УДК 519.4

А. Ю. Далецкий, Г. Б. Подколзин

Групповой подход к интегрированию бесконечной цепочки Тоды

В настоящей работе дается групповая интерпретация бесконечной цепочки Тоды. Получены формулы для решения цепочки на всей оси с начальными условиями из l_2. Для конечных цепочек подобные методы развивались в работах [1—3] (см. также приведенную там библиографию). Ход рассуждений следует [3].

Другие подходы к бесконечным цепочкам рассматривались в [4—7]. В частности, в [5, 6] удалось получить решение цепочки на полуоси с ограниченным начальным условием. В [7] цепочки на всей оси рассматриваются в том же классе начальных условий, что и в настоящей работе.

1. Рассмотрим на пространстве последовательностей $(p_n, q_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ со стандартной симплектической формой $\Sigma dp_n \wedge dq_n$ динамическую систему, заданную гамильтонианом

$$H(p, q) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} A_{ij}p_ip_j + \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^2 e^{2q_k}. \tag{1}$$

где $A_{i,i} = 2$, $A_{i,i\pm1} = -1$, $A_{ik} = 0$, $\Sigma c_k^2 < \infty$.

Пусть $(p_n(0), q_n(0))_{n\in\mathbb{Z}}$ — начальное условие такое, что

$$\sum p_n^2(0) < \infty, \quad \sum c_k^2 e^{2q_k(0)} < \infty. \tag{2}$$

Рассмотрим бесконечную матрицу Гильберта—Шмидта $x_0 = \sum_{i\in z} (p_i(0) E_{ii} + (E_{i,i+1} + E_{i+1,i}) c_i e^{q_i(0)})$, где E_{ij} — матричная единица с 1 на пересечении i-й строки и j-го столбца, и соответствующую однопараметрическую группу $\exp tx_0$. Ее можно единственным образом представить в виде $\exp tx_0 = h(t)n(t)k(t)$, где $h(t)$ — диагональная, $k(t)$ — ортогональная, $n(t)$ — верхнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали. Матрицу $h(t)$ можно однозначно представить в виде $h(t) = \exp \mathcal{H}(t)$. Пусть $\mathcal{H}_n(t)$—

n-й диагональный элемент $\mathcal{H}(t)$, где $\mathcal{H}(t)$ — диагональная матрица Гильберта—Шмидта.

Теорема. *Решение уравнений, описывающих динамическую систему с гамильтонианом H и начальным условием $(p_n(0), q_n(0))$, имеет вид*

$$q_n(t) = q_n(0) - (\mathcal{H}_n(t) - \mathcal{H}_{n-1}(t)). \tag{3}$$

Замечания. 1. Эволюцию импульсов можно определить из соотношений $\dot{p}_n = \partial H/\partial q_n \equiv 2c_n^2 e^{2q_n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Для полубесконечной цепочки, т. е. когда $c_n = 0$ при $n < 0$, формулу (3) можно представить в более явном виде, выразив $\mathcal{H}_n(t)$ через главные миноры Δ_n матрицы $\exp tx_0$:

$$q_n(t) = q_n(0) - \frac{1}{2}\ln\frac{\Delta_n^2}{\Delta_{n-1}\Delta_{n+1}}, \quad n \geqslant 0. \tag{4}$$

3. Обычно гамильтониан цепочки Тоды записывается следующим образом: $H(p', q') = \sum p_k'^2 + \sum e^{2(q_k' - q_{k+1}')}$. Он приводится к виду (1) канонической заменой переменных $q_k = q_k' - q_{k+1}'$, $p_k = \sum\limits_{n=-\infty}^{k} p_n'$ $\left(\text{или } p_k = \sum\limits_{n=1}^{k} p_n'\right.$ в полубесконечном случае$\left.\right)$. Для того чтобы $p_k(0)$ удовлетворяли условиям (2), нужно требовать, чтобы вектор $(p_k'(0)_{k\in\mathbb{Z}})$ лежал в плотном в l_2 пространстве векторов, имеющих вид $\Sigma\alpha_k\varepsilon_k$, где $\varepsilon_k = (\dots 0, \overset{k}{1}, -1, 0 \dots)$ и $\Sigma\alpha_k^2 < \infty$. Формулы (3) и (4) принимают вид $q_n'(t) = q_n'(0) - \mathcal{H}_n(t)$, $q_n'(t) = q_n'(0) - \frac{1}{2}\ln\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$, $n \in \mathbb{Z}$. Для конечных цепочек последняя формула получена в [1].

2. Пусть $\mathcal{B}$ — вещественная гильбертова алгебра Ли с базисом $\{H_k, Z_k, k \in \mathbb{Z}\}$ и коммутационными соотношениями

$$[H_i, H_k] = [Z_i, Z_k] = 0, \quad [H, Z_i] = \alpha_i(H) Z_i, \quad i, k \in \mathbb{Z},$$
$$H = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k H_k, \quad \alpha_i(H) = a_i - a_{i+1}. \tag{5}$$

Функционалы α_k, Z_k^*, $k \in \mathbb{Z}$, где $Z_k^*(H) = 0$, $Z_k^*(Z_i) = \delta_{k,i}$, образуют полную систему в сопряженном пространстве $\mathcal{B}^*$.

Соответствующая $\mathcal{B}$ связанная односвязанная группа Ли B является экспоненциальной, т. е. экспоненциальное отображение exp — аналитический диффеоморфизм $\mathcal{B}$ на B.

Из коммутационных соотношений (5) вытекают формулы для коприсоединенного действия $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}^*$:

$$\mathrm{ad}^*(H) Z_j^* = \alpha_j(H) Z_j^*, \quad \mathrm{ad}^*(H)\alpha_j = 0, \quad \mathrm{ad}^*(x) Z_j^* = Z_j^*(x)\alpha_j, \quad \mathrm{ad}^*(x)\alpha_j = 0,$$
$$\mathrm{Ad}^*(\exp(H)) Z_j^* = e^{-\alpha_j(H)} Z_j^*, \quad \mathrm{Ad}^*(\exp(H))\alpha_j = \alpha_j, \quad \mathrm{Ad}^*(\exp(x)) Z_j^* = Z_j^* +$$
$$+ Z_j^*(x)\alpha_j, \quad \mathrm{Ad}^*(\exp(x))\alpha_j = \alpha_j, \quad H \in \mathfrak{A} \overset{\mathrm{df}}{=} \text{з. л. о. } \{H_k\}, \quad x \in \mathfrak{A} \overset{\mathrm{df}}{=} \text{з. л. о. } \{Z_k\}. \tag{6}$$

Рассмотрим орбиту $O\xi = \mathrm{Ad}^*(B)\xi$ точки $\xi = \Sigma b_k\alpha_k + \Sigma c_k Z_k^* \in \mathcal{B}^*$. Пусть $H = \sum -\tilde{q}_k H_k \in \mathfrak{A}$, $x = \sum \frac{p_k - b_k}{c_k} Z_k \in \mathfrak{A}$, $q_k = \tilde{q}_k - \tilde{q}_{k+1}$. Тогда $O\xi \ni \eta = \mathrm{Ad}^*(\exp(H)\exp(x))\xi = \sum p_k\alpha_k + \sum c_k e^{(\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k+1})} Z_k^*$.

Орбита $O\xi$ является симплектическим многообразием с симплектической формой Кириллова, p_k, q_k — канонические координаты на $O\xi$.

Зададим на $\mathcal{B}^*$ непрерывную билинейную форму $\langle\cdot,\cdot\rangle$ следующими соотношениями: $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = A_{ij}$, $\langle\alpha_i, Z_j^*\rangle = 0$, $\langle Z_j^*, Z_j^*\rangle = \delta_{ij}$. Определение корректно, поскольку при каноническом отождествлении $\mathscr{B}^*$ с $\mathscr{B}$ $\langle\cdot, \cdot\rangle$ совпадает со скалярным произведением в $\mathscr{B}$.

Рассмотрим функцию $H(\eta) = \langle\eta, \eta\rangle$. Сужение ее на орбиту имеет вид $H(\eta) \equiv H(p, q) = \Sigma A_{ij}p_ip_j + \Sigma c_k^2 e^{2q_k}$. Тогда уравнения, описывающие динамику системы с гамильтонианом $H(p, q)$, можно представить в виде уравнения Эйлера на $\mathscr{B}^*$:

$$\dot{\xi}(t) = -\operatorname{ad}^*(dH(\xi(t)))\,\xi(t). \tag{7}$$

3. Рассмотрим гильбертову алгебру Ли $\mathfrak{G}$ вещественных матриц $x = (x_{ij})_{ij\in\mathbb{Z}}$ таких, что $\sum_{ij} |x_{ij}|^2 < +\infty$. Соответствующая группа G состоит из обратимых матриц вида $I + x$, $x \in \mathfrak{G}$.

Алгебра $\mathfrak{G}$, как линейное пространство, представима в виде прямой суммы $\mathfrak{G} = \mathscr{K} + \mathfrak{H} + \mathfrak{N}$, где $\mathscr{K}$ — подалгебра кососимметричных, $\mathfrak{H}$ — диагональных, $\mathfrak{N}$ — верхнетреугольных матриц с нулями на главной диагонали. Пусть K, H, N — соответствующие подгруппы G.

Л е м м а 1. *Отображение $K \times H \times N \in (k, h, n) \to hnk \ni G$ — диффеоморфизм.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из регулярности этого отображения в каждой точке (см., например, [3]) и его взаимной однозначности для плотного множества матриц вида I + финитная матрица.

Пусть $\mathfrak{S} = \mathfrak{H} + \mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}^*$ и $\mathfrak{G}^*$ — сопряженные пространства. Помимо разложения $\mathfrak{G} = \mathscr{K} + \mathfrak{S}$ рассмотрим разложение $\mathfrak{G} = \mathscr{K} + P$, где P — множество симметричных матриц. Это разложение ортогонально относительно формы Киллинга $B(x, y) = \operatorname{tr} xy$, B не вырождена на $\mathfrak{G}$, и, следовательно, отождествляя с помощью B $\mathfrak{G}$ с $\mathfrak{G}^*$, можно отождествить $\mathscr{K}$ с $\mathscr{K}^*$ и P с $\mathfrak{S}^*$. Пусть $\psi : P \to \mathfrak{S}^*$ — соответствующий изоформизм.

Рассмотрим на $\mathfrak{S}^*$ функцию $F(\xi) = \Phi(\psi^{-1}(\xi))$, где $\Phi(x) = B(x, x)$. Применение схемы Адлера к гамильтоновой системе на $\mathfrak{S}^*$

$$\dot{\xi} = -\operatorname{ad}^*_\sigma(dF(\xi))\,\xi \equiv -\operatorname{ad}^*_\sigma(\pi_s(x))\,\xi, \quad \xi = \psi(x) \tag{8}$$

показывает, что интегральная кривая, проходящая через точку $\xi_0 = \psi(x_0)$, имеет вид

$$\xi(t) = \operatorname{Ad}^*_s(s(t)^{-1})\,\xi_0, \text{ где } s(t) = s(\exp tx_0) \tag{9}$$

(π_s и s — операторы проектирования на алгебру $\mathfrak{S}$ и группу S соответственно, см. [3]).

4. Используем теперь формулу (9) для решения уравнений цепочки Тоды. Пусть $h_k = E_{kk}$, $\beta_k \in \mathfrak{H}^*$ — простые корни $\mathfrak{G}$ (если $h = \Sigma b_k h_k$, то $\beta_k(h) = b_k - b_{k+1}$), h_k, $k \in \mathbb{Z}$, образует базис в $\mathfrak{H}$, а β_k, $k \in \mathbb{Z}$, — в $\mathfrak{H}^*$. Определим отображения $\nu : \mathscr{B} \to \mathfrak{S} : H_k \mapsto h_k$, $Z_k \mapsto E_{k,k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$, и $\nu^* : \mathfrak{S}^* \mapsto \mathscr{B}^* : \beta_k \mapsto \alpha_k$, $E^*_{k,k+1} \mapsto Z^*_k$, $E^*_{k,l} \mapsto 0$, $j \neq k + 1$.

Пусть $\mathfrak{N}_1$ — алгебра верхнетреугольных матриц с нулями на двух первых диагоналях. $\mathfrak{N}_1$ — идеал в $\mathfrak{S}$, $\mathscr{B} = \mathfrak{S}/\mathfrak{N}_1$, $[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}] \subset \mathfrak{N}_1$. В силу этих соотношений операторы ad^* и ν^* коммутируют: $\operatorname{ad}^*_{\mathscr{B}}(x)\,\nu^*\xi = \nu^*\operatorname{ad}^*_{\mathfrak{S}}(\nu x)\,\xi$, $x \in \mathscr{B}$, $\xi \in \mathfrak{S}^*$. Кроме того, $F(\nu^*\xi) = H(\xi)$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Л е м м а 2. *Интегральная кривая уравнения* (7), *проходящая через точку $\eta_0 \in \mathscr{B}^*$, имеет вид $\eta(t) = \nu^*\xi(t)$, где $\xi(t)$ — решение задачи Коши* (8) *с начальным условием $\xi_0 = \nu^{*-1}\eta_0$, и лежит на орбите $O\eta_0$.*

Для доказательства приведенной в п. 1 теоремы достаточно теперь положить $\eta_0 = \Sigma p_k(0)\,\alpha_k + \Sigma c_k^2 e^{2q_k(0)} Z^*_k$.

1. *Ольшанецкий М., Переломов А.* Цепочка Тоды, как редуцированная система // Теорет. мат. физика.— 1980.— **45** № 1.— С. 3—18.
2. *Рейман А. Г.* Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та.— 1980.— **95**.— С. 3—54.

3. *Goodman R., Wallach N. R.* Classical and Quantum — Mecanical Systems of Toda Lattice Type. I // Communs Math. Phys.— 1982.— **83**.— P. 355—386.
4. *Kac M., van Moerbeke P.* On the explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices // Adv. Math.— 1975.— **16**, N 2.— P. 160—169.
5. *Berezansky Ju. M.* The integration of semiinfinite Toda chain by means of inverse spectral problem.— Kiev, 1984.— 42 p.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики ; 84.79).
6. *Березанский Ю. М.* Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи // Докл. АН СССР.— 1985.— **281**, № 1.— С. 16—19.
7. *Жернаков Н. В.* Интегрирование цепочки Тоды в классе операторов Гильберта — Шмидта // Укр. мат. журн.

Ин-т электросварки АН УССР, Киев

Получено 29.10.86