УДК 517

Л. А. Сахнович

Эволюция спектральных данных и нелинейные уравнения

Как известно [1], закон эволюции данных рассеяния позволяет для соответствующих нелинейных уравнений изучить задачу Коши в области $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$. В работе [2] для полубесконечных дискретных задач используется эволюция спектральных данных. В настоящей статье выясняется закон эволюции спектральных данных в континуальном случае, что позволяет исследовать смешанную задачу в области $0 \leqslant x < \infty$, $t \geqslant 0$. Рассмотрим матрицы-функции $G(x, t, z)$ и $F(x, t, z)$ порядка $n \times n$. Введем далее $W(x, t, z)$ и $V(x, t, z)$ с помощью соотношений

$$\partial W/\partial x = G(x,t,z)\,W, \quad W(0,t,z) = E_n, \tag{1}$$

$$\partial V/\partial t = F(x,t,z)\,V, \quad V(x,0,z) = E_n. \tag{2}$$

Будем предполагать при этом, что [2, 3]

$$\partial G/\partial t - \partial F/\partial x + [G, F] = 0, \tag{3}$$

где $[G, F]$ — коммутант. Отдельно рассмотрим случай, когда

$$n = 2m, \quad G(x,t,z) = izH(x,t), \quad JH(x,t) \geqslant 0, \tag{4}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ E_m & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Представим матрицы в блочном виде

$$W^*(l,t,\bar{z}) = \begin{bmatrix} a(l,t,z) & b(l,t,z) \\ c(l,t,z) & d(l,t,z) \end{bmatrix}, \quad V^{*-1}(0,t,\bar{z}) = \{r_{kl}(t,z)\}_{k,l=1}^{2}, \tag{6}$$

$$W^*(l,t,z)\,JW(l,t,z) = \begin{bmatrix} -\gamma(l,t,z) & \delta(l,t,z) \\ \delta^*(l,t,z) & -\nu(l,t,z) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где все блоки имеют размерность $m \times m$.

Как известно, при $\operatorname{Im} z > 0$ верно неравенство $\nu(l, t, z) \geqslant 0$. Если выполняется строгое неравенство

$$\nu(l,t,z) > 0, \quad \operatorname{Im} z > 0, \tag{8}$$

то имеет смысл дробно-линейное преобразование

$$v(l,t,z) = i\,[a(l,t,z)\,R(z) + b(l,t,z)\,Q(t)]\,[c(l,t,z)\,R(z) + d(l,t,z)\,Q(z)]^{-1}, \tag{9}$$

где $R(z)$, $Q(z)$ — неособенная пара, обладающая J-свойством, т. е. $R^*(z) \times R(z) + Q^*(z)\,Q(z) > 0$, $R^*(z)\,Q(z) + Q^*(z)\,R(z) \geqslant 0$, $\operatorname{Im} z > 0$. Если матричные круги Вейля (9) стягиваются в точку Вейля при $l \to \infty$, то существует предел

$$v(t,z) = \lim v(l,t,z), \quad l \to \infty, \quad \operatorname{Im} z > 0. \tag{10}$$

Эволюцию $v(t, z)$ во времени описывает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $G(x, t, z)$ и $F(x, t, z)$ — непрерывно дифференцируемые в области $0 \leqslant x$, $t < \infty$ матрицы-функции порядка $n \times n$, удовлетворяющие соотношениям* (3)—(5). *Пусть еще выполняются требования:*

1) *начиная с некоторого l_0 верно неравенство $\nu(l, 0, z) > 0$, $l \geqslant l_0$,* $\operatorname{Im} z > 0$;

2) *существует предел $v(z) = v(0, z) = \lim v(l, 0, z)$, $l \to \infty$;*

3) *при любом $t > 0$ выполняется неравенство*

$$\det\{r_{21}(t,z)\,[-iv(z)] + r_{22}(t,z)\} \not\equiv 0; \tag{11}$$

4) *для любого* $t > 0$ *и любой пары* $R(z)$, $Q(z)$, *удовлетворяющей неравенству* $R^*(z)\,Q(z) + Q^*(z)\,R(z) > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$, *существует число* z_0, $\operatorname{Im} z_0 > 0$, *и последовательность* $l_k \to \infty$ *такие, что в некоторой окрестности* z_0 *пары* $R_1(l_k, t, z)$, $Q_1(l_k, t, z)$, *определенные соотношением* $\operatorname{col}[R_1, Q_1] = V^*(l_k, t, \bar{z}) \operatorname{col}[R, Q]$, $\operatorname{Im} z > 0$, *обладают* J-*свойством.*

Тогда в (10) *существует предел* $v(t, z)$ *и верно равенство*

$$v(t, z) = i\{r_{11}(t, z)[-iv(z)] + r_{12}(t, z)\}\{r_{21}(t, z)[-iv(z)] + r_{22}(t, z)\}^{-1}. \quad (12$$

З а м е ч а н и е 1. Матрица $v(t, z)$ допускает представление Неванлинны

$$v(t, z) = \beta(t) z + \alpha(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{u - z} - \frac{u}{1 + u^2}\right) d\tau(u, t).$$

При дополнительных требованиях показано [3], что $\beta(t) = 0$, а $\alpha(t)$ и $\tau(u, t)$ являются спектральными характеристиками системы (1), (4), (5)

З а м е ч а н и е 2. Пусть верно неравенство $\int_0^l JH(x, t)\, dx > 0$

Тогда система (1), (4), (5) положительного типа и справедливо неравенство (8).

З а м е ч а н и е 3. Хотя уравнение (3) нелинейно, соответствующий закон эволюции спектральных данных в силу формул (6) и (11) находится путем решения линейной системы (2) при $x = 0$.

З а м е ч а н и е 4. Если пользоваться скалярным произведением $(Y_1(x), Y_2(x)) = \int_0^\infty Y_2^*(x)\,[JH(x, t)]\,Y_1(x)\,dx$, то $v(t, z)$ является аналогом функции Вейля—Титчмарша, так как справедливо неравенство

$$\int_0^\infty [E_m, iv^*(t, z)]\, W^*(x, t, z)\,[JH(x, t)]\, W(x, t, z) \begin{bmatrix} E_m \\ -iv(t, z) \end{bmatrix} dx < \infty.$$

П р и м е р. Пусть

$$G_1(x, t, z) = \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ u(x) + zE_m & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_1(x, t, z) = \begin{bmatrix} u_x & -2(u - 2zE_m) \\ u_{xx} - 2(u - 2zE_m)(u + zE_m) & -u_x \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение (3) эквивалентно матричному уравнению Кортевега — де Фриза [1—3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_{xxx} - 3\left(\frac{\partial u}{\partial x} u + u \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0. \quad (13$$

Введем еще условие редукции

$$u(x) = u^*(x) \quad (14$$

и положим далее

$$P = \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ u & 0 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 & iE_m \\ -iE & 0 \end{bmatrix}, \quad T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} iE_m & -iE_m \\ E_m & E_m \end{bmatrix}.$$

Определим матрицу $A(x, t)$ так, что $\partial A/\partial x = PA$, $A(0, t) = T_1^*$.

У т в е р ж д е н и е 1. *Если* $W_1(x, t, z)$ — *решение системы* $\partial W_1/\partial x = G_1(x, t, z)\, W_1$, $W_1(0, t, z) = E_n$, то $W(x, t, z) = A^{-1}(x, t)\; W_1(x, t, z)\, T_1^*$ *является решением системы* $\partial W/\partial x = izJH(x, t)\, W$, $W(0, t, z) = E_n$, где $H(x, t) = -iA^{-1}(x, t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E_m & 0 \end{bmatrix} A(x, t)$

$JH(x, t) = A^*(x, t) \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A(x, t) \geqslant 0.$

Введем обозначения

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=0} = u_{k+1}(t), \quad k = 0, 1, 2. \quad (15$$

Утверждение 2. *Пусть решение смешанной задачи* (13), (15) *удовлетворяет условию* (14) и неравенству $\| \partial^k u/\partial x^k \| \leqslant M$; $k = 0, 1, 2$; $0 \leqslant t, x < \infty$. *Тогда в* (10) *существует предел* $v(t, z)$ *и верно равенство* (12).

В частном случае, когда $u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = 0$, коэффициенты дробно-линейного преобразования (12) находятся в явном виде по формуле

$$\{r_{k,l}(t, z)\}_{k,l=1}^2 = T_1 \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 4zE_m \\ 4z^2E_m & 0 \end{bmatrix}\right) T_1^*.$$

1. *Теория* солитонов, метод обратной задачи / Под ред. С. П. Новикова.— М. : Наука, 1980.— 320 с.
2. *Березанский Ю. М.* Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной задачи // Докл. АН СССР.— 1985.— **281**, № 1.— С.16—19.
3. *Сахнович Л. А.* Задачи факторизации и операторные тождества // Успехи мат. наук.— 1986.— **41**, № 1.— С. 3—55.

Одес. электротехн. ин-т связи

Получено 26.05.86