0=0$.

Прежде всего, отметим следующую лемму.

Лемма [2]. *Для того чтобы любая абсолютно сходящаяся последовательность $\{u_k\}$ преобразовывалась с помощью $\{\alpha_k\}$ в сходящееся бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\alpha_k u_k)$, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды* 1) $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2$.

Теорема. *Для того чтобы любое бесконечное произведение* (1), *для которого $\{u_k\}$ — абсолютно сходящаяся к $a$ последовательность, было $A$-суммируемо, необходимо и достаточно, чтобы*

3) *существовал конечный* $\lim_{n\to\infty}a_{nk}=a_k$, $k=1,2,\ldots$;

4) *существовал конечный* $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_{nk}a)=\sigma\neq 0$;

5) $\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^2=O(1)$,

*При этих условиях*

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\sigma\prod_{k=1}^{\infty}\left[1+\frac{a_k(u_k-a)}{1+au_k}\right].$$

Доказательство. Достаточность условий 3—5 доказана в работе [2]. Докажем, что эти условия являются необходимыми.

Пусть условие 3 не выполнено, т. е. при некотором $k = k_0$ предел последовательности $\{a_{nk_0}\}$ не существует. Положим $u_k = 1$, если $k = k_0$ и $u_k = 0$, если $k \neq k_0$. В таком случае $A_n = 1 + a_{nk_0}$, а следовательно, последовательность $\{A_n\}$ является расходящейся, несмотря на то, что $\{u_k\}$ абсолютно сходится.

Если положить $u_k = a$, $k = 1, 2, \ldots$, то убеждаемся в необходимости условия 4.

Далее покажем, что условие $|a_{nk}| \leqslant A$, $n$, $k = 1, 2, \ldots$, является необходимым. Предположим, что оно не выполнено. При этом можно считать в силу леммы, что $|a_{nk}| \leqslant M_n$, $k = 1, 2, \ldots$

Выберем, прежде всего, такие $n = n_1$, $k = k_1$, чтобы $|a_{n_1k_1}| > 3^2$. Вследствие сходимости $\{a_{nk_1}\}$ к пределу $a_{k_1}$ существует такое $N > n_1$, что для $n > N_1$

$$\left|1 - \frac{a_{nk_1}}{\omega_1}\right| > \frac{1}{2}\left|1 - \frac{a_{k_1}}{\omega_1}\right|,$$

где

$$\omega_1 = \begin{cases} 2, \text{ если } |a_{k_1}| \neq 2; \\ 3, \text{ если } |a_{k_1}| = 2. \end{cases}$$

В таком случае можно найти такие $n = n_2 > N_1$, $k = k_2 > k_1$, чтобы $|a_{n_2k_2}| > 2 \cdot 3^4 M_{n_1}\alpha_1$, где $\alpha_1 = \max\left\{1, \left(1 - \frac{|a_{k_1}|}{\omega_1}\right)^{-1}\right\}$. Так как $a_{nk_2} \to a_{k_2}$, $n \to \infty$, то всегда можно найти такое $N_2 > n_2$, что для $n > N_2$

$$\left|1 - \frac{|a_{nk_2}|}{\omega_2^2 M_{n_1}}\right| > \frac{1}{2}\left|1 - \frac{|a_{k_2}|}{\omega_2^2 M_{n_1}}\right|,$$

где

$$\omega_2 = \begin{cases} 2, \text{ если } |a_{k_2}| \neq 2^2 M_{n_1}; \\ 3, \text{ если } |a_{k_2}| = 2^2 M_{n_1}. \end{cases}$$

Продолжая этот процесс неограниченно, получаем две возрастающие последовательности $\{n_\nu\}$ и $\{k_\nu\}$ такие, что $|a_{n_\nu k_\nu}| > 2^{\nu-1}3^\nu \prod_{l=1}^{\nu-1} M_{n_l}\alpha_l$, $\nu = 1, 2, \ldots$, где $\alpha_\nu = \max\left\{1, \left(1 - \frac{|a_{k_\nu}|}{\omega_\nu^\nu M_{n_1}M_{n_2}\ldots M_{n_{\nu-1}}}\right)^{-1}\right\}$ и

$$\omega_\nu = \begin{cases} 3, \text{ если } |a_{k_\nu}| \neq 2^\nu M_{n_1}M_{n_2}\ldots M_{n_{\nu-1}}; \\ 3, \text{ если } |a_{k_\nu}| = 2^\nu M_{n_1}M_{n_2}\ldots M_{n_{\nu-1}}. \end{cases}$$

При этом для $n > n_{\nu+1}$

$$\left|1 - \frac{|a_{nk_\nu}|}{\omega_\nu^\nu M_{n_1}M_{n_2}\ldots M_{n_{\nu-1}}}\right| > \frac{1}{2}\left|1 - \frac{|a_{k_\nu}|}{\omega_\nu^\nu M_{n_1}M_{n_2}\ldots M_{n_{\nu-1}}}\right|.$$

Полагая

$$u_k = \begin{cases} 0, \ k \neq k_\nu, \ \nu = 1, 2, \ldots, \\ \dfrac{\operatorname{sgn} a_{n_\nu k_\nu}}{\omega_\nu^\nu M_{n_1}M_{n_2}\ldots M_{n_{\nu-1}}}, \quad k = k_\nu, \ \nu = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

будем иметь

$$|A_{n_1}| = \left|\prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_{n_1k}u_k)\right| \geqslant \left|1 + \frac{1}{3}\left|a_{n_1k_1}\right|\prod_{l=2}^{\infty}\left(1 - \frac{a_{n_1k_l}}{2^l M_{n_1}\dots M_{n_{l-1}}}\right|\geqslant$$

$$\geqslant\left(1 + 3^2\cdot\frac{1}{3}\right)\prod_{l=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^l}\right) = 3\prod_{l=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^l}\right),$$

$$|A_{n_\nu}| = \prod_{l=1}^{\nu-1}\left|1 - \frac{|a_{n_\nu k_l}|}{\omega_l^l M_{n_1}M_{n_2}\dots M_{n_{l-1}}}\right|\left(1 + |a_{n_\nu k_l}|\frac{1}{3^\nu M_{n_1}M_{n_2}\dots M_{n_{\nu-1}}}\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{l=\nu+1}^{\infty}\left(1 - |a_{n_\nu k_l}|\frac{1}{2^l M_{n_1}M_{n_2}\dots M_{n_{l-1}}}\right)\right) >$$

$$> \frac{1}{2^{\nu-1}}\prod_{l=1}^{\nu-1}\left|1 - \frac{|a_{k_l}|}{\omega_l^l M_{n_1}M_{n_2}\dots M_{n_{l-1}}}\right|2^{\nu-1}3^{2\nu}\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{\nu-1}M_{n_l}\alpha_l\frac{1}{3^\nu M_{n_1}\dots M_{n_{l-1}}}\prod_{l=\nu+1}^{\infty}\left(1 - \frac{M_{n_{l-1}}}{2^\nu M_{n_1}\dots M_{n_{l-1}}}\right| >$$

$$> 3^\nu\prod_{l=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^l}\right), \qquad \nu = 1, 2, \dots,$$

т. е. последовательность $\{A_n\}$ является расходящейся.

Далее, положим $u_k = 1$, $k = 1, 2, \dots$. В таком случае необходимо последовательность $\{R_n\}$ сходится, где $R_n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_{nk})$, а следовательно, сходится $\{\sigma_n\}$, где

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty}\ln(1 + a_{nk}) = \sum_{k=1}^{\infty}a_{nk} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{nk}^2}{(1 + a_{nk}\theta_{nk})^2}.$$

Предположим, что не выполнено условие 5. Положим $u_k = \frac{1}{A^3}$, $k = 1, 2, \dots$. Покажем, что $\{A_n\}$ расходится, несмотря на то, что $\{u_k\}$ абсолютно сходится. Положим $\alpha = 1/A$. Тогда

$$\ln\prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_{nk}u_k) = \frac{1}{A^3}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A^3}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{nk}^2}{\left(1 + a_{nk}\frac{1}{A^3}\theta_{nk}\right)^2} >$$

$$> A^3\left[\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk} - \frac{1}{2A^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{nk}^2}{(1-\alpha)^2}\right] = \frac{1}{A^3}\left[\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2(1 + A)^2}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^2\right] + \frac{1}{2A^3}\left[\frac{1}{(1 + A)^2} - \frac{1}{A^3(1-\alpha)^2}\right]\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^2. \qquad (2)$$

Заметим, что $\left[\frac{1}{(1+A)^2} - \frac{1}{A^3(1-\alpha)^2}\right] > 0$ и, кроме того. $\sigma_n < \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - \frac{1}{2(1+A)^2} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^2$, левая часть которого сходится при $n \to \infty$. Поэтому, принимая во внимание (2), убеждаемся в расходимости $\{A_n\}$.

Доказанная теорема является аналогом для бесконечных произведений одной теоремы Хана, известной для рядов [3].


1. *Калашников М. Д.* Об условиях суммируемости бесконечных произведений // Укр. мат. журн.— 1951.— **3**, **№ 4**.— С. 477—488.
2. *Слепенчук К. М.* Нелинейные преобразования некоторых классов последовательностей (произведений) // Изв. вузов. Математика.— 1964.— № 2.— С. 144—151.
3. *Hahn H.* Über Folgen linearer Operationen // Monatsh. Math. und Phys.— 1922.— **32**.— S. 3—88.



Днепропетр. ун-т

Получено 28.04.86