УДК 519.21

Т. А. Скороход

О смешанном произведении стохастических полугрупп, порожденных винеровскими процессами

В работе [1] изучался вопрос существования смешанного произведения мультипликативной стохастической полугруппы на себя. В данной работе доказывается существование смешанного произведения двух стохастических полугрупп, порожденных винеровскими процессами, которые согласованы с общим потоком σ-алгебр. Дадим точные определения.

Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство операторов Гильберта—Шмидта в H с нормой $\sigma(\cdot)$; $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — вероятностное пространство, $\mathfrak{F}(s, t) \subset \mathfrak{F}$ — поток σ-алгебр со следующими свойствами: 1) $\mathfrak{F}(s, u)$, $\mathfrak{F}(u, t)$, $s \leqslant u \leqslant t$, независимы; 2) $\sigma(\mathfrak{F}(s, u) \cup \mathfrak{F}(u, t)) = \mathfrak{F}(s, t)$.

Рассмотрим семейство случайных линейных операторов $X(s, t)$, согласованное с $\mathfrak{F}(s, t)$ и со значениями в $E + \mathfrak{H}$.

Определение 1. *Семейство $X(s, t)$ называется мультипликативной стохастической полугруппой, если выполнены условия*:

1) $X(s, u)\, X(u, t) = X(s, t)$, $X(t, t) = E \pmod P$;

2) $d(X(s, t) - E) \to 0$, $|s - t| \to 0$, $d(X(s, t) - E) = (M\sigma^2(X(s, t) - E))^{1/2}$.

Определение 2. *Если $Y(t)$ — процесс с независимыми приращениями, принимающий значение в $\mathfrak{H}$ и непрерывный в норме $d(\cdot)$, то семейство $Y(s, t) = Y(t) - Y(s)$ будем называть аддитивнойсто хастической полугруппой.*

Между $X(s, t)$ и парой $(Y(s, t), MX(s, t))$ существует взаимно-однозначное соответствие [2—4]

$$X(s, t) = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} (MX(t_{k-1}, t_k) + Y(t_{k-1}, t_k)),$$

$$Y(s, t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (X(t_{k-1}, t_k) - MX(t_{k-1}, t_k)). \tag{1}$$

Будем говорить, что $Y(s, t)$ — соответствующая $X(s, t)$ аддитивная полугруппа, если она определяется формулой (1).

Определение 3. *Смешанным произведением стохастических полугрупп $X_1(s, t)$ и $X_2(s, t)$, согласованных с $\mathfrak{F}(s, t)$, будем называть предел* *в норме $d(\cdot)$ вида*

$$(X_1 \boxtimes X_2)(s, t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} X_1(t_{k-1}, t_k) X_2(t_{k-1}, t_k), \quad s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t,$$

$$\text{при } \max(t_k - t_{k-1}) \to 0.$$

Лемма. *Пусть $MX_i(s, t) = E$, $X_i(s, t)$, $i = 1, 2$,— стохастические полугруппы с ограниченными скачками, т. е. $\sigma(X_i(t-0, t+0) - E) \leqslant c \pmod P$ $\forall t \in [0, T]$, а также $\sup_{\{t_k\}} \sum_{k=1}^{n} (M\sigma^4(X_i(t_{k-1}, t_k) - E - Y_i(t_{k-1}, t_k))^{1/4} < \infty$. Тогда существует предел*

$$(X_1 \boxtimes X_2)(s, t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (E + Y_1(t_{k-1}, t_k) + Y_2(t_{k-1}, t_k) + Y_0(t_{k-1}, t_k)),$$

где $Y_0(s, t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} Y_1(t_{k-1}, t_k) Y_2(t_{k-1}, t_k)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы в [1].

Будем говорить, что $Y(t)$ — винеровский процесс в $\mathfrak{H}$, если выполнены условия:

1) $Y(t)$ — сильный винеровский процесс в H [5, с. 104];

2) $\operatorname{sp} MY^*(t) Y(t) = t \operatorname{sp} MY^*(1) Y(1) = td^2(Y(1)) < \infty$. Это необходимое и достаточное условие, чтобы $Y(t)$ был оператором Гильберта—Шмидта при всех $t \in [0, T]$ [5, с. 29].

Теорема. *Пусть $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ — винеровские процессы в $\mathfrak{H}$ такие, что $Y_i(s, t)$ согласовано с $\mathfrak{F}(s, t)$. Тогда существует предел в норме $d(\cdot)$*

$$(X_1 \boxtimes X_2)(s, t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (E + Y_1(t_{k-1}, t_k) + Y_2(t_{k-1}, t_k)) \exp\{At\},$$

где $X_i(s, t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (E + Y_i(t_{k-1}, t_k))$, $A = MY_1(1) Y_2(1)$.

Доказательство. Проверим выполнение условий леммы. Для этого достаточно показать, что для произвольного винеровского процесса $Y(t)$ выполняется условие

$$M\sigma^4(X(t) - E - Y(t)) \leqslant ct^4, \quad X(t) = X(0\ t), \quad c = \text{const}. \tag{2}$$

Пусть $\{e_i, i = \overline{1, \infty}\}$ — ортонормированный базис в H, $a_{ij}(t) = ((X(t) - E - Y(t)) e_i, e_j) = x_{ij}(t) - \delta_{ij} - y_{ij}(t)$. Справедливо равенство

$$a_{ij}(t) = \int_0^t \sum_{r=1}^{\infty} (x_{ir}(u) - \delta_{ir}) y_{rj}(du).$$

Это запись интегрального уравнения [2] в координатной форме. Таким образом, нужно проверить условие $M(\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^2(t))^2 \leqslant ct^4$. Применяя формулу Ито к функции $f(a_{ij}, i, j = \overline{1, \infty}) = \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^2\right)^2$, получаем следующее выражение:

$$Mf(a_{ij}) = 4M \int_0^t \sum_{i,j,k,m} a_{ij}(u) a_{km}(u)\, d\langle a_{ij}, a_{km}\rangle_u +$$

$$+ 2M \int_0^t \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^2(u)\right) \sum_{i,j=1}^{\infty} d\langle a_{ij}\rangle_u.$$

Здесь $d\langle a_{ij}, a_{km}\rangle_u = \sum_{r_1, r_2} (x_{ir_1}(u) - \delta_{ir_1})(x_{kr_2}(u) - \delta_{kr_2})\, d\langle y_{r_1 j}, y_{r_2 m}\rangle_u$.

Пусть $My_{rj}^2(t) = b_{rj}^2 t$, $\sum_{r,j} b_{rj}^2 = b$, $B = \{b_{ij}\}$. Так как $|\langle y_{r_1 j}, y_{r_2 m}\rangle_u| \leqslant \leqslant (\langle y_{r_1 j}\rangle_u \langle y_{r_2 m}\rangle_u)^{1/2}$, то

$$Mf(a_{ij}) \leqslant 4M \int_0^t \sum_{ij,k,m} (x_{ij}(u) - \delta_{ij} - y_{ij}(u))(x_{km}(u) - \delta_{km} - y_{km}(u)) \times$$

$$\times \sum_{r_1,r_2} |(x_{ir_1}(u) - \delta_{ir_1})(x_{kr_2}(u) - \delta_{kr_2})| b_{r_1 j} b_{r_2 m} du + 2M \int_0^t \sum_{i,j} (x_{ij}(u) -$$

$$- \delta_{ij} - y_{ij}(u))^2 \sum_{i,j,r} (x_{ir}(u) - \delta_{ir})^2 b_{rj}^2 du \leqslant 6M \int_0^t M\sigma^2 (X(u) - E -$$

$$- Y(u)) \sigma^2(B) \sigma^2(X(u) - E) du \leqslant 6b \int_0^t (M\sigma^4(X(u) - E - Y(u)))^{1/2} \times$$

$$\times (M\sigma^4(X(u) - E))^{1/2} du.$$

Дальше доказательство условия (2) проводится так же, как в работе [1].

Таким образом, существует предел

$$(X_1 \boxtimes X_2)(s, t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n (E + Y_1(t_{k-1}, t_k) + Y_2(t_{k-1}, t_k) + Y_0(t_{k-1}, t_k)),$$

где $Y_0(s, t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n Y_1(t_{k-1}, t_k) Y_2(t_{k-1}, t_k)$.

Проверим, что $Y_0(0, t) = At$. Так как

$$\lim \sum_{k=1}^n MY_1(t_{k-1}, t_k) Y_2(t_{k-1}, t_k) = MY_1(t) Y_2(t) =$$

$$= tMY_1(1) Y_2(1) = At, \quad t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = t,$$

убедимся, что норма разности следующих сумм стремится к нулю:

$$d^2\left(\sum_{k=1}^n Y_1(t_{k-1}, t_k) Y_2(t_{k-1}, t_k) - MY_1(t_{k-1}, t_k) Y_2(t_{k-1}, t_k)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^n M\,\mathrm{sp}\,(Y_1(t_{k-1}, t_k) Y_2(t_{k-1}, t_k) - MY_1(t_{k-1}, t_k) Y_2(t_{k-1}, t_k)) \times$$

$$\times (Y_1(t_{k-1}, t_k) Y_2(t_{k-1}, t_k) - MY_1(t_{k-1}, t_k) Y_2(t_{k-1}, t_k))^* =$$

$$= \sum_{k=1}^n M\sigma^2(Y_1(t_{k-1}, t_k) Y_2(t_{k-1}, t_k)) - \sigma^2(MY_1(t_{k-1}, t_k) Y_2(t_{k-1}, t_k) -$$

$$- \sigma^2(MY_1(t_{k-1}, t_k) Y_2(t_{k-1}, t_k) + \sigma^2(MY_1(t_{k-1}, t_k) Y_2(t_{k-1}, t_k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^n (M\sigma^2(Y_1(t_{k-1}, t_k) Y_2(t_{k-1}, t_k) - \sigma^2(MY_1(t_{k-1}, t_k) Y_2(t_{k-1}, t_k)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n 2M\sigma^2(Y_1(t_{k-1}, t_k) Y_2(t_{k-1}, t_k)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n 2(M\sigma^4(Y_1(t_{k-1}, t_k))^{1/2} (M\sigma^4(Y_2(t_{k-1}, t_k))^{1/2}.$$

Поскольку для произвольного винеровского процесса $Y(t)$ $M\sigma^4(Y(t)) =$

$= M\,(\Sigma y_{ij}^2\,(t))^2 \leqslant ct^2$ (это следует из теоремы 6 в [6, с. 26] при $f\,(t) =$ 1
то последняя сумма стремится к нулю.

Таким образом, используя лемму, а также теорему о смешанном пр
изведении для независимых стохастических полугрупп в [3] (одна из н
неслучайна), получаем

$$(X_1 \boxtimes X_2)(s, t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (E + Y_1(t_{k-1}, t_k) + Y_2(t_{k-1}, t_k) + A(t_k - t_{k-1})) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (E + Y_1(t_{k-1}, t_k) + Y_2(t_{k-1}, t_k)) \exp\{MY_1(1)\,Y_2(1)\,(t - s)\}.$$

1. *Каратаева Т. В., Скороход Т. А.* К вопросу о смешанном произведении зависимых му
типпликативных полугрупп // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 2.— С. 161—167.
2. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы.— Киев : Наук. думка, 1977.— 213 с.
3. *Буцан Г. П., Буцан С. П.* Неоднородные стохастические полугруппы // Укр. м
журн.— 1981.— **33**, № 4.— С. 437—443.
4. *Скороход Т. А.* О замыкании стохастических полугрупп // Вероятностные распреде
ния в бесконечномерных пространствах.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1978
С. 144—153.
5. *Скороход А. В.* Случайные линейные операторы.— Киев : Наук. думка, 1978.— 200
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения.— Кие
Наук. думка, 1968.— 353 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 19.02.