УДК 517.53

В. И. Белый, д-р физ-мат. наук, **Е. В. Кравчук,** канд физ-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

НЕКОТОРЫЕ ЯВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПРИВЕДЕННОГО МОДУЛЯ И ГАРМОНИЧЕСКОЙ МЕРЫ

Установлены точные формулы для приведенных модулей семейств кривых, отделяющих в произвольных односвязных областях некоторые связные подмножества. В качестве следствий получены новые явные выражения для гармонической меры связного граничного подмножества.

Встановлені точні формули для зведених модулів сімей кривих, що відокремлюють в довільних однозв'язних областях деякі зв'язні підмножини. Як наслідки одержані нові явні вирази для гармонічної міри зв'язної граничної підмножини.

1. Пусть Ω — неограниченная односвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\infty \in \Omega$, $D = \{w: |w| < 1\}$, $w = \Phi(z)$ — конформное отображение Ω на $\Omega' = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ с нормировкой $\Phi(\infty) = \infty$; $\lim\limits_{z \to \infty} \Phi(z)/z = 1/c > 0$, где $c = \operatorname{cap}(\mathbb{C} \setminus \Omega)$. В ряде задач аппроксимации функций комплексного переменного при построении аппроксимационных полиномов по методу В.К. Дзядыка [1] существенную роль играют оценки и сравнительные характеристики роста величин $|\Phi^{-1}[\Phi(z) Re^{it}] - z|$ для $R \geq 1$, $t \in (-\pi, \pi]$, $z \in L =: \partial\Omega$ в зависимости от R и t. По понятным причинам в общем случае приходится рассматривать величины $\Phi^{-1}[\Phi(Z) Re^{it}] =: Z_{R,t}$ и $|z_{R,t} - z|$, где Z — граничный простой конец области Ω с телом $|Z|$; $z \in |Z|$, $z_{R,t} \in |Z_{R,t}|$ — какие-либо точки тел простых концов Z и $Z_{R,t}$.

Основной результат данной статьи — простое соотношение в виде явного равенства, связывающее граничной простотой конец Z области и любой другой простой конец $\mathfrak{Z}$ из компактификации $\tilde{\Omega}$ области Ω (по Каратеодори) с величинами $R = |\Phi(\mathfrak{Z})| \geq 1$ и $t = \arg(\Phi(\mathfrak{Z}) / \Phi(Z); F)$, $t \in (-\pi, \pi]$. Ранее [2–4] указывались только порядковые равенства в общем случае и явные соотношения для частных случаев расположения простых концов.

Как следствия выводятся явные выражения, связывающие гармоническую меру некоторых множеств с приведенными модулями семейств отделяющих кривых.

2. Помимо введенных в п. 1, в работе используются обозначения: $E_{R\theta}(\Omega) = \{Z: Z \in \tilde{\Omega}; \Phi(Z) = e^{i\xi}, \xi \in [0, \theta]\} \cup \{Z: Z \in \tilde{\Omega}; \Phi(Z) = re^{i\theta}, r \in [1, R]\}$, где $\theta \in (-\pi, \pi]$, $R \geq 1$, $D = \{w: |w| < 1\}$; $\overline{D} = \{w: |w| \leq 1\}$, x: $x =: (1/2)(R + 1/R)$; cap: конформная емкость множества, конформный радиус области относительно ∞; ρ: $\rho = \rho(z^*, G)$ — внутренний конформный радиус области G относительно точки $z^* \in G$ (см., например, [5]); $\mu_{z^*}(\Gamma)$: приведенный модуль семейства Γ относительно z^* (понятие впервые введено Тейхмюллером [6], применительно к рассматриваемым семействам кривых см. [2]).

Рассмотрим семейство Γ всех локально-спрямляемых (л. с.) кривых, отделяющих в Ω множество $E_{R\theta}(\Omega)$ от ∞ (включая замкнутые кривые).

Теорема 1. *Приведенный относительно ∞ модуль семейства Γ удовлетворяет соотношению*

$$\mu_\infty(\Gamma) = (-1/\pi) \ln\left[\tfrac{1}{2}(R+1)\sqrt{cR^{-1}}\,\sin\tfrac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_0)\right], \tag{1}$$

где $c = \operatorname{cap}(\partial\Omega)$, $\varphi_0 = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{8(x-1)}}{3-x}$, $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{(\cos\theta+1)(x-\cos\theta)}}{2\cos\theta - x + 1}$.

Доказательство. Рассмотрим семейство $\Gamma' = \Phi(\Gamma)$ л. с. кривых, отделяющих в Ω' множество $E_{R\theta}(\Omega')$ от ∞. По известному свойству приведенного модуля [2]

$$\mu_\infty(\Gamma) = \mu_\infty(\Gamma') + (1/2\pi)\ln(1/q), \tag{2}$$

поэтому достаточно доказать теорему для множеств $E_{R,\theta}(\Omega')$ в Ω'.

Альфорс и Берлинг [7] показали инвариантность дифференциального элемента $e^{-2\pi\mu_{z^*}}|dz^*|$ при конформных отображениях для семейств кривых, гомотопных нулю относительно z^*, которая, как отмечалось в [2], сохраняется и для рассматриваемых семейств отделяющих кривых. Это свойство удобно записать в следующем виде: если Γ расположено в односвязной области G, $z^* \in G$, $w = \varphi(z)$ — конформное отображение области G на G', $\Gamma' = \varphi(\Gamma)$, $w^* = \varphi(z^*)$, то

$$e^{-2\pi\mu_{z^*}(\Gamma)} = e^{-2\pi\mu_{w^*}(\Gamma')}(|\,d\varphi/d\varsigma\,|)_{\varsigma = z^*}, \tag{3}$$

где производная вычисляется на сфере Римана, если z^* или w^* равны ∞. Равенство (2) — частный случай равенства (3).

Отобразим конформно область $\Omega^{(1)} = \Omega' \setminus E_{R,\theta}(\Omega')$ на внешность единичного круга, последовательно выполняя поворот $\tau = we^{-i\theta}$, отображение Жуковского $\tau_1 = (1/2)(\tau + 1/\tau)$ и отображение внешности отрезка $[-1, x]$, $x = (1/2)(R + 1/R) > 1$ на внешность единичного круга $\tau_2 =: (x+1)^{-1}(2\tau_1 - x + 1 + 2i\sqrt{(\tau_1+1)(x-\tau_1)})$. Результирующее отображение (при соответствующем выборе ветви радикала) имеет вид

$$f(w) = \Big(2R(w + e^{i\theta})(w + e^{i\theta} + \sqrt{(w - e^{i\theta}R)(w - e^{i\theta}/R)})\Big)\Big/ w(R+1)^2 - 1,$$

причем простые концы области $\Omega^{(1)}$ с общим телом $e^{i\theta}$ перейдут соответственно в точки

$$e^{\pm i\varphi_0} = \big(3 - x \pm i\sqrt{8(x-1)}\big)\big/(x+1), \tag{4}$$

а $f(1) =: e^{-i\varphi_1}$, где

$$e^{-i\varphi_1} = \big(2\cos\theta - x + 1 - 2i\sqrt{(\cos\theta+1)(x-\cos\theta)}\big)\big/(x+1) \tag{5}$$

Семейство $\Gamma'' =: f(\Gamma')$ будет отделять во внешности D дугу $\{e^{it}: -\varphi_1 \le t \le \varphi_0\}$ от $f(\infty) = \infty$. В силу (3)

$$\mu_\infty(\Gamma') = \mu_\infty(\Gamma'') + (1/2\pi)\ln\big(\operatorname{cap}(\overline{D} \cup [1, R])\big)^{-1}, \tag{6}$$

причем

$$\operatorname{cap}(\overline{D} \cup [1, R]) = f'(\infty) = \lim_{w\to\infty}(w/f(w)) = (R+1)^2/4R. \tag{7}$$

Вычисление $\mu_\infty(\Gamma'')$ неявно производилось в [3]. Полагая $\alpha = (1/2)(\varphi_1 + \varphi_0)$; $\beta = (1/2)(\varphi_1 - \varphi_0)$; $a = \cos\alpha$; $z(\tau) = (1/2)(\tau e^{i\beta} + \tau^{-1}e^{-i\beta})$, выполним отображение

$$f_2(\tau) = \big(2z(\tau) - a - 1 + 2\sqrt{(z(\tau)-1)(z(\tau)-a)}\big)\big/(1-a).$$

Семейство $\Gamma''' = f_2(\Gamma'')$ симметрично относительно вещественной оси, его модуль обеспечивается подсемейством симметричных кривых, более того, достигается на семействе $\tilde{\Gamma}$ концентрических окружностей радиуса r, $r \in (1, \infty)$. В силу (2)

$$\mu_\infty(\Gamma'') = \mu_\infty(\Gamma''') + (1/2\pi)\ln 2/(1-a) = \mu_\infty(\tilde\Gamma) + (1/2\pi)\ln 2/(1-a) =$$
$$0 + (1/2\pi)\ln(\sin^2 \tfrac14(\varphi_1+\varphi_0))^{-1} = (-1/\pi)\ln \sin\tfrac14(\varphi_1+\varphi_0). \qquad (8)$$

Из (2), (4) – (8) немедленно следует (1).

3. Приведем аналогичный результат для конформного отображения $w = \varphi(z)$ произвольной конечной односвязной области G на единичный круг D с нормировкой $\varphi(z^*) = 0$; $\varphi'(z^*) = 1/\rho > 0$, где $z^* \in G$, $\rho = \rho(z^*, G)$. Пусть $\tilde G$ — компактификация G простыми концами, $E_{R,\theta}(G) = \{Z\colon Z \in \tilde G;\ \varphi(Z) = e^{i\xi},\ \xi \in [0,\theta]\} \cup \{Z\colon Z \in \tilde G;\ \varphi(Z) = re^{i\theta};\ r \in [R, 1]\}$, где $\theta \in (-\pi, \pi]$; $0 < R \le 1$; Γ — семейство л. с. кривых, отделяющих в G множество $E_{R\theta}(G)$ от z^*.

Теорема 2. *Приведенный относительно z^* модуль семейства Γ удовлетворяет соотношению*

$$\mu_{z^*}(\Gamma) = -(1/\pi)\ln\left[\tfrac12(R+1)\sqrt{(\rho R)^{-1}}\ \sin\tfrac14(\varphi_0+\varphi_1)\right], \qquad (9)$$

где $\rho = \rho(z^*, G)$, $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\,(2\sqrt{(\cos\theta+1)(x-\cos\theta)}/(2\cos\theta - x + 1))$, $\varphi_0 = \operatorname{arctg}\sqrt{8(x-1)}/(3-x)$.

Для доказательства достаточно применить формулу (3), затем отображение $\varphi_1 = 1/w$ (при котором приведенный модуль инвариантен) и теорему 1.

Теорема 2 позволяет вывести явные соотношения для гармонической меры множеств $E_{R\theta}(G)$ относительно точки $z^* \in G_1 =: G \setminus E_{R,\theta}(G)$ и, в частности, полезные формулы для гармонической меры связных подмножеств границы ∂G. Поскольку $\varphi_1 + \varphi_0 = 2\pi\omega(z^*; E_{R\theta}(G), G_1)$, то в силу (9) справедливы следующие утверждения.

***Следствие* 1.** *Гармоническая мера множества $E_{R,\theta}(G)$ в точке $z^* \in G_1$ удовлетворяет соотношению*

$$\omega(z^*; E_{R\theta}(G), G_1) = (2/\pi)\arcsin\left(2(R+1)^{-1}\sqrt{\rho R}\, e^{-\pi\mu_{z^*}(\Gamma)}\right),$$

где $\rho = \rho(z^*, G)$, Γ — семейство л. с. кривых, отделяющих в G $E_{R,\theta}(G)$ от z^*. В частности, для любого участка l границы ∂G, $l = E_{1,\theta}$ имеем

$$\omega(z^*; l; G) = (2/\pi)\arcsin\left(\sqrt{\rho}\ e^{-\pi\mu_{z^*}(\Gamma)}\right).$$

***Следствие* 2.** *Если l — дуга единичной окружности, то*

$$\omega(0; l; D) = (2/\pi)\arcsin\, e^{-\pi\mu_0(\Gamma)}, \qquad (10)$$

где Γ — семейство всех л. с. кривых, отделяющих в D дугу l от 0.

Формула (10) близка к формуле Херша [8, с. 319], выражающей связь гармонической меры и экстремальной длины отделяющих кривых с концами на ∂D в терминах эллиптических интегралов.

1. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
2. *Белый В. И.* Конформные отображения и приближение аналитических функций в областях с квазиконформной границей // Мат. сб. – 1977. – **102**(144), № 3. – С. 331–361.
3. *Belyi V. I.* Development of the method of conformal invariants and quasiconformal quasi-invariants from the viewpoint of application to problems of polynomial approximation // Approximation and function spaces. – Amsterdam, N.Y., Oxford: North Holland Publ. Comp., 1981. – P. 102–121.
4. *Белый В. И.* О константах в оценках искажения расстояния при конформных отображениях // Докл. расшир. заседаний семинара им. Векуа. – 1985. – **1**, № 1. – С. 36–39.
5. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного.– М.: Наука, 1966. – 628 с.
6. *Teichmuller O.* Untersuchungen über konforme und quasikonforme Ablildung // Dtsch. Math. – 1938. – **3**. – P. 621–678.
7. *Ahlfors L. V., Beurling A.* Conformal invariants and functiontheoretic null-sets // Acta Math. – 1950. – 83. – P. 101–129.
8. *Hersch J.* Longueurs extrémales et théorie des fonctions // Comment. Math. Helv. – 1955. – **29**. – P. 301–337.

Получено 11. 06. 91