УДК 517.5

С. А. Корж, И. Е. Овчаренко, кандидаты физ.-мат. наук (Харьков. ун-т),
Р. А. Угриновский, мл. науч. сотр. (Ин-т прикл. физики АН России, Нижний Новгород)

РЕКУРСИЯ П. Л. ЧЕБЫШЕВА: НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

We study different algebraic and algorithmic constructions related to both an inner product on the space of polynomials defined on the real axis and the unit circle, and the Chebyshev procedure. The modern variant of the Chebyshev recursion ($(m)-T$-recursion) is applied to check whether Hankel and Toeplitz quadratic forms are positive definite, to determine the number of real (complex conjugate) roots of a polynomial and to localize them, to find bounds on values of a function on a given set. We also consider the relation between $(m)-T$-recursion and the method of moments in the study of Schrödinger operator with the potential of a special class.

Вивчаються різні алгебраїчні та алгоритмічні конструкції, які зв'язані зі скалярним добутком на просторі многочленів, визначених на дійсній осі та одиничному колі, і процедурою П. Л. Чебишева. В зв'язку з різноманітними застосуваннями сучасних варіантів рекурсії П. Л. Чебишева ($(m)-T$-рекурсії) розглядаються питання перевірки на позитивну означеність ганкелевих та тепліцевих квадратичних форм, питання знаходження кількості дійсних (комплексно-спряжених) коренів многочленів та локалізація їх упорядкування, перевірка границь значень функції на заданій множині. Розглянуто також зв'язок $(m)-T$-рекурсії з моментними методами вивчення операторів Шредінгера для спеціальних класів потенціалів.

Введение. В 1859 г. П. Л. Чебышевым была указана рекуррентная процедура построения системы многочленов, ортогональных относительно скалярного произведения $\langle\ ,\ \rangle$ на пространстве $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$ многочленов на $\mathbb{R}^1$ [1]. Рекурсия П. Л. Чебышева по сути осуществляет переход от системы многочленов, удовлетворяющих трехчленным рекуррентным соотношениям, к системе ортогональных многочленов, порожденных некоторым весом на $\mathbb{R}^1$. Основанные на ней и ее некотором развитии алгоритмы находят эффективное применение в вычислительной математике, квантовой физике и химии (см., например, [2, 3] и приведенную в них библиографию).

В настоящей работе рассматриваются различные алгебраические и алгоритмические конструкции, связанные со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$ на пространстве $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$ многочленов одного переменного и процедурой П. Л. Чебышева, а также скалярные произведения на пространстве $\{\mathcal{P}_C\}$ тригонометрических многочленов и соответствующие модификации процедуры П. Л. Чебышева.

В качестве поля действия современных вариантов рекурсии П. Л. Чебышева ($(m)-T$-рекурсии) рассматриваются вопросы проверки на положительную определенность ганкелевых и теплицевых квадратичных форм различной природы. Это, в свою очередь, приводит к рекуррентным процедурам проверки границ значений функции на заданном множестве. Рассматриваются приложения к методу симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений (изложению этого метода посвящена классическая монография [4]). В качестве применений рекурсии П. Л. Чебышева к другому кругу вопросов рассмотрены моментные методы в изучении операторов Шредингера со специальными классами потенциалов.

Частично результаты данной работы изложены в [5–7] и анонсированы в [8].

1. Скалярные произведения на пространстве многочленов. 1.1. ***Ортогональные системы многочленов.*** Пусть $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$ — линейное пространство многочленов на $\mathbb{R}^1$, $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение на $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$, вещественное на вещественных многочленах и имеющее свойство

$$\langle P, Q\rangle = \langle P\overline{Q}, 1\rangle. \tag{A}$$

Скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$ не обязательно дефинитное. Все рассматриваемые нами скалярные произведения $\langle\,,\,\rangle$ имеют свойство (A), что далее специально не оговаривается. Предполагается невырожденность скалярного произведения $\langle\,,\,\rangle$, т. е. все определители Ганкеля – Адамара

$$H_{\langle\,,\,\rangle}(n)=\begin{vmatrix}\langle 1,1\rangle & \langle\lambda,1\rangle \ldots \langle\lambda^n,1\rangle\\ \langle 1,\lambda\rangle & \langle\lambda,\lambda\rangle \ldots \langle\lambda^n,\lambda\rangle\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \langle 1,\lambda^n\rangle & \langle\lambda,\lambda^n\rangle \ldots \langle\lambda^n,\lambda^n\rangle\end{vmatrix}\neq 0. \tag{1}$$

Вводя стандартные обозначения $s_k=\langle\lambda^k,1\rangle$, определители Ганкеля – Адамара $H_{\langle\,,\,\rangle}(n)$ можем записать в виде

$$H_{\langle\,,\,\rangle}(n)=\det\|s_{i+j}\|_{i,j=0}^{n}.$$

Для рассматриваемых скалярных произведений существует $\langle\,,\,\rangle$-ортогональная система многочленов, т. е. такая система многочленов[1] $\{P_N(\lambda)\}$, что

1) $\deg P_N(\lambda)=n$;

2) коэффициент при старшей степени λ положителен;

3) $\langle P_N(\lambda),P_M(\lambda)\rangle=0,\ N\neq M$.

Выделяются две системы $\langle\,,\,\rangle$-ортогональных многочленов:

a) моническая — коэффициенты при старшей степени λ равны единице,

$$P_N(\lambda)=\frac{1}{H_{n-1}}\begin{vmatrix}\langle 1,1\rangle & \langle\lambda,1\rangle & \ldots & \langle\lambda^n,1\rangle\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \langle 1,\lambda^{n-1}\rangle & \langle\lambda,\lambda^{n-1}\rangle & \ldots & \langle\lambda^n,\lambda^{n-1}\rangle\\ 1 & \lambda & \ldots & \lambda^n\end{vmatrix}; \tag{2}$$

b) в случае дефинитного скалярного произведения особый интерес представляет ортонормальная система, выделенная условием $\langle P_N(\lambda),P_M(\lambda)\rangle=\delta_{NM}$,

$$P_N(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{H_nH_{n-1}}}\begin{vmatrix}\langle 1,1\rangle & \langle\lambda,1\rangle & \ldots & \langle\lambda^n,1\rangle\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \langle 1,\lambda^{n-1}\rangle & \langle\lambda,\lambda^{n-1}\rangle & \ldots & \langle\lambda^n,\lambda^{n-1}\rangle\\ 1 & 1 & \ldots & \lambda^n\end{vmatrix}. \tag{3}$$

Равенства (2), (3) — ключевые в теории ортогональных многочленов. Однако непосредственные вычисления ортогональных многочленов по этим формулам сопряжены с принципиальными трудностями из-за их „детерминантного характера".

Из чисто алгебраических соображений ясно, что для монической системы $\langle\,,\,\rangle$-ортогональных многочленов выполняется трхчленное рекуррентное соотношение

$$P_{K+1}(\lambda)=(\lambda-a_k)P_K(\lambda)-b_kP_{K-1}(\lambda),\quad P_{-1}(\lambda)\equiv 0,\quad P_0(\lambda)\equiv 1. \tag{4}$$

Заметим, что хотя b_0 фактически не содержится в рекурсии (4), целесообразно положить $b_0=\langle 1,1\rangle$.

[1] Номер ортогонального многочлена (нижний индекс) будем отмечать большой буквой (единицы гипергруппы).

Умножая скалярно (4) последовательно на $P_K(\lambda)$, $P_{K-1}(\lambda)$, получаем

$$a_k = \frac{\langle \lambda P_K(\lambda), P_K(\lambda)\rangle}{\langle P_K(\lambda), P_K(\lambda)\rangle}, \quad b_k = \frac{\langle P_K(\lambda), P_K(\lambda)\rangle}{\langle P_{K-1}(\lambda), P_{K-1}(\lambda)\rangle}. \tag{5}$$

Из второго соотношения (5) следует

$$\langle P_K(\lambda), P_K(\lambda)\rangle = b_0 b_1 \ldots b_k \tag{6}$$

и

$$H_{\langle,\rangle}(n) = b_0^{n+1} b_1^n \ldots b_{n-1}^2 b_n^1. \tag{7}$$

Дефинитные скалярные произведения выделяются следующим образом.

Теорема 1 (Ж. Фавар). *Для того чтобы скалярное произведение* $\langle\ ,\ \rangle$ *на пространстве многочленов имело свойство дефинитности* $\forall\, P \in \{\mathcal{P}_{R^1}\}$ $\langle P, P\rangle \geq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+$ $b_k \geq 0$.

Необходимость непосредственно следует из соотношения (5). Разлагая произвольный многочлен $P(\lambda)$ по $\langle\ ,\ \rangle$-ортогональной системе $\{P_K(\lambda)\}$

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k P_K(\lambda),$$

получаем

$$\langle P(\lambda), P(\lambda)\rangle = \sum_{k=0}^{n} |\xi_k|^2 \prod_{l=0}^{k} b_l,$$

откуда следует достаточность теоремы Ж. Фавара.

С системой многочленов $\{P_K(\lambda)\}$ тесным образом связана матрица Хаара — „таблица умножения" $\| c_{jk}^r \|$, получающаяся из равенства

$$P_J(\lambda) P_K(\lambda) = \sum_{r=|j-k|}^{j+k} c_{jk}^r P_R(\lambda). \tag{8}$$

Ясно, что

$$c_{jk}^r = \langle P_J(\lambda) P_K(\lambda) P_R(\lambda), 1\rangle, \tag{9}$$

откуда $c_{jk}^r = c_{kr}^j = c_{rj}^k$. Отметим также равенство

$$c_{jk}^r = \| P_R(J) \|_{jk}, \tag{10}$$

где J — матрица Якоби нормированной системы.

1.2. ***Матрицы Чебышева; (m)–T-рекурсия; связь между системами ортогональных многочленов, отвечающих различным скалярным произведениям.*** Пусть $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение на $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$, $\{\hat{P}_K(\lambda)\}$ — моническая система $\langle\ ,\ \rangle$-ортогональных многочленов. Система $\{\hat{P}_K(\lambda)\}$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$\hat{P}_{K+1}(\lambda) = (\lambda - \hat{a}_k)\hat{P}_K(\lambda) - \hat{b}_k \hat{P}_{K-1}(\lambda), \quad \hat{P}_{-1}(\lambda) \equiv 0, \quad \hat{P}_0(\lambda) \equiv 1. \tag{11}$$

Коэффициенты $\{\hat{a}_k; \hat{b}_k\}$ не предполагаются известными.

Наряду с системой $\{\hat{P}_K(\lambda)\}$ рассмотрим моническую систему многочленов $\{P_K(\lambda)\}$, удовлетворяющую трехчленным рекуррентным соотношениям (4).

Коэффициенты $\{a_k; b_k\}$ и $\{\hat{a}_k; \hat{b}_k\}$ и элементы матрицы „смешанных" моментов $\sigma_{kl} = \langle \hat{P}_K, P_L\rangle$ связаны соотношениями, восходящими к П. Л. Чебышеву (1859 г.). В изложении процедуры П. Л. Чебышева будем в основном следовать работе [3].

Определение. *Матрицей Чебышева* $T_{\hat{P}P}$ *систем* $\{\hat{P}, P\}$ *будем называть матрицу „смешанных" моментов*

$$\| T_{\hat{P}P} \|_{kl} = \sigma_{kl} := \langle \hat{P}_K, P_L \rangle. \tag{12}$$

При $k > l$ $\sigma_{kl} = 0$, т. е. матрица Чебышева треугольная. В частности, $\sigma_{k+1,\,k-1} = 0$ и $\sigma_{k+1,\,k} = 0$. Переходя к выражению (12), получаем

$$0 = \left\langle \hat{P}_{K+1}, P_{K-1} \right\rangle = \left\langle (\lambda - \hat{a}_k)\hat{P}_K - \hat{b}_k\hat{P}_{K-1}, P_{K-1} \right\rangle = \left\langle \lambda\hat{P}_K, P_{K-1} \right\rangle -$$
$$- \hat{b}_k\sigma_{k-1,k-1} = \left\langle \hat{P}_K, \lambda P_{K-1} \right\rangle - \hat{b}_k\sigma_{k-1,k-1} = \left\langle \hat{P}_K, P_K \right\rangle +$$
$$+ a_{k-1}\left\langle \hat{P}_K, P_{K-1} \right\rangle - b_{k-1}\left\langle \hat{P}_K, P_{K-2} \right\rangle - \hat{b}_k\sigma_{k-1,k-1} =$$
$$= \sigma_{k,k} - \hat{b}_k\sigma_{k-1,k-1}.$$

Таким образом,

$$\hat{b}_k = \sigma_{k,k} / \sigma_{k-1,\,k-1}. \tag{13}$$

Далее

$$0 = \sigma_{k+1,\,k} = \left\langle \hat{P}_{K+1}, P_K \right\rangle = \left\langle (\lambda - \hat{a}_k)\hat{P}_K - \hat{b}_k\hat{P}_{K-1}, P_K \right\rangle =$$
$$= \left\langle \hat{P}_K, \lambda P_K \right\rangle - \hat{a}_k\sigma_{k,k} - \hat{b}_k\sigma_{k-1,k} = \left\langle \hat{P}_K, P_{K+1} + a_kP_K + b_kP_{K-1} \right\rangle -$$
$$- \hat{a}_k\sigma_{k,k} - \hat{b}_k\sigma_{k-1,k} = \sigma_{k,k+1} + a_k\sigma_{k,k} - \hat{a}_k\sigma_{k,k} - \hat{b}_k\sigma_{k-1,k},$$

откуда получаем

$$\hat{a}_k = a_k + \sigma_{k,\,k+1} / \sigma_{k,\,k} - \sigma_{k-1,\,k} / \sigma_{k-1,\,k-1}. \tag{14}$$

Из равенств (13), (14) видно, что для определения при каждом фиксированном k величин $\hat{a}_k$ и $\hat{b}_k$, кроме известных параметров a_k и b_k достаточно знать два элемента $(k-1)$- и k-й строк матрицы Чебышева. При задании скалярного произведения $\langle\ ,\ \rangle$ и при соответствующих начальных данных (см. ниже) можно последовательно восстановить все строки матрицы $T_{\hat{P}P}$, а равенства (13), (14) определяют коэффициенты $\hat{a}_k$ и $\hat{b}_k$, что приводит к устойчивому алгоритму построения системы $\{\hat{P}_K(\lambda)\}$. При таком способе построения $\sigma_{k,l}$ принципиальной сложностью может оказаться именно вычисление $\langle \hat{P}_K, P_L \rangle$. Однако для вычисления величин $\sigma_{k,l}$ — элементов матрицы Чебышева $T_{\hat{P}P}$ — можно применить рекуррентный процесс. Именно, на основании свойства (А) скалярного произведения $\langle\ ,\ \rangle$ получаем

$$\sigma_{k,l} = \left\langle \hat{P}_K, P_L \right\rangle = \left\langle (\lambda - \hat{a}_{k-1})\hat{P}_{K-1} - \hat{b}_{k-1}\hat{P}_{K-2}, P_K \right\rangle = \left\langle \lambda\hat{P}_{K-1}, P_L \right\rangle -$$
$$- \hat{a}_{k-1}\left\langle \hat{P}_{K-1}, P_L \right\rangle - \hat{b}_{k-1}\left\langle \hat{P}_{K-2}, P_L \right\rangle = \left\langle \hat{P}_{K-1}, P_{L+1} + a_lP_L + b_lP_{L-1} \right\rangle -$$
$$- \hat{a}_{k-1}\left\langle \hat{P}_{K-1}, P_L \right\rangle - \hat{b}_{k-1}\left\langle \hat{P}_{K-2}, P_L \right\rangle = \sigma_{k-1,l+1} + a_l\sigma_{k-1,l} +$$
$$+ b_l\sigma_{k-1,l-1} - \hat{a}_{k-1}\sigma_{k-1,l} - \hat{b}_{k-1}\sigma_{k-2,l}.$$

Таким образом,

$$\sigma_{k,\,l} = \sigma_{k-1,\,l+1} + a_l\sigma_{k-1,\,l} + b_l\sigma_{k-1,\,l-1} - \hat{a}_{k-1}\sigma_{k-1,l} - \hat{b}_{k-1}\sigma_{k-2,l}.$$

Соотношения

$$\sigma_{k,l} = \sigma_{k-1,l+1} - (\hat{a}_{k-1} - a_l)\sigma_{k-1,l} - \hat{b}_{k-1}\sigma_{k-2,l} + b_l\sigma_{k-1,l-1},$$
$$\hat{a}_k = a_k + \sigma_{k,k+1}/\sigma_{k,k} - \sigma_{k-1,k}/\sigma_{k-1,k-1}, \quad \hat{b}_k = \sigma_{k,k}/\sigma_{k-1,k-1} \tag{15}$$

вместе с начальными условиями

$$\sigma_{-1,l} = 0, \ \sigma_{0,l} = \langle \hat{P}_0, P_l \rangle, \quad \hat{a}_0 = a_0 + \sigma_{01}/\sigma_{00}, \ \hat{b}_0 = \sigma_{00}$$

задают рекуррентный процесс — $(m) - T$-рекурсию, позволяя организовать цикл вычислений по параметрам k и l, в котором последовательно определяются $\sigma_{k,l}$ по рекуррентному соотношению (15) и затем $\hat{a}_k$ и $\hat{b}_k$ согласно равенствам (13) и (14) соответственно.

Таким образом, задаваясь коэффициентами $\{a_k; b_k\}$ и имея тем самым устойчивую конструкцию для построения системы $\{P_K\}$, зная первые $2n$ величин $\langle 1, P_L \rangle$, $l = 0, 1, \ldots, 2n-1$, — так называемых модифицированных моментов, — процессом $(m) - T$-рекурсии можно найти первые n коэффициентов $\hat{a}_k$ и $\hat{b}_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Из соотношений (13), (6) и (7) видно, что

$$\sigma_{k,k} = \langle \hat{P}_K(\lambda), P_K(\lambda) \rangle \tag{16}$$

и

$$H_{\langle\,,\,\rangle}(k) = \prod_{l=0}^{k} \sigma_{l,l}. \tag{17}$$

Формульно связь между монической системой многочленов, удовлетворяющих рекуррентным соотношениям (4), и монической системой многочленов, отвечающей скалярному произведению $\langle\,,\,\rangle$, определяется следующим утверждением.

Теорема 2. *Пусть* $P = [P_0(\lambda), P_1(\lambda), \ldots, P_N(\lambda), \ldots]^\tau$ *и* $\hat{P} = [\hat{P}_0(\lambda), \hat{P}_1(\lambda), \ldots, \hat{P}_N(\lambda), \ldots]^\tau$ — *векторы, составленные из многочленов, удовлетворяющих рекуррентным соотношениям* (4) *и* (11); $T_{\hat{P}P}$ — *матрица Чебышева. Тогда* $P = T^\tau_{\hat{P}P} \,\|\, \mathrm{diag}\,(\sigma_{kk}^{-1}) \,\|\, \hat{P}$.

1.3. ***Алгебраическое задание скалярного произведения.*** В различных вопросах возникает необходимость перехода от одного скалярного произведения в пространстве многочленов к другому. В этом и ряде других случаев полезно алгебраическое задание скалярного произведения на $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$.

Пусть $\langle\,,\,\rangle_j$ — скалярное произведение на пространстве $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$:

$$P_J(\lambda) = \sum_{l=0} \gamma_{l,j}\lambda^l \tag{18}$$

— ортонормальная система многочленов, порождаемая скалярным произведением $\langle\,,\,\rangle$. Любая последовательность $\{\alpha\} = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ вещественных чисел определяет на $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$ новое скалярное произведение $\langle\,,\,\rangle_\alpha$ (имеющее свойство $\langle P, Q \rangle_\alpha = \langle P\overline{Q}, 1 \rangle_\alpha$). Именно, определим

$$\langle P, Q \rangle_\alpha = \sum_{j=0}^{m+n} \gamma_j \alpha_j, \tag{19}$$

где $m = \deg P$, $n = \deg Q$, γ_j взяты из разложения

$$P\,\overline{Q} = \sum_{j=0}^{m+n} \gamma_j P_j. \tag{20}$$

Заметим, что

$$\langle P_R, 1\rangle_\alpha = \alpha_r. \tag{21}$$

Из последнего соотношения следует, что если зафиксировать какое-либо скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$ на $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$ и $\langle\ ,\ \rangle$-ортогональную систему многочленов, то любое скалярное произведение на $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$ однозначно задается в виде $\langle\ ,\ \rangle_\alpha$.

Аналогично исходное скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$ алгебраически выражается через $\langle\ ,\ \rangle$-ортогональную систему равенством

$$\overset{(-1)}{\alpha_r} = \left\langle \hat{P}_R, 1\right\rangle. \tag{22}$$

Нам представляется принципиально важным наличие свойства локальности: для нахождения n первых членов последовательности $\{\hat{\alpha}_k\}$ достаточно знать n первых членов последовательности $\{\alpha_k\}$. Свойство локальности следует из (22) и теоремы 2.

С переходом $\langle\ ,\ \rangle \to \langle\ ,\ \rangle_\alpha$ связывается ядро

$$K_\alpha(j, k) = \langle P_J, P_K\rangle_\alpha. \tag{23}$$

Через матрицу Хаара $\| c^r_{j,k} \|$ системы $\{P_J\}$ и последовательность $\{\alpha_r\}$ ядро $K_\alpha(j, k)$ выражается равенством

$$K_\alpha(j, k) = \sum_{r=|j-k|}^{j+k} c^r_{j,k}\,\alpha_r. \tag{24}$$

Если J — матрица Якоби системы $\{P_J(\lambda)\}$, то ввиду (10) справедливо равенство

$$K_\alpha(j, k) = \Big\| \sum_{r=|j-k|}^{j+k} \alpha_r P_R(J) \Big\|_{j,k}. \tag{25}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны*:

а) *скалярное произведение* $\langle\ ,\ \rangle_\alpha$ *таково, что* $\forall P \in \{\mathcal{P}_{R^1}\}: \langle P, P\rangle_\alpha \ge 0$;

б) *ядро* $K_\alpha(j, k)$ *— положительно определенное*;

в) *последовательность*

$$s_\alpha(n) = \langle\lambda^n, 1\rangle_\alpha \tag{26}$$

такова, что ядро $s_\alpha(j + k)$ *— положительно определенное*;

г) $\{\alpha_j\}$ *— позитивная модифицированная моментная последовательность относительно системы* $\{P_J(\lambda)\}$, *т. е. существует* $\mu\,(d\lambda) \ge 0$, *имеющая все моменты, такая, что*

$$\alpha_j = \int_{-\infty}^{\infty} P_J(\lambda)\mu_\alpha(d\lambda); \tag{27}$$

д) *форма* $\alpha(J)$, *определенная на плотном в* $H_{\langle\,,\,\rangle}$ *множестве многочленов*

$$\alpha(J)(P, Q) = \langle P, Q\rangle_\alpha, \tag{28}$$

положительная. Гильбертово пространство $H_{\langle\,,\,\rangle}$ — *замыкание множества многочленов по норме* $\sqrt{\langle P, P\rangle}$.

Заметим, что

$$\alpha(J)(P_J, P_K) = K_\alpha(j, k). \tag{29}$$

Если $\alpha(\lambda)$ — многочлен, то $\alpha(J)$ — оператор на $H_{\langle\,,\,\rangle}$, действующий с плотного множества $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$ $\alpha(J)$: $P(\lambda) \to \alpha(\lambda)P(\lambda)$.

Теорема 4. *Пусть* $\langle\,,\,\rangle_\alpha$ — *скалярное произведение на* $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$, *определенное* $\{P_N; \alpha\}$-*заданием, и* $\langle P, P\rangle_\alpha \geq 0$. *Совокупность* Σ_α *мер* $\mu_\alpha(d\lambda) \geq 0$, *задающих представление*

$$\alpha_j = \int_{-\infty}^{\infty} P_J(\lambda)\mu_\alpha(d\lambda),$$

совпадает с совокупностью мер Σ_{s_α}, *задающих представление последовательности* $s_\alpha(n) = \langle\lambda^n, 1\rangle_\alpha$ *в виде*

$$s_\alpha(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \mu_\alpha(d\lambda), \quad \mu_\alpha(d\lambda) \geq 0. \tag{30}$$

Последовательность $s_\alpha(n)$ можно определить из треугольной системы

$$\sum_{l=0}^{j} \gamma_{l,j} s_\alpha(l) = \alpha_j, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{31}$$

С последовательностью $\{\alpha_j\}$ при фиксированной последовательности $\{P(\lambda)\}$ можно формально связать функцию

$$\alpha(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j P_J(\lambda). \tag{32}$$

Если $\rho(d\lambda)$ — мера, имеющая все моменты, то выражению $\int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\alpha(\lambda)\rho(d\lambda)$, где $P(\lambda)$ — многочлен, можно придать точный смысл: именно, будем полагать

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda)\alpha(\lambda)\rho(d\lambda) = \sum_{j=0}^{\deg P} \gamma_j \alpha_j, \tag{33}$$

γ_j — коэффициенты разложения $P(\lambda)$ по $\{P_N(\lambda)\}$.

Теорема 5. *Пусть на* $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$ *рассматриваются два скалярных произведения:* $\langle\,,\,\rangle_2$ *с ортонормальной системой* $\{P_N(\lambda)\}$ *и* $\langle\,,\,\rangle_1$ *и*

$$\alpha_j = \langle P_J, 1\rangle_1 \tag{34}$$

— *вектор модифицированных моментов. Тогда*

$$\langle P, Q\rangle_1 = \langle P, Q\rangle_{2,\alpha}. \tag{35}$$

Если $\langle\,,\,\rangle_2 = \langle\,,\,\rangle_{\rho(d\lambda)}$, *то*

$$\langle\,,\,\rangle_1 = \langle\,,\,\rangle_{\alpha(\lambda)\rho(d\lambda)}. \tag{36}$$

2. Скалярные произведения на пространстве тригонометрических многочленов $\{\mathcal{P}_C\}$. В данном пункте рассматриваются многочлены от одной независимой переменной $z(|z|=1)$, определенные рекуррентными формулами

$$u_{N+1} = a_{n+1} z u_N + b_{n+1} v_N, \quad v_{N+1} = \overline{b}_{n+1} z u_N + a_{n+1} v_N, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и начальными условиями $u_0(z) = 1$, $v_0(z) = 1$. Предполагая $a_n = \overline{a}_n$, $a_n^2 - |b_n|^2 \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, покажем, что для определенных таким образом многочленов $\{u_N(z)\}$ справедливы положения, аналогичные степенному случаю.

Пусть $\{\mathcal{P}_C\}$ — пространство многочленов с комплексными коэффициентами, определенных на единичной окружности $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$ (так называемых тригонометрических многочленов); $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение на $\{\mathcal{P}_C\}$, имеющее свойство (A). Предполагается, что определители Теплица

$$\Delta_n = \det \begin{Vmatrix} \langle 1, 1\rangle & \langle z, 1\rangle & \ldots & \langle z^n, 1\rangle \\ \overline{\langle z, 1\rangle} & \langle 1, 1\rangle & \ldots & \langle z^{n-1}, 1\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{\langle z^n, 1\rangle} & \overline{\langle z^{n-1}, 1\rangle} & \ldots & \langle 1, 1\rangle \end{Vmatrix} \neq 0, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Как известно (см., например, [9]), в этом случае существует $\langle\ ,\ \rangle$-ортогональная система многочленов $\{P_N(z)\}$ такая, что

1) $\deg P_N(z) = n$;
2) коэффициент при старшей степени z положителен;
3) $\langle P_N(z), P_M(z)\rangle = 0$ при $N \neq M$.

Как и в степенном случае, будем рассматривать две системы $\langle\ ,\ \rangle$-ортогональных многочленов: моническую и нормированную. В монической системе коэффициент при старшей степени z у всех $P_K(z)$ равен единице; в терминах определителей $P_N(z)$ представляется в виде

$$P_N(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \det \begin{Vmatrix} \langle 1, 1\rangle & \langle z, 1\rangle & \ldots & \langle z, 1\rangle \\ \overline{\langle z, 1\rangle} & \langle 1, 1\rangle & \ldots & \langle z^{n-1}, 1\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{\langle z^{n-1}, 1\rangle} & \overline{\langle z^{n-2}, 1\rangle} & \ldots & \langle z, 1\rangle \\ 1 & z & & z^n \end{Vmatrix}.$$

Для нормированной системы N-й многочлен $\tilde{P}_N(z)$ отличается от $P_N(z)$ множителем $\sqrt{\Delta_n/\Delta_{n-1}}$.

Как и в степенном случае, многочлены $\{P_N(z)\}$ и $\{\tilde{P}_N(z)\}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям для ортогональных мнгочленов

$$P_{K+1}(z) = zP_K(z) + b_{k+1} P_K^*(z), \tag{37}$$

$$\tilde{P}_{K+1}(z) = \tilde{a}_{k+1} z \tilde{P}_K(z) + \tilde{b}_{k+1} \tilde{P}_K^*(z), \tag{38}$$

где $\tilde{R}^*(z) \overset{\text{def}}{=} z^k \overline{R}(1/z)$ для любого многочлена $R(z)$ степени k; b_k, $\tilde{a}_k$ и $\tilde{b}_0$ — константы, для которых несложно получить формальные аналитические выражения (в терминах определителей). Заметим, что b_0 не содержится в рекурсии (37); однако для дальнейшего удобно принять b_0 таким, чтобы $b_0^2 = 1 - \langle 1, 1 \rangle$.

Из рекуррентных соотношений (37), (38) непосредственно следуют соответствующие трехчленные формулы:

$$b_{k+1} P_{K+2}(z) = (z b_{k+1} + b_{k+2}) P_{K+1}(z) - b_{k+2}(1 - |b_{k+1}|^2) z P_K(z) \tag{39}$$

и

$$\tilde{b}_{k+1} \tilde{P}_{K+2}(z) = \left(z \tilde{b}_{k+1} \tilde{a}_{k+2} + \tilde{a}_{k+1} \tilde{b}_{k+2}\right) \tilde{P}_{K+1}(z) - \\ - \tilde{b}_{k+2}\left(\tilde{a}_{k+1}^2 - |\tilde{b}_{k+1}|^2\right) z \tilde{P}_K(z). \tag{40}$$

Обозначим $h_k \overset{\text{def}}{=} \langle P_K(z), P_K(z) \rangle$, $k = 0, 1, \dots$. Тогда непосредственно проверяется (см., например, [9]), что

$$h_k = \Delta_k / \Delta_{k-1}, \quad h_k = h_{k-1}(1 - |b_k|^2). \tag{41}$$

Поэтому аналогично степенному случаю

$$\langle P_K(z), P_K(z) \rangle = (1 - |b_0|^2)(1 - |b_1|^2) \dots (1 - |b_k|^2) \tag{42}$$

и

$$\Delta_k = (1 - |b_0|^2)^k (1 - |b_1|^2)^{k-1} \dots (1 - |b_k|^2). \tag{43}$$

Соотношение (42) позволяет в случае необходимости провести нормирование на „ортонормальность".

Справедлив следующий „тригонометрический" аналог теоремы Ж. Фавара.

Теорема 6. *Для того чтобы скалярное произведение* $\langle\ ,\ \rangle$ *на пространстве многочленов* $\{\mathcal{P}_C\}$ *имело свойство дефинитности* $\forall P \in \{\mathcal{P}_C\}$ $\langle P, P \rangle \geq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$|b_k| < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{44}$$

Опуская подробное доказательство, приведем тригонометрические модификации $(m) - T$-рекурсии.

Пусть $\{P_N(z)\}$ — моническая система многочленов, удовлетворяющих соотношениям (39), и пусть $\{\pi_N(z)\}$ — моническая система $\langle\ ,\ \rangle$-ортогональных многочленов с рекуррентными соотношениями

$$\beta_{k+1} \pi_{K+2}(z) = (z \beta_{k+1} + \beta_{k+2}) \pi_{K+2}(z) - \beta_{k+2}(1 - |b_{k+1}|^2) z \pi_K(z). \tag{45}$$

Предполагается, что коэффициенты $\{\beta_k\}$ неизвестные.

Определение. *Матрицей Чебышева* $T_{\pi P}$ *называется матрица с элементами* $\| T_{\pi P} \|_{kl} = \sigma_{k,l} := \langle \pi_k P_L \rangle$.

Заметим, что при $k > l$ $\sigma_{k,l} = 0$, т. е. матрица Чебышева треугольная.

Элементы матрицы Чебышева $T_{\pi P}$ и коэффициенты трехчленных рекуррентных соотношений (39) и (45) связаны равенствами, которые можно рассматривать как рекуррентный процесс для определения элементов матрицы Чебышева и неизвестных β. Записывая в виде рекурсии, имеем:

начальные условия $\sigma_{-1,l} = 0$, $\sigma_{0,l} = \langle 1, P_L \rangle$, $l = 1, 2, \dots, N$, $\beta_0 = 1$; при

$k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\beta_k = \frac{1}{\beta_{k-1}}\left[-\frac{\sigma_{k-1,k}}{\sigma_{k-1,k-1}} + \frac{\overline{b_k}}{\overline{b_{k-1}}} + (1-|\beta_{k-1}|^2)\frac{\sigma_{k-2,k-1}}{\sigma_{k-1,k-1}} - \right.$$
$$\left. - (1-|\beta_{k-1}|^2)\frac{\overline{b_k}}{\overline{b_{k-1}}}(1-|b_{k-1}|^2)\frac{\sigma_{k-2,k-2}}{\sigma_{k-1,k-1}}\right],$$

$$\sigma_{k,l} = \begin{cases} 0 & \text{при } l = 0, 1, \ldots, k-1, \\ \frac{\overline{b_l}}{\overline{b_{l-1}}}\sigma_{k,l-1} + \frac{\beta_k}{\beta_{k-1}}\sigma_{k-1,l} - \frac{\beta_k}{\beta_{k-1}}\frac{\overline{b_l}}{\overline{b_{l-1}}}\sigma_{k-1,l-1} - & \\ - \sigma_{k-1,l-1} - \frac{\overline{b_l}}{\overline{b_{l-1}}}(1-|b_{l-1}|^2)\sigma_{k-1,l-2} - & \\ - \frac{\beta_k}{\beta_{k-1}}(1-|\beta_{k-1}|^2)\sigma_{k-2,l-1} + & \\ + \frac{\beta_k}{\beta_{k-1}}(1-|\beta_{k-1}|)\frac{\overline{b_l}}{\overline{b_{l-1}}}(1-|b_{l-1}|^2)\sigma_{k-2,l-2} & \text{при } l = k, k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

В случае $P_K(z) = z^k\,(b_k = 0,\ \ k = 0, 1, \ldots)$ соотношения $(m) - T$-рекурсии переходят в соотношения, составляющие основу известного алгоритма Н. Левинсона [10]:

шаг 1: $\pi_0(z) = 1, \quad \sigma_{00} = \langle 1, 1\rangle,$

$$\text{шаг 2: при } k = 1, 2, \ldots, n \quad \beta_k = -\frac{1}{\sigma_{k-1,k-1}}\langle z\pi_{K-1}(z), 1\rangle, \tag{46}$$

$$\sigma_{k,k} = (1-|\beta_k|^2)\,\sigma_{k-1,\,k-1}; \quad \pi_K(z) = z\pi_{K-1}(z) + \beta_k\pi^*_{K-1}(z).$$

Очевидно, как и в степенном случае (переход $\{\lambda^l\} \to \{P_L(\lambda)\}$), соотношения (46) можно рассматривать как эффективную процедуру перехода $\{z^l\} \to \to \{\pi_L(z)\}$ $(|z| = 1)$.

Теорема 7. *Пусть* $P = [P_0(z), P_1(z), \ldots, P_N(z), \ldots]^\tau$ *и* $\pi = [\pi_0(z), \pi_1(z), \ldots \ldots, \pi_N(z), \ldots]^\tau$ — *векторы, составленные из многочленов, удовлетворяющих рекуррентным соотношениям* (39) *и* (45) *соответственно*; $T_{\pi,P}$ — *матрица Чебышева. Тогда* $P = T^\tau_{\pi,P}\,\|\mathrm{diag}(\sigma^{-1}_{kk})\|\,\pi$.

Вопросы, связанные с алгебраическим заданием скалярного произведения на пространстве тригонометрических многочленов $\{\mathcal{P}_C\}$, не будем рассматривать ввиду полной аналогии со степенным случаем.

3. Проверка положительной определенности ганкелевых и теплицевых форм. Помимо теоретического интереса, вопросы о проверке положительной определенности ганкелевых и теплицевых квадратичных форм имеют также прикладное значение в связи с задачами обработки сигналов (см., например, [7, 11]), а также прецезионным определением параметров некоторых квантово-механических систем [12 — 15] (см. также п. 5).

Пусть $\|s_{j+k}\|^k_{j,l=0}$ — ганкелева ($\|c_{j-k}\|^\infty_{j,k=0}$ — теплицева) матрица квадратичной формы. Теоретически вопрос о ее положительной определенности решается определением знаков в последовательности определителей $H_k = \det\|s_{j+l}\|^k_{j,l=0}$ $(\Delta_k = \det\|c_{j-l}\|^k_{j,l=0})$. Однако в силу изложенных выше причин, особенно в случае зависимости коэффициентов от некоторого параметра, подлежащего определению, вычисление и даже определение знака $H_k(\Delta_k)$ становится затруднительным (см. указанные выше работы).

С другой стороны, теорема Ж. Фавара позволяет определить степень дефинитности скалярного произведения $\langle\, ,\rangle_s$ ($\langle\, ,\rangle_C$), порождаемого исходной последовательностью $\{s_p\}$ ($\{c_p\}$) на пространстве многочленов $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$ ($\{\mathcal{P}_C\}$). Тем самым решается вопрос о положительной определенности соответствующих квадратичных форм.

В самом деле, достаточно заметить, что

$$\langle P_M, P_M\rangle = \prod_{k=0}^{m} \hat{b}_k \quad \left(\langle P_M, P_M\rangle = \prod_{k=0}^{m} (1 - |\,\hat{\beta}_k\,|^2)\right),$$

где $\hat{b}_0$ по определению равно s_0 (c_0); остальные $\hat{b}_k$ получаются в процессе $(m)-T$-рекурсии с $a_k = b_k = 0$ (алгоритм Н. Левинсона для тригонометрического случая) и начальными данными $\sigma_{0,\,l} = s_l$ $(\sigma_{0,\,l} = c_l)$.

С проверкой на положительную определенность квадратичных форм тесно связан вопрос о возможности специальных интегральных представлений последовательностей с люком в спектре представляющей меры. Ниже рассматривается случай одного люка в спектре представляющей меры. По сути он является исчерпывающим.

а) Случай Стильтьеса.

Как известно [9], вопрос о возможности интегрального представления последовательности $\{s_k\}$ с носителем на правой полуоси эквивалентен положительной определенности двух квадратичных форм типа ганкелевых с матрицами $S = \|\, s_{j+k}\,\|_{j,k=0}^{\infty}$ и $S^{(1)} = \|\, s_{j+k+1}\,\|_{j,k=0}^{\infty}$. В терминах $(m)-T$-рекурсии вопрос о „стильтьесовости" последовательности $\{s_k\}$ решает следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть* $\{\hat{b}_k\}$ *и* $\{\hat{b}_k^{(1)}\}$ — *параметры, полученные двумя* $(m)-T$*-рекурсиями, описанными выше, с начальными условиями* $\sigma_{0,\,l} = s_l$ *и* $\sigma_{0,\,l} = s_{l+1}$ *соответственно. Тогда для того чтобы последовательность была стильтьесовской, необходимо и достаточно, чтобы все* $\hat{b}_k$ *и* $\hat{b}_k^{(1)}$ *были положительными.*

б) Случай конечного люка (a, b).

Теорема 9. *Для того чтобы последовательность* $\{s_k\}$ *допускала интегральное представление с люком* (a, b), $-\infty < a < b < \infty$, *необходимо и достаточно положительности всех коэффициентов* $\hat{b}_k$ *и* $\hat{b}_k^{(1)}$, *получаемых приведенными выше* $(m)-T$*-рекурсиями с начальными данными* $\sigma_{0,\,l} = s_l$ *и* $\sigma_{0,\,l} = s_{l+2} - (a + b)s_{l+1} + abs_l$.

в) Тригонометрический случай.

Пусть $\{c_k\}_{k=-n}^{n}$ — заданная конечная последовательность чисел $c_{-k} = \bar{c}_k$, $c_0 > 0$, $[\alpha, \beta] \subset [-\pi, \pi]$. Образуем последовательность $\{\mu_k\}_0^{n-1}$: $\mu_k = 2\cos((\beta-\alpha)/2)c_k - e^{i(\alpha+\beta)/2}c_{k+1} - e^{-i(\alpha+\beta)/2}c_{k-1}$.

Теорема 10. *Для существования неубывающей функции* $\sigma(z)$, *определяе-*

мой на дуге γ *единичной окружности и такой, что*

$$\int\limits_{[\pi,\pi]\setminus[\alpha,\beta]} e^{ik\theta}d\sigma(\theta) = c_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

где $\{c_k\}_{k=0}^{n}$ *— заданная конечная последовательность комплексных чисел* ($c_0 > 0$), *необходимо и достаточно, чтобы числа* a_k, $k = \overline{1, n-1}$, *и* b_k, $k = \overline{1, n-2}$, *полученные с помощью итерационных процедур Н. Левинсона для последовательностей* c_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, *и* μ_l, $l = 0, 1, \ldots, n-1$, *с начальными условиями* $P_0(z) = 1$, $h_0 = c_0$ *и* $P_0(z) = 1$, $h_0 = \mu_0$ *соответственно удовлетворяли условиям* $|a_k| < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, *и* $|b_k| < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n-2$.

4. К методу симметрических и эрмитовых форм. Отметим некоторые связи между $(m)-T$-рекурсионным процессом и методом симметрических и эрмитовых квадратичных форм в вопросах отделения корней алгебраических уравнений. При этом будем опираться на изложение материала в монографии [4] (см. также перевод). Достаточно полное изложение метода имеется также в [13]. Мы коснемся лишь вычислительной стороны некоторых утверждений, приведенных в [4, 16].

Пусть $f(z)$ — вещественный многочлен с различными корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ соответственно кратностей $n_1, n_2, \ldots, n_q$:

$$f(z) = a_0(z-\alpha_1)^{n_1}(z-\alpha_2)^{n_2} \ldots (z-\alpha_q)^{n_q} = a_0z^n - a_1z^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n.$$

Суммы Ньютона s_p формально вводят равенствами, содержащими корни многочлена $s_p = \sum_{j=1}^{q} n_j\alpha_j^p$, $p = 0, 1, 2, \ldots$. Величины s_p (см., например, [13]) связаны с коэффициентами многочлена равенствами

$$a_0s_j - a_1s_{j-1} + a_2s_{j-2} - \ldots + (-1)^j ja_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{47}$$

и

$$a_0s_{n+j} - a_1s_{n+j-1} + a_2s_{n+j-2} - \ldots + (-1)^j a_n s_j = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, \tag{48}$$

известными как формулы Ньютона.

Равенства (47), (48) дают возможность последовательно найти s_j, если известны $s_1, s_2, \ldots, s_{j-1}$. Таким образом, отправляясь от коэффициентов многочлена $f(z)$, можно по рекуррентным соотношениям (47) и (48) вычислить последовательность ньютоновских сумм $\{s_p\}$, которая фигурирует в приведенных ниже критериях.

Теорема 11 (Borchardt). *Число различных вещественных корней вещественного многочлена* $f(z)$ *равно избытку числа постоянств знака над числом перемен знака в ряду чисел* $1, H_0, H_1, \ldots, H_{r-1}$, *где* $H = \det \| S_{i+j} \|_{i,j=0}^{k}$ *— определители Ганкеля – Адамара,* s_p *— ньютоновские суммы,* r *— ранг ганкелевой формы* $S_n(x, x) = \sum_{i,k=0}^{r-1} S_{i+k}x_ix_k$ (n *— степень многочлена* $f(z)$).

Соответственно число различных комплексно-сопряженных корней вещественного многочлена равно числу перемен знака в ряду $1, H_0, H_1, \ldots, H_r$. *Определители* H_k *могут быть вычислены процедурой* $(m)-T$*-рекурсии; для этого в соотношениях (15) полагаем* $a_k = b_k = 0$, $\sigma_{0,l} = s_l$.

Заметим, что для любых двух комплексно-сопряженных корней α, β вещественного многочлена $f(z)$ и любого целого k величина $\alpha^2 + \beta^2$ — вещественная. Поэтому все ньютоновские суммы s_p вещественные и равенства $\langle x^k, x^l \rangle :=$ $:= s_{k+l}$ определяют скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$ на пространстве многочленов $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$, вещественное на вещественных многочленах и имеющее свойство (А).

Как видно из приведенного критерия Борхардта (Borchardt), исследуемый вопрос сводится к изучению характера индефинитности вводимого скалярного произведения на пространстве многочленов.

Теорема 12. *Число различных комплексно-сопряженных корней вещественного многочлена $f(z)$ равно числу отрицательных чисел в ряду диагональных элементов матрицы Чебышева $\sigma_{00}, \sigma_{11}, \ldots, \sigma_{rr}$.*

Соответственно число различных вещественных корней вещественного многочлена равно избытку количества положительных над количеством отрицательных чисел в ряду диагональных элементов матрицы Чебышева, отвечающей ньютоновским суммам $\{s_p\}$, пополненном единицей: $1, \sigma_{00}, \sigma_{11}, \ldots, \sigma_{rr}$.

Теорема 13 (Joachimstal). *Число различных вещественных корней вещественного многочлена $f(z)$ в интервале (a, b) равно потере числа перемен знака при переходе от a к b в ряду многочленов $1, \delta_1(t), \delta_2(t), \ldots, \delta_r(t)$, где*

$$\delta_k(t) = \begin{vmatrix} s_0t - s_1 & s_1t - s_2 & \ldots & s_{k-1}t - s_k \\ s_1t - s_2 & s_2t - s_3 & \ldots & s_kt - s_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{k-1}t - s_k & s_kt - s_{k+1} & \ldots & s_{2k-2}t - s_{2k-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_k \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{k-1} & s_k & \ldots & s_{2k-1} \\ 1 & t & \ldots & t^k \end{vmatrix}$$

и в этом ряду нет двух последовательных нулей при $t = a$ и $t = b$; s_p — ньютоновские суммы многочлена $f(z)$.

Принимая s_p как $\langle t^p, 1\rangle$, видим, что функции $\{\delta_k(t)\}$ — последовательность ортогональных многочленов относительно скалярного произведения $\langle\ ,\ \rangle$, определяемого на $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$ посредством s_p. Поэтому если известны определители H_k (способ их вычисления указан выше) и моническая система $\langle\ ,\ \rangle$-ортогональных многочленов, то известна также и система $\{\delta_k(t)\}$. Отправляясь, как и выше, от системы степеней $\{t^k\}$, которая удовлетворяет рекуррентному соотношению (4) с $a_k = b_k = 0$, с помощью процесса $(m) - T$-рекурсии получаем моническую систему $\langle\ ,\ \rangle$-ортогональных многочленов (вместе с массивом коэффициентов рекуррентных соотношений для этой системы). Знание элементов массивов $\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}$ позволяет устойчиво вычислить $\delta_k(t)$ в любой точке t, после чего остается применить критерий Йоахимсталя (Joachimstal).

5. Дискретизация задачи оценивания функций. 5.1. ***Функции одной переменной; теневой многочлен.*** Рассмотрим вопросы, связанные с проверкой границ функции по ее моментным характеристикам.

Приведем вначале некоторые эвристические соображения. Пусть $\rho(d\lambda) \ge 0$ — некоторая мера на $\mathbb{R}^1$, имеющая все моменты; $f(\lambda) \in L^2_\rho$ и $f(\lambda) \ge 0$ при $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Очевидно, что последовательность $s_f(n)$, где

$$s_f(n) = \int \lambda^n f(\lambda)\, \rho(d\lambda), \tag{49}$$

положительно определенная. Обратное утверждение

$$(s_f(n) \text{ — положительно определенная}) \to (f(\lambda) \geq 0 \quad \rho\text{-п. в.}), \tag{50}$$

вообще говоря, неверно. Это сразу видно в случае, когда мера $\rho(d\lambda)$ порождает неопределенную моментную последовательность, и неочевидно, если мера $\rho(d\lambda)$ порождает определенную моментную последовательность.

Допустим, что мера $\rho(d\lambda)$, удовлетворяющая указанной импликации (50), выбрана и нам дополнительно известно, что последовательность $\{s_f(n)\}$ положительно определенная, или, что то же, $s_f(n)$ порождает дефинитное скалярное произведение на пространстве многочленов $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$. Тогда $f(\lambda) \geq 0$ ρ-п. в. Очевидно, это утверждение может быть применено для установления различных двусторонних оценок функций.

Определение. *Пусть $\rho(d\lambda) \geq 0$ — мера, имеющая все моменты. Будем называть ее U. р.-мерой, если порождаемая ею моментная последовательность положительно определенная и справедлива импликация* (50).

Насколько нам известно, впервые такие меры были рассмотрены в [14], однако не были терминологически выделены.

Нам будет достаточно двух классов $U.\ \rho$.-мер: 1) меры с ограниченным носителем; 2) меры, для которых $\exists a > 0$ такое, что $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a|\lambda|}\rho(d\lambda) < \infty$.

Пусть $\rho(d\lambda)$ — некоторая $U.\ \rho$.-мера; $\{P_N(\lambda)\}$ — моническая система $\langle\,,\rangle_{\rho(d\lambda)}$-ортогональных многочленов. Если в качестве $\rho(d\lambda)$ выбирается одна из стандартных мер, то система $\{P_N(\lambda)\}$ вместе с рекуррентными соотношениями может считаться известной. Если же в качестве $\rho(d\lambda)$ принимается нестандартная мера, то система $\{P_N(\lambda)\}$, а равно и коэффициенты рекуррентных соотношений могут быть найдены $(m)-T$-рекурсией, как указано выше.

Моническая система $\langle\,,\rangle_{f(\lambda)\rho(d\lambda)}$-ортогональных многочленов находится $(m)-T$-рекурсией, где a_k, b_k — коэффициенты рекуррентных соотношений $\langle\,,\rangle_{\rho(d\lambda)}$-ортогональной системы; начальные данные рекурсии: $\sigma_{-1,l} = 0$, $\sigma_{0,l} = \langle f(\lambda), P_L(\lambda)\rangle_\rho$.

Граница $f(\lambda) \geq 0$ ρ-п. в. эквивалентна в данной ситуации дефинитности скалярного произведения $\langle\,,\rangle_{f(\lambda)\rho(d\lambda)}$ на $\{\mathcal{P}_{R^1}\}$.

Теорема 14. *Пусть $\rho(d\lambda)$ — некоторая U. р.-мера; $f(\lambda) \in L^2_\rho$. Пусть далее элементы σ_{kk} в $(m)-T$-рекурсии с начальными данными*

$$\sigma_{-1,l} = 0, \quad \sigma_{0,l} = \langle f(\lambda), P_L(\lambda)\rangle_\rho$$

положительны. Тогда $f(\lambda) \geq 0$ ρ-п. в.

Заметим, что приведенным процессом $(m)-T$-рекурсии конструктивно находится система $\{\hat{P}_K(\lambda)\}$ $\langle\,,\rangle_{f(\lambda)\rho(d\lambda)}$-ортогональных многочленов, что полезно во многих вопросах (см. п. 6).

Сформулированная теорема дает критерий положительности функции $f(\lambda)$. Индикатором отрицательности $f(\lambda)$, очевидно, являются диагональные элементы матрицы Чебышева и, в первую очередь, первый отрицательный элемент в последовательности коэффициентов b_k.

Пример[2]. Пусть $f(\lambda) = (3-\lambda^2)^5(\lambda-0,5)^2-\varepsilon$. Очевидно, эта функция принимает отрицательные значения на некотором отрезке $(a,b)\subset[-1,1]$, величина которого зависит от ε, и численный просчет по процедуре $(m)-T$-рекурсии должен выдать отрицательные значения в диагональных элементах матрицы Чебышева и коэффициентах $\hat{b}_k$.

Результаты таких вычислений приведены в табл. 1, где указаны номера n первого отрицательного коэффициента $\hat{b}_n$ при различных значениях ε. В качестве исходной (известной) $\langle\ ,\ \rangle_\rho$-ортогональной системы выбиралась система многочленов Чебышева второго рода с весом $\rho(d\lambda) = \sqrt{1-\lambda^2}\,d\lambda$.

Таблица 1

ε	1, 0	0, 5	0, 2	0, 1	0, 05	0, 02	0, 01
n	14	22	35	52	74	118	169

Рассмотрим теперь „теневой многочлен" — многочлен $P_{n_0}(\lambda)$, где n_0 — номер первого из коэффициентов $\hat{b}_k$, ставшего отрицательным. Заметим, что $\int |\widehat{P}_{n_0}(\lambda)|^2 f(\lambda)\rho(d\lambda) < 0$, поэтому можно ожидать, что в рассмотренных примерах значения многочлена $\widehat{P}_{n_0}(\lambda)$ малы на множестве положительности $f(\lambda)$ по сравнению со значениями на множестве отрицательности $f(\lambda)$. Расчеты, ставшие возможными благодаря $(m)-T$-рекурсии, подтверждают это соображение, именно, при $\varepsilon = 0,05$: $|\hat{P}_{74}(\lambda)| \sim 6\cdot 10^{-19}$ при $\lambda = 0,5$ и $|\hat{P}_{74}(\lambda)| \sim 10^{-21}$ при $\lambda = 0,3$ и $\lambda = 0,7$.

5. 2. ***Случай двух переменных.*** Оценки границ функций двух переменных, в том числе и многочленов, требуют применения более углубленного математического аппарата, в частности аппарата дезинтеграции мер и проблемы моментов Хаусдорфа. Здесь мы ограничимся лишь первоначальными иллюстрациями.

Как показано в [6] (см. также [15]), $(m)-T$-рекурсия может быть применена и к исследованию структуры скалярного произведения на $\{\mathcal{P}_{R^2}\}$, что позволяет построить алгоритмы для проверки неотрицательности функции двух переменных. Рассмотрим некоторые характерные ситуации; распространение схемы на более общие случаи не представляет затруднений. Пусть D — прямоугольник $0 \le \lambda;\ \mu \le 1$;

$$P(\lambda;\mu) = \sum_{k,l=0}^{\infty} d_{kl}\lambda^k\mu^l \tag{51}$$

— гладкая функция, задаваемая массивом вещественных чисел $\{d_{kl}\}_{k,l=0}^{\infty}$. Выберем некоторую меру $\rho(d\lambda)\ge 0$, $\operatorname{supp}\rho = [0;1]$. Отвечающая этой мере система ортогональных многочленов первого рода $\{P_L(\lambda)\}$ считается известной. Пусть далее

$$P(\lambda;\mu) = \sum_{k,l=0}^{\infty} P_L(\lambda)\,Q_l(\mu), \tag{52}$$

$$Q_l(\mu) = \langle P(\lambda;\mu), P_L(\lambda)\rangle_\rho, \tag{53}$$

$\| c^r_{j,k} \|$ — матрица Хаара системы $\{P_L(\lambda)\}$.

Теорема 15. *Для того чтобы* $P(\lambda;\mu)|_D \ge 0$, *необходимо и достаточно,*

[2] Все численные расчеты по $(m)-T$-рекурсии, приведенные в данном пункте, выполнялись на ПЭВМ PC XT.

чтобы ядро

$$K_{P,\,\rho}(j;\,k;\,\mu) = \left\| \sum_{r=|j-k|}^{j+k} c_{j,k}^{r} Q_r(\mu) \right\| \tag{54}$$

было положительно определенным при $0 \le \mu \le 1$.

Согласно Дж. Сильвестру проверка положительной определенности ядра $K_{P,\,\rho}(j;\,k;\,\mu)$ сводится к проверке положительности известной последовательности определителей $d_0(\mu), d_1(\mu), \ldots, d_n(\mu), \ldots$, для чего, в свою очередь, может быть применена $(m)-T$-рекурсия (см. п. 3). Применение ядра (54) для проверки условия $P(\lambda;\,\mu)|_D \ge 0$ упрощается, если $P(\lambda;\,\mu)$ — многочлен; ядро K в этом случае ленточное. Кроме того, упрощение может быть иногда достигнуто за счет специального выбора матрицы $\|\, c_{i,j}^{k} \,\|$. Однако трудности, связанные с вычислением определителей достаточно высокого порядка, не снимаются. В связи с этим рассмотрим проблему моментов Хаусдорфа.

5.3. ***Проблема моментов Хаусдорфа и дискретизация задачи оценивания.*** В теореме 15 по существу не использовалась конечность прямоугольника D. Используем теперь специфику проблемы моментов Хаусдорфа. Из (53) и (54) следует

$$K_{P,\,\rho}(j;\,k;\,\mu) = \langle P_J(\lambda), P_K(\lambda)\rangle_{P(\lambda;\,\mu)\rho(d\lambda)} = \int_0^1 P_J(\lambda)P_K(\lambda)P(\lambda;\,\mu)\rho(d\lambda).$$

Отвечающая ядру $K_{P,\,\rho}(j;\,k;\,\mu)$ одномерная моментная последовательность суть

$$s_\mu(n) = \int \lambda^n P(\lambda;\,\mu)\rho(d\lambda). \tag{55}$$

Составляя для нее разности Хаусдорфа

$$\Delta_{k,r}s_\mu = s_\mu(r) - C_k^1 s_\mu(r+1) + C_k^2 s_\mu(r+2) + \ldots + (-1)^k s_\mu(r+k) =$$

$$= \int \lambda^r (1-\lambda)^k P(\lambda;\,\mu)\rho(d\lambda), \tag{56}$$

приходим в силу известного критерия Хаусдорфа к следующей теореме.

Теорема 16. *Справедлива эквивалентность*

$$(P(\lambda;\,\mu)|_D \ge 0) \Leftrightarrow (\Delta_{k,r}s_\mu \ge 0, \quad k, r = 0, 1, \ldots). \tag{57}$$

Заметим, что проверка „двухмерной" последовательности $\Delta_{k,r}s_\mu$ функции одной переменной на положительность может быть проведена указанным выше способом с использованием $(m)-T$-рекурсии. Ее же использование облегчает практическое вычисление в сложных случаях интегралов (56). Изложенные построения особенно наглядны, когда $P(\lambda;\,\mu)$ — многочлен. В этом случае все функции $\Delta_{k,r}s_\mu$ — многочлены.

В качестве иллюстрации рассмотрим многочлен $Q(\lambda;\,\mu)$, $0 \le \lambda \le 1$, $-1 \le \mu \le 1$ следующего вида:

$$Q(\lambda;\,\mu) = (\lambda - 0,6)^2 + 4(\lambda - 0,6)(\mu + 0,1) + 6(\mu + 0,1)^2 - \varepsilon.$$

Он принимает отрицательные значения внутри эллипса, длины осей которого уменьшаются вместе с ε, с центром в точке $(0,6;\,-0,1)$. В табл. 2 для $\varepsilon = 0,1$ и $k, r = 0, 1, \ldots, 10$ приведены наименьшие n: $\{\beta_n < 0,\ \beta_{n-1} > 0\}$.

Таблица 2

k	r										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	19	15	13	13	13	12	12	12	12	12	12
1	18	15	13	13	12	11	12	12	12	12	12
2	18	14	13	13	11	11	11	11	11	11	11
3	20	15	13	12	11	11	11	11	11	11	11
4	20	16	14	12	12	11	11	11	11	11	11
5	22	16	14	13	12	12	11	11	11	11	11
6	23	16	14	13	11	12	11	11	11	11	11
7	25	18	14	14	12	12	12	11	11	11	11
8	27	18	16	14	14	12	12	12	11	11	11
9	28	19	16	14	14	12	12	11	11	11	11
10	30	20	16	14	14	12	12	12	12	11	11

Тестирование функции k переменных, заданной в гиперпрямоугольнике, сводится приведенной выше процедурой к проверке неотрицательности „2^{k-1}-мерной" счетной последовательности функций одной переменной.

6. Метод моментов для уравнения Шредингера и (m) – T-рекурсия. В ряде работ (см., например, [16 – 20]) для исследования уравнения Шредингера с полуограниченным потенциалом успешно применяется метод моментов. Одна из причин успешного применения метода моментов в данном круге вопросов — "феномен" экспоненциального убывания решения уравнения Шредингера с указанным потенциалом. Образно говоря, экспоненциальное убывание состоит в следующем. Пусть

$$-\Delta\Psi + (V - E)\Psi = 0 \tag{58}$$

— уравнение Шредингера с полуограниченным потенциалом V. Наиболее интересен случай, когда значения E, для которых существуют нетривиальные решения, распадаются на два класса: непрерывный спектр и лежащий слева от него дискретный. При этом решения, отвечающие дискретному спектру, экспоненциально убывают; характер убывания зависит от расстояния между рассматриваемым собственным значением и нижней границей непрерывного спектра.

Если рассмотреть основное состояние уравнения Шредингера $\Psi_{gs}(x)$, отвечающее наименьшему значению энергии E_g, то из физических соображений следует, что $\Psi_{gs}(x) \geq 0$. Неотрицательность $\Psi_{gs}(x)$ и ее экспоненциальное убывание позволяют, сопоставив $\Psi_{gs}(x)$ последовательность ее степенных моментов μ_n, перевести уравнение Шредингера (58) для $\Psi_{gs}(x)$ с рациональным полуограниченным потенциалом в эквивалентное рекуррентное соотношение

$$\mu_n = M(\tilde{\mu}_0, \ldots, \tilde{\mu}_s, \mu_{n-k}, E), \tag{59}$$

E — параметр, подлежащий определению (как энергия основного состояния). Допуская, что E_g известно, и зная множество „затравочных" („missing") моментов $\{\tilde{\mu}_{n_1}, \tilde{\mu}_{n_2}, \ldots, \tilde{\mu}_{n_k}\}$, можно из рекуррентных соотношений (59) определить все моменты функции $\Psi_{gs}(x)$ и, следовательно, в принципе, учитывая характер убывания $\Psi_{gs}(x)$, ее восстановить. Однако непосредственно это сделать не удается, так как система степеней очень далека от ортогональных систем, отвечающих весу $\Psi_{gs}(x)$.

Здесь мы ограничимся рассмотрением одномерного уравнения (58). Заметим сначала, что согласно [17] верхние и нижние границы для E_g последовательно определяются из условия $\det \| \mu_{i+j}(E) \| \geq 0$. В рассматриваемых модельных примерах из соображений симметрии достаточно ограничиться рассмотрением полуоси. Пусть

$$\Psi(x) \geq 0, \quad 0 \leq x < \infty; \quad \exists k > 0: \; \Psi(x) \leq Ce^{-kx}, \quad x > x_0,$$

и известны все моменты

$$m_n = \int_0^\infty x^n \Psi(x)\, dx.$$

Введем вспомогательный вес $W(x) = e^{-\gamma x}$, $\gamma < 2k$, с известной $\langle\ ,\ \rangle_W$-ортогональной монической системой многочленов $\{P_J(x)\}$ и коэффициентами $\{a_k, b_k\}$ рекуррентных соотношений. Для функции $\Psi(x)/W(x)$ известна совокупность величин $\sigma_{0l} = \sum_{s=0}^{l} \gamma_{sl} m_l$, где $P_j(x) = \sum_{l=0}^{j} \gamma_{lj} x^l$, которые принимаем в качестве начальных данных $(m) - T$-рекурсии. В результате такого $(m) - T$-рекурсионного процесса получим систему $\{\hat{P}_J(x)\}$ монических многочленов, ортогональных относительно веса $(\Psi(x)/W(x))W(x)dx$, т. е. $\langle\ ,\ \rangle_{\Psi dx}$-ортогональную систему. Последняя система дает возможность вычислить интегралы вида

$$I_J(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{E}} [\Psi(x) - C] \hat{P}_J(x) W(x)\, dx, \tag{60}$$

где $\mathcal{E}$ — интересующее нас множество на полуоси.

Заметим, что $\Psi(x)$ порождает $U.\ p.$-меру и, следовательно, знание интегралов (60) позволяет определить границы для функции $\Psi(x) - C$. Вычисление $\int_{\mathcal{E}} \hat{P}_J(x) W(x) dx$ можно проводить по квадратурной формуле, отвечающей весу $W(x)dx$ ввиду того, что для системы $\{\hat{P}_J(x)\}$ получены в ходе $(m) - T$-рекурсии коэффициенты рекуррентных соотношений.

Для вычислений $\int_{\mathcal{E}} \Psi(x) \hat{P}_J(x) W(x) dx$ (функция $\Psi(x)$ неизвестна) можно воспользоваться квадратурными формулами для веса $\Psi(x)dx$ ввиду того, что известна система $\{\hat{P}_J(x)\}$. Этого достаточно для построения $\langle\ ,\ \rangle_\Psi$-квадратурных формул. Учет множества $\mathcal{E}$ осуществляется путем суммирования по узлам, попавшим в это множество.

В качестве примера рассмотрим невозмущенный гармонический осциллятор:

$$-\Psi'' + x^2 \Psi = E\Psi. \tag{61}$$

Точка дискретного спектра $E_g = 1$ отвечает основному состоянию. Если положить

$$\mu_p = \int_{-\infty}^{\infty} x^p \Psi_{gs}(x) dx,$$

то уравнение (61) преобразуется в соотношение между моментами $-p(p - 1)\mu_{p-2} + \mu_{p+2} = E\mu_p$. В силу четности все $\mu_{2k+1} = 0$. Переходя к полуоси (после замены $p = 2k$ и $\mu_{2k} = m_k$), имеем

$$m_{k+1} = Em_k + 2k(2k-1)m_{k-1}. \tag{62}$$

Таким образом, чтобы восстановить все $\{m_k\}$, считая E известным, в данном примере достаточно знать только два первых момента m_0 и m_1, т. е. они являются „затравочными" моментами. Полагая в соотношении (62) $k = 0$, получаем $m_1 = Em_0$. Следовательно, в рассматриваемом примере можно ограничиться только одним „затравочным" моментом m_0 и далее, не уменьшая общности, можно считать $m_0 = 1$.

Зная последовательность $\{m_k(E)\}_0^\infty$, очевидно, несложно провести необходимые $(m) - T$-рекурсионные процедуры для проверки при каждом фиксированном E критерия „стильтьесовости" последовательности $\{m_k(E)\}$ (теорема 8).

Очевидно, чем ближе выбранное E к $E_g = 1$, тем больше первых членов последовательностей $\{\hat{b}_k\}$ и $\{\hat{b}_k^{(1)}\}$, получаемых соответствующими $(m) - T$-рекурсиями, будут положительными. Это непосредственно подтверждают расчеты, проведенные на ЭВМ (см. табл. 3), где n — номер первого отрицательного числа в последовательностях $\{\hat{b}_k\}$ (левая часть таблицы) и $\{\hat{b}_k^{(1)}\}$ (правая часть таблицы), отвечающих выбранному E.

По нашему мнению, поучительно сопоставление приведенного расчета с результатом работы [19]; оно подчеркивает принципиальные возможности (m)–T-рекурсии как вычислительного метода, его эффективность и доступность (PC AT для (m)–T-рекурсии и Cray-2 для метода, приведенного в [19]). Еще более контрастная ситуация наблюдается при сравнении эффективности (m)–T-рекурсии для оценки границ $\Psi_{gs}(x)$.

Таблица 3

E	n	E	n
$1,0 - 10^{-1}$	3	$1,0 + 10^{-1}$	4
$1,0 - 10^{-2}$	5	$1,0 + 10^{-2}$	5
$1,0 - 10^{-3}$	6	$1,0 + 10^{-3}$	6
$1,0 - 10^{-4}$	7	$1,0 + 10^{-4}$	8
$1,0 - 10^{-5}$	8	$1,0 + 10^{-5}$	9
$1,0 - 10^{-6}$	9	$1,0 + 10^{-6}$	10
$1,0 - 10^{-7}$	10	$1,0 + 10^{-7}$	11
$1,0 - 10^{-8}$	11	$1,0 + 10^{-8}$	12
$1,0 - 10^{-9}$	13	$1,0 + 10^{-9}$	13
$1,0 - 10^{-10}$	14	$1,0 + 10^{-10}$	14

7. Замечания и дополнение. В [1] переход к системе ортогональных многочленов осуществлялся от $\{t^k\}$, т. е системы, удовлетворяющей рекуррентным соотношениям с $a_k, b_k = 0$. Алгоритмические возможности, заложенные в процедуре П. Л. Чебышева, отмечались в известной монографии Г. Уолла [21]. Общий подход, по-видимому, принадлежит В. Гаучи (W. Gautschi).

Замечания.

К п. 1.1. 1. Непосредственное построение системы $P_N(x)$ согласно равенствам (5) наталкивается на серьезные трудности. Исключение, по нашему мнению, составляет случай скалярного произведения на $\{P_{R^1}\}$, порождаемого мерой, сосредоточенной на конечном множестве точек.

2. Как следует из (7), два скалярных произведения на $\{P_{R^1}\}$ имеют равные $H_{\langle,\rangle}$ точно тогда, когда в порождаемых ими рекуррентных соотношениях (4) совпадают коэффициенты $\{b_k\}$.

3. Равенство (10) позволило эффективно вычислить коэффициенты матрицы Хаара для различных систем ортогональных многочленов.

4. Равенства, приведенные при доказательстве теоремы Ж. Фавара, позволяют „предъявить" в случае отсутствия дефинитности скалярного произведения многочлен $D_K(\lambda)$ такой, что $\langle D, D\rangle < 0$, а также определить структуру индефинитности $\langle\ ,\ \rangle$ в зависимости от распределения знаков в последовательности $\{b_k\}$.

К п. 1. 3. Пусть $\langle\ ,\ \rangle_1$ и $\langle\ ,\ \rangle_2$ — дефинитные скалярные произведения на $\{P_{R^1}\}$, c^r_{jk} и $\hat{c}^r_{jk}$ — матрицы Хаара $\langle\ ,\ \rangle_1$- и $\langle\ ,\ \rangle_2$-ортонормальных систем многочленов. Последовательности α_k и $\hat{\alpha}_k$ положительно определенные относительно $\| c^r_{jk} \|$ ($\| \hat{c}^r_{jk} \|$), если ядра K_α ($K_{\hat{\alpha}}$), определяемые (24), положительно определенные. По матрице Чебышева с учетом равенств (6) легко строится треугольная матрица $\tilde{T}$ такая, что $\tilde{T}\{P\} = \tilde{P}$. Равенство $\tilde{T}\alpha = \hat{\alpha}$ осуществляет (в невырожденном случае) изоморфизм также между последовательностями, положительно определенными относительно матриц Хаара c и $\hat{c}$.

К п. 3. При решении вопроса о существовании у последовательности $\{s_k\}$ представляющей меры с предписанной системой из n люков может понадобиться 2^n проверок, аналогичных приводимым в теореме 9. Необходимые $(m)-T$-рекурсии могут быть проведены параллельно.

К п. 6. Для определения энергии возбужденных состояний, описываемых одномерным уравнением Шредингера, также применим метод моментов в сочетании с $(m)-T$-рекурсией. При этом используется то, что соответствующее решение $\Psi(x)$ можно умножением на соответствующий многочлен преобразовать в неотрицательную функцию. Однако двухмерный случай требует, видимо, принципиально иных подходов. Вопрос фиксации „затравочных" моментов для определения энергетических уровней и соответствующих локализованных решений — один из центральных в методе моментов. $(m)-T$-рекурсия делает реальным „тестирование" выбранного множества „затравочных" моментов.

Дополнение. При описании решений проблемы моментов в неопределенном случае, проблемы продолжения эрмитово-положительных функций, при решении различных интерполяционных задач, а также при описании изометрических включений гильбертовых пространств Де Бранжа целых функций [22] желательно иметь эффективную процедуру построения целой матрицы-функции $W(z)$ второго порядка, осуществляющей дробно-линейное преобразование над классом неванлинновских функций, играющего роль параметризующего семейства. В неопределенном случае степенной проблемы моментов такой процедурой, по нашему мнению, является $(m)-T$-рекурсия. В самом деле, принимая последовательность моментов в качестве начальных данных $(m)-T$-рекурсии с $a_k = b_k = 0$, получаем систему $\langle\ ,\ \rangle$-ортогональных многочленов 1 рода $\{P_K(\lambda)\}$, а заодно и элементы матрицы Якоби $\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}$, которую можно использовать для рекуррентного построения системы $\langle\ ,\ \rangle$-ортогональных многочленов 2 рода $\{Q_K(\lambda)\}$. После этого вычисляем приближения величин

$$W_{11}(z) = z\sum_{k=0}^{\infty} Q_K(0)Q_K(z), \qquad W_{12}(z) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} P_K(0)Q_K(z),$$

$$W_{21}(z) = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} Q_K(0)P_K(z), \quad W_{22}(z) = z\sum_{k=0}^{\infty} P_K(0)P_K(z),$$

составляющих элементы матрицы-функции $\|W(z)\|$. Аналогично получаем приближения фазовой функции соответствующего гильбертова пространства, что приводит к последовательности приближений для решения бесконечной проблемы моментов. В случае усеченной тригонометрической проблемы моментов соответствующая матрица-функция $W(z)$ может быть получена алгоритмом Левинсона (см. п. 2).

Построение соответствующих $(m)-T$-рекурсионных процессов для общих гильбертовых пространств Де Бранжа целых функций представляется нам весьма важной проблемой.

1. *Chebyshev P. L.* Sur l'interpolation par la methode des mondres carres // Mem. Acad. Imper. Sci. St. Petersbourg. – 1859. – **1**, № 15. – P. 1 – 24.
2. *Wheeler J. C.* Modified moments and continuum fraction coefficients for the diatomic linear chain // J. Chem. Phys. – 1984. – **30**, № 1. – P. 472 – 476.
3. *Gautschi W.* Orthogonal polynomials – Constructive theory and applications // J. Comput. and Appl. Math. – 1985. – **12/13**. – P. 61 – 75.
4. *Крейн М., Наймарк М.* Метод симметрических и эрмитовых квадратичных форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. – Харьков: ДНТВУ, 1936. – 43 с. (англ. перевод: Linear and Multilinear Algebra. –1981. – **10**. – P. 265 – 308).
5. *Овчаренко И. Е.* Скалярные произведения в пространстве многочленов и положительность // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 7. – С. 17 – 21.
6. *Овчаренко И. Е.* Некоторые применения рекурсии Чебышева // Докл. АН СССР. – 1991. – **319**, № 2. – С. 287 – 291.
7. *Угриновский Р. А.* О тригонометрической проблеме моментов с люком, алгоритме Левинсона и некоторых прикладных вопросах // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 5. – С. 713 – 716.
8. *Корж С. А., Овчаренко И. Е., Угриновский Р. А.* Рекурсия Чебышева и ее применения // Тез. докл. 16 Всесоюз. шк. „Теория операторов в функцион. пространствах". – Нижний Новгород, 1991. – С. 114.
9. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. – М.: Физматгиз, 1961. – 310 с.
10. *Levinson N.* The Wiener rms (root-mean-square) Error Criterion in Filter Design and Predicnion // J. Math. Phys. – 1947. – **25**. – P. 261 – 278.
11. *Нотик А. И., Кнафель А. И., Турчин В. И. и др.* Спектральный анализ на основе континуального аналога метода максимальной энтропии // Радиотехника и электроника. – 1990. – № 9. – С. 1904 – 1912.
12. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
13. *Сушкевич А. К.* Основы высшей алгебры. – М.: Гостехиздат, 1941. – 472 с.
14. *Kowalski M. A.* Representation of scalar product on space of polynomials // Acta Math. Hung. – 1985. – **46**, № 1–2. – P. 102 – 109.
15. *Овчаренко И. Е.* Положительная определенность; ортогональные системы; положительность // Вестн. Харьков. ун-та. Прикл. математика и механика. – 1992. – С. 3 – 15.
16. *Handy C. R., Bessis D., Morley T. D.* Generating quantum energy bounds by the moment method: A linear-programming approach // Phys. Rev. A. – 1988. – **37**, № 12. – P. 4557 – 4569.
17. *Handy C. R., Bessis D.* Rapidly Lower Bounds for Schrödinger Equation Ground State Energy // Phys. Rev. Lett. – 1985. – **55**, № 9. – P. 931 – 934.
18. *Handy C. R.* Moment method quantization of a linear differential equation for $|\psi|^2$ // Phys. Rev. A. – 1987. – **36**, № 9. – P. 4411 – 4416.
19. *Vrscay E. R., Handy C. R.* The perturbed two-dimensional oscillator: eigenvalues and infinite-fields limits via continued fractions renormalized theory and momemt methods // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – **22**, № 2. – P. 823 – 834.
20. *Handy C. R., Pei J. Q.* Moment-method analysis of ground state of discretized bosonic systems // Phys. Rev. A. – 1988. – **38**, № 7. – P. 3175 – 3181.
21. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York: Van Nostrand, 1948. – 617 p.
22. *De Branges L.* Hilbert spaces of entire functions. – Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., 1968.

Получено 29. 10. 91