УДК 519.21

И. И. Дериев, асп. (Киев. ун-т)

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ СФЕРИЧЕСКИХ СРЕДНИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Доказаны центральная предельная теорема для функционалов интегрального типа от нелинейных преобразований гауссовских дву- и трехмерных однородных изотропных случайных полей и теорема о сходимости конечномерных распределений этих функционалов к соответствующим распределениям винеровского процесса.

Доведено центральну граничну теорему для функціоналів інтегрального типу від нелінійних перетворень гаусівських дво- та тривимірних однорідних ізотропних випадкових полів та теорему про збіжність скінченновимірних розподілів цих функціоналів до відповідних розподілів вінерівського процесу.

Введение. В настоящей работе доказывается центральная предельная теорема для функционалов интегрального типа от нелинейных (не обязятельно локальных) преобразований гауссовского случайного поля. При доказательстве используется диаграмный формализм, а также идеи статьи [1] (там же можно найти более подробную библиографию по данному вопросу). Отметим, что в [2] приведено аналогичное утверждение для локальных функционалов.

1. Основные определения и результаты. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ — полное вероятностное пространство, $V \equiv \mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство, $v(r) = \{x \in V: |x| \leq \leq r\}$ — шар радиуса r; $X = (X_t, t \in V)$ — скалярное измеримое непрерывное в среднем квадратическом однородное изотропное гауссовское случайное поле с $EX_0 = 0, EX_0^2 = 1, E(X_t X_0) = \int e^{i\langle x,t\rangle}\sigma(dx)$, где $\sigma(dx)$ — конечная мера на V, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега с плотностью f; $\{U_s, s \in V\}$ — семейство операторов сдвига, $\mathbb{P}$ — U-инвариантная мера; $J_\nu(z)$ — функция Бесселя 1-го рода порядка $\nu > -1/2$.

Обозначим через $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ гильбертово пространство величин из $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{P})$, измеримых относительно σ-алгебры, порожденной полем X.

Для $Y \in \mathbb{H}(X)$ определим

$$Y_T(t) = \int\limits_{v(Tt^{1/n})} U_s Y ds \Big/ \Big(D \int\limits_{v(T)} U_s Y ds\Big)^{1/2}.$$

В дальнейшем изучаются асимптотические свойства $Y_T(t)$.

Введем следующие обозначения: $\mathbb{L}_2(\sigma^k) = \{f_k \in \mathbb{L}_2(V^k, \mathfrak{B}(V^k), \sigma^k): f_k(-\bar{x}) = = f_k(\bar{x})\}$, где $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $x_i \in V$, $i = 1, 2, \ldots, k$; $\mathbb{L}_2(\sigma^k, \mathrm{sym}) = \{g \in \mathbb{L}_2(\sigma^k)$, инвариантные относительно перестановки переменных$\}$;

$$\mathrm{Exp}\,(\sigma) = \{(f_k)_{k=0}^{\infty},\ f_0 \in \mathbb{R},\ f_k \in \mathbb{L}_2(\sigma^k, \mathrm{sym}),\ \ k > 0\},$$

$$(f, g)_{\mathrm{Exp}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(f_k, g_k)_{\sigma^k}}{k!}, \quad (f_0, g_0)_{\sigma^0} = f_0 \cdot \bar{g}_0.$$

В [3] показано существование семейства операторов $\mathbb{I}_k: \mathbb{L}_2(\sigma^k, \mathrm{sym}) \to \mathbb{H}_k$, $k \geq 0$, причем $(k!)^{-1/2}\mathbb{I}_k$ — изометрия, а $\mathbb{H}(X) = \bigoplus\limits_{k=0} \mathbb{H}_k$ ($\mathbb{H}_0 = B$ — пространство функций, тождественно равных константе). Операторы $\mathbb{I}_k$ называются кратными стохастическими интегралами Винера — Ито. Если определить оператор $P: \mathrm{Exp}(\sigma) \to \mathbb{H}(X): P(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{I}_k f_k$, $\mathbb{I}_0 f_0 \equiv f_0$, то P — изометрический изоморфизм, т. е. для любого $Y \in \mathbb{H}(X)$ справедливо представление

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{I}_k f_k,\ \ f_k \in \mathbb{L}_2(\sigma^k, \mathrm{sym}),\ \ k \geq 1,\ \ \mathrm{rank}(Y) \equiv \inf\{k \geq 1: f_k \not\equiv 0\}.$$

Перечислим некоторые известные свойства кратных стохастических интегралов:

$$E\mathbb{I}_k f_k = 0, \tag{1}$$

$$\| \mathbb{I}_k f_k \|_P^2 = (k!)^{-1} \| f_k \|_{\sigma^k}^2, \tag{2}$$

$$\langle \mathbb{I}_k f_k, \mathbb{I}_n g_n \rangle_P = \delta_{kn} (k!)^{-1} (f_k, g_n)_{\sigma^k}, \tag{3}$$

$$U_s(\mathbb{I}_k f_k) = \mathbb{I}_k (f_k \exp\{i \langle s, \sum_{j=1}^{k} x_j \rangle\}). \tag{4}$$

В дальнейшем используется представление Пуассона для функции Бесселя

$$J_\nu(z) = 2\pi^{-1/2} \Gamma^{-1}(\nu + 1/2)(z/2)^\nu \int_0^{\pi/2} \cos(z \sin\varphi)(\cos\varphi)^{2\nu} d\varphi. \tag{5}$$

Лемма 1. *Если* ν *вещественно, то* $i)$ *для любого* $\alpha > 0$ *существует* $C_\alpha > 0$ *такое, что при* $|z| > \alpha$ $|J_\nu(z)| \leq C_\alpha z^{-1/2}$; $ii)$ *существует такое* $A > 0$, *что* $|J_\nu(z)| \leq A |z|^{\nu/2}$ *для всех* z.

Теорема 1. *Пусть* $n \in \{1, 2, 3\}$, $Y \in \mathbb{H}(X)$, $m = \mathrm{rank}(Y)$, $EY = f_0 \equiv 0$, *и выполняются следующие предложения:*

A 1) f (плотность σ) такова, что на любом компакте $K \subset V$

$$(\min\{f(\cdot), M\})^{*m} = f^{*m}, \quad \text{при } M \to \infty;$$

A 2)

$$0 < \sum_{k \geq 0} (k!)^{-1} \liminf_{h \downarrow 0} h^{-n} \int_{V^k} |f_k|^2 \chi_h \sigma^k(d\bar{x}),$$

$$\sum_{k \geq 0} (k!)^{-1} \limsup_{h \downarrow 0} h^{-n} \int_{V^k} |f_k|^2 \chi_h \sigma^k(d\bar{x}) < \infty,$$

где $\chi_h \equiv \chi_{(|x_1 + x_2 + \ldots + x_k| < h)}$;

A 3) *для всех* $k \geq m$:

$$\limsup_{M \to \infty} \limsup_{h \downarrow 0} h^{-n} \int_{V^k} |f_k|^2 \chi_h \chi_{|f_k| \leq M} \sigma^k(d\bar{x}) = 0.$$

Тогда $0 < \liminf_{T \to \infty} (V(T)/T^n) \leq \limsup_{T \to \infty} (V(T)/T^n) < \infty$,

где $V(T) = DY_T$ и $Y_T \xrightarrow{D} N(0, 1)$, $T \to \infty$.

Определим φ_k из соотношения

$$\int\limits_A |f_k(\bar{x})|^2\sigma^k(d\bar{x}) = \int\limits_B \varphi_k(x)\sigma^{*k}(dx),$$

где $B \subset V$, а $A = \{\bar{x} \in V^k\colon x_1 + x_2 + \ldots + x_k \in B\}$.

Теорема 2. *Пусть* $n \in \{1, 2, 3\}$, $Y \in \mathbb{H}(X)$, $m = \operatorname{rank}(Y)$, $EY = f_0 \equiv 0$. *Тогда если выполняются условия* $A\,1)$, $A\,3)$ и условие $A\,2')$: *существуют константы* $a_k \geq 0$ *такие, что* $0 < \sum_{k=m}^{\infty} a_k = a < \infty$ *и*

$$\lim_{|x|\to 0}\sum (k!)^{-1}\varphi_k(\bar{x})f^{*k}(\bar{x}) = a; \quad \lim_{|x|\to 0}\varphi_k(\bar{x})f^{*k}(\bar{x}) = k!\,a_k, \quad k = m,\ m+1,\ \ldots,$$

то конечномерные распределения процесса $Z(\cdot)/V(T)^{1/2}$ *сходятся к соответствующим распределениям* $W(\cdot)$*-винеровского процесса.*

2. Оценки дисперсий. Пусть $Y \in \mathbb{H}(Y)$, $EY = 0$, $Y = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}_k f_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|^2_{\sigma^k}/k! < \infty$, $T > 0$, $0 \leq t \leq 1$. Будем использовать следующие обозначения

$$Z_{T,k}(t) = \int\limits_V U_s(\mathbb{I}_k f_k)ds, \quad Z_T(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_{T,k}(t), \quad V_k(T) = E(Z^2_{T,k}(1)),$$

$$V(T) = D\left(\int\limits_{V(T)} U_s Y ds\right) \equiv EZ^2_T(1) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} V_k(T).$$

Для всех $T > 0$ $\{Z_{T,k}(\cdot), Z_T(\cdot)\} \subset C[0, 1]$. Дважды применив теорему Фубини, получим $\langle Z_{T,k}(t), \mathbb{I}_m g_m\rangle_p = \langle \mathbb{I}_k \zeta_{k,T,t}, \mathbb{I}_m g_m\rangle_p$, где с вероятностью 1 $\zeta_{k,T,t} = f_k\psi_{T,t}(\sum_{j=1}^{k} x_j)$, а $\psi_{T,t}(y)$ определяется как

$$\psi_{T,t}(y) = \int\limits_{v(Tt^{1/n})} e^{i\langle s,y\rangle}ds = \left(\frac{2\pi T t^{1/n}}{|y|}\right)^{n/2} J_{n/2}(Tt^{1/n}|y|), \quad y \in V.$$

Пусть Λ_i — независимые случайные векторы в V с распределением $\sigma(dx)$. Введем функции

$$\varphi_k\Big(\sum_{i=1}^{k}\Lambda_i\Big) = E\Big\{|f_k|^2 \big/ \sum_{i=1}^{k}\Lambda_i\Big\}.$$

Тогда $V_k(T) = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\int\limits_V |\psi_T(x)|^2\varphi_k(x)\sigma^{*k}(dx)$, где $\psi_T(x) = \psi_{T,1}(x)$. Поскольку выполняется соотношение

$$\sum_k (k!)^{-1}\int\limits_V \varphi_k(x)\sigma^{*k}(dx) = \sum_k (k!)^{-1}E|f_k(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k)|^2 = \|Y\|^2_p,$$

то $\varphi_k \in \mathbb{L}_1(V, \sigma^{*k}(dx))$, $k = 1, 2, \ldots$, и неотрицательны. Используя (5), получаем следующую оценку:

$$|\psi_T(x)| \leq \frac{\pi^{(n-1)/2}T^n}{\Gamma((n+1)/2)}\int\limits_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^n d\varphi = \frac{\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}T^n \equiv AT^n,$$

и по лемме 1 $|\psi_T(x)| \le (2\pi)^{n/2} C_\alpha T^{(n-1)/2} |x|^{-(n+1)/2}$ для всех $x\colon |x| > \alpha$, т. е.

$$|\psi_T(x)| \le C\min(T^{(n+1)/2},\quad |y|^{-(n+1)/2}) T^{(n-1)/2}, \tag{6}$$

где $C = \max\{A, (2\pi)^{n/2} C_{1/T}\}$.

Определим $\Phi_k(h) = \int\limits_{V\langle h\rangle} \varphi_k(x) \sigma^{*k}(dx)$, тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 2. а) *Для всех* $k \ge 1$, $T > 0$, *существует* $B > 0$ *такое, что*

$$\frac{V_k(T)}{T^n} \ge \frac{B}{k!} T^n \Phi_k(1/T);$$

б) *существуют универсальные постоянные* $C_1, C_2 > 0$ *такие, что для любой меры* μ *на* V *и любого* $\varphi \ge 0$, $\varphi \in \mathbb{L}_1(V, \mu)$, *справедливы соотношения*

$$T^{-n} \int |\psi_T(x)|^2 \varphi(x) \mu(dx) \le C_1 \sup\{h^{-n}\Phi(h),\ \ 0 \le h \le T^{-1} + T^{-1(n+2)}\} +$$

$$+ C_2 T^{-1(n+2)} \Phi(\infty),$$

$$\Phi(x) = \int\limits_{V(x)} \varphi(s)\, \mu(ds).$$

Доказательство. В силу (5) и (6) имеем: а)

$$T^{-n} V_k(T) = \frac{T^n \pi^{n-1}}{(k!)\Gamma^2((n+1)/2)} \int\limits_V \varphi_k \left| \int\limits_0^{\pi/2} \cos(T|x|\sin\varphi)(\cos\varphi)^n d\varphi \right|^2 \sigma^{*k}(dx) \ge$$

$$\ge B T^n \Phi(T^{-1})(k!)^{-1},$$

где $B = \pi^{n-1}\Big(\Gamma^{-1}((n+1)/2) \int\limits_0^{\pi/2} \cos(\sin\varphi)(\cos\varphi)^n d\varphi\Big)^2$;

б) $$T^{-n} \int\limits_V |\psi_T(x)|^2 \varphi(x)\, \mu(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} T^{-n} \int\limits_V |\psi_T(x)|^2 \varphi(x) \chi_{(k/T < |\bar{x}| \le (k+1)/T)}\, \mu(dx) \le$$

$$\le C^2 T^n \Phi(T^{-1}) + C^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^n}{k^{n+1}} (\Phi((k+1)/T) - \Phi(k/T)) =$$

$$= C^2 T^n \sum_{k=2}^{\infty} \Phi(k/T)((k-1)^{-n-1} - k^{-n-1}) \le$$

$$\le C^2 \left(\sum_{k=1}^{N+1} \Phi(k/T)(T/k)^n (k/(k-1))^n \frac{1}{k(k-1)} + \sum_{k=N+2}^{\infty} T^n \Phi(k/T) \frac{n}{(k-1)^{n+2}} \right),$$

где, полагая $N = [T^{(n+1)/(n+2)}]$, получаем искомое.

Следствие 1. Если справедливо соотношение

$$0 < \liminf_{h\downarrow 0} h^{-n} \sum_k \frac{\Phi_k(h)}{k!} \le \limsup_{h\downarrow 0} h^{-n} \sum_k \frac{\Phi_k(h)}{k!} \le \infty,$$

то существуют константы B_1, B_2, T_0 такие, что для любого $T \ge T_0$ $B_1 T^n \le V(T) \le$ $\le B_2 T^n$.

Для доказательства достаточно воспользоваться леммой 2, полагая $\varphi = \varphi_k$, $\mu \equiv \sigma^{*k}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Лемма 3. *Если существует такое* $a > 0$, *что*

$$\lim_{x \to 0} \sum_k (k!)^{-1} \varphi_k(x) f_k^{*k}(x) = a,$$

то: а) существует $\lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{V(T)}{T^n} = \dfrac{2^{n+1}\pi^{3n/2}}{n\Gamma(n/2)} a$; б) для любых $0 \le s < t \le u < v \le 1$

$$\lim_{T \to \infty} T^{-n} \langle Z_T(v) - Z_T(u), \quad Z_T(t) - Z_T(s) \rangle_p = 0.$$

Для доказательства этой леммы достаточно заметить, что

$$\int_V |\psi_T(x)|^2 dx = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty \frac{(2\pi)^n}{\rho^n} T^n J_{n/2}^2(T\rho) \rho^{n-1} d\rho =$$

$$= 2^{n+1}\pi^{3n/2} T^n \int_0^\infty \rho^{-1} J_{n/2}^2(T\rho) d\rho = T^n \frac{2^{n+1}\pi^{3n/2}\Gamma(n/2)}{2\Gamma(n/2)\Gamma(1+n/2)} = T^n \frac{2^{n+1}\pi^{3n/2}}{n\Gamma(n/2)};$$

б) прямо следует из теоремы Планшереля для преобразования Фурье в $\mathbb{L}_2$.

Лемма 4. *Если в формулировках теорем* 1 *и* 2 *условия* $A1$) *и* $A3$) *заменить соответственно на:*

A 1′) f (*плотность* σ) *ограничена;*

A 3′) $Y = \sum_{k=m}^{\infty} \mathbb{I}_k f_k$, где $f_k \in \mathbb{L}_\infty(V^k, \sigma^k) \cap \mathbb{L}_2(\sigma^k, \mathrm{sym})$, $k \ge m$;

и при этом теоремы 1, 2 *выполняются, то они справедливы в изначальной формулировке.*

Доказательство данной леммы для случая $n = 1$ приведено в [1] и с учетом изменений в лемме 2 не претерпевает существенных изменений.

3. Оценки моментов. Без подробных объяснений используется диаграмный формализм. Для более подробного изучения см. [1–3].

Диаграммой порядка $(n_1, \ldots, n_m)$ называется ненаправленный граф с $N = n_1 + \ldots + n_m$ вершинами, индексированными парой (j, l): $l = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n_l$ такой, что каждая вершина лежит не более чем на одном ребре и каждое ребро соединяет вершины (j_1, l_1) и (j_2, l_2) только при условии $l_1 \ne l_2$. Вершины $(1, l) \ldots (n_l, l)$ образуют l-й уровень диаграммы. Диаграмма называется полной, если каждая вершина лежит на каком-либо ребре. Обозначим через $\Gamma = \Gamma(n_1, \ldots, n_m)$ множество диаграмм; если $\gamma \in \Gamma$, то $|\gamma|$ — число ребер диаграммы γ и $(N - 2|\gamma|)$ вершин не принадлежат ни одному ребру. В дальнейшем рассматриваются только полные диаграммы.

Пусть $l = 1, \ldots, m$, $h_l \in \mathbb{L}_2(\sigma^{n_l}, \mathrm{sym})$, $\{x_{j,l}: 1 \le j \le n_1, 1 \le l \le m\}$ — действительные величины, пронумерованные как $x_1, \ldots, x_N$, $p = 1, \ldots, |\gamma|$, x_p и $x_{N/2+p}$ соответствуют вершинам (j, l) и (j_1, l_1), лежащим на одном ребре. Далее заменим $x_{N/2+p}$ на $-x_p$. Обозначим

$$h_\gamma = \int_V \ldots \int_V \prod_{l=1}^m h_l(\bar{x}) \sigma(dx_1) \ldots \sigma(dx_{N/2}),$$

где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_N) = (x_1, \ldots, x_{N/2}, -x_1, \ldots, -x_{N/2})$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть* $h_l \in \mathbb{L}_2(\sigma^{n_l}, \mathrm{sym})$, $l = 1,\ldots, m$. *Тогда*

$$E\left\{\prod_{l=1}^{m} \mathbb{I}_{n_l}(h_l)\right\} = \sum_{\gamma\in\Gamma_0(n_1,\ldots,n_m)} h_\gamma \cdot (n_1!\ldots n_m!)^{-1},$$

где Γ_0 — множество полных диаграмм.

Доказательство леммы приведено в [3].

Пусть $\mathcal{G} \equiv \{(j, l)\colon 1 \le j \le n_l,\, l \in \mathcal{L}\}$ (для $\mathcal{L} \subset \{1,\ldots, m\}$) обозначает некоторое подмножество уровней полной диаграммы γ. Говорят, что множество уровней $\mathcal{G}$ образует цепочку для $\gamma \in \Gamma_0$, если любая вершина $(j, l) \in \mathcal{G}$ соединена с вершиной $(j_i, l_i) \in \mathcal{G}$. Диаграмма $\gamma \in \Gamma_0$ называется неприводимой, если не существует цепочек с числом уровней меньше m.

Если γ приводима, то существуют $\mathcal{L}_1,\ldots, \mathcal{L}_k$, $k \ge 2$, такие, что $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j = \emptyset$, $i \ne j$, и $\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i = \{1,\ldots, m\}$, причем $\mathcal{G}_i \equiv \{(j, l)\colon 1 \le j \le n_l,\, l \in \mathcal{L}_i\}$, $i = \overline{1, k}$, — неприводимые диаграммы порядка $(n_{l_{i,1}},\ldots, n_{l_{i,g(i)}})$, где $g(i)$ — число уровней i-й цепочки. При этом

$$h_\gamma = \mathbb{I}_\gamma(h_1,\ldots, h_m) = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{G}_i .$$

Диаграмма называется регулярной, если $g(i) = 2$, $i = \overline{1, k}$.

Через Γ_1 обозначим множество регулярных диаграмм.

Лемма 5. *Пусть* $\gamma \in \Gamma_0$ *неприводима, с множеством вершин* $\{(j, l),\ j = 1, \ldots, n_l;\ l = 1,\ldots, m\}$, *где* $m = \sum_{k=1}^{\nu} s(k)$, $m \ge 3$, $N = \sum_{k=1}^{\nu} k \cdot s(k)$ *и* $n_l = k$ *для* $l = s(1) + \ldots + s(k-1), \ldots, s(1)+\ldots+ s(k)$. *Рассмотрим последовательность чисел* $\{q(k)\colon k = 1, \ldots, \nu\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ *такую, что* $q(k) \le s(k)$, *но* $\sum_{k=1}^{\nu} q(k) < m$. *Зафиксируем произвольное множество положительных констант* $\{c_{ki}\colon k = 1, \ldots, \nu;\ i = 1, \ldots, q(k)\}$. *Определим* $h_{ki}(z)\colon V^k \to \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, \nu$, $i = 1, \ldots, s(k)$, *следующим образом:* $h_{ki}(z) \equiv \chi_{(|z_i+\ldots+z_k| \le ki)}$, $i \le q(k)$, $h_{ki}(z) \equiv 1$, $q(k) < i \le s(k)$.

Тогда

$$I_\gamma(h_{11},\ldots, h_{1s(1)},\ldots, h_{\nu 1},\ldots, h_{\nu s(\nu)}) \le |v(1)|^N \max\{1, \|f\|_\infty^N\} \prod_{k=0}^{\nu} \prod_{i=0}^{q(k)} c_{ki} .$$

Соответствующая лемма доказана в [1], отличие состоит лишь в интегрировании по шару в n-мерном пространстве V, за счет чего появляется множитель $|v(1)|$ — объем n-мерного единичного шара.

Лемма 6. *Пусть* $n \in \{1, 2, 3\}$, $f_k \in \mathbb{L}_2(\sigma^k, \mathrm{sym}) \cap \mathbb{L}_\infty(\sigma^k)$, $k = 1,\ldots, \nu$. *Диаграмма* γ *такая же, как и в предыдущей лемме. Тогда*

$$I_\gamma(\underbrace{\zeta_{1T},\ldots,\zeta_{1T}}_{(s(1)\ \text{раз})}, \ldots, \underbrace{\zeta_{\nu T},\ldots,\zeta_{\nu T}}_{(s(\nu)\ \text{раз})}) = o(T^{nm/2}).$$

Доказательство. Положим $\beta(0) = -\infty$, $\beta(1) = -a$, $0 < a < 1$, $\beta(K) = -b +$

$+\delta$, $\beta(K+1)=+\infty$, $0<\beta(j+1)-\beta(j)<\delta$, $1\le j\le K-1$, где $\delta>0$, K конечно. Тогда для любого $T>1$ $[0,\infty]=\bigcup_{j=0}^{k}[T^{\beta(j)},T^{\beta(j+1)})$. Пусть $d(k)=\sum s(j)$, $k=1,\dots,\nu$, $d(0)=0$, $l(1),\dots,l(m)\in\{1,\dots,K\}$ и $g_{k,i,T}\colon V^k\to\mathbb{R}$, $1\le k\le\nu$, $1\le i\le s(k)$, определяются соотношением

$$g_{k,i,T}=\zeta_{k,T}(\bar{x})\chi_{\left(\left|\sum_{j=1}^{k}x_j\right|\in B\right)},$$

где $B=[T^{\beta(l(d(k-1)+i))},T^{\beta(l(d(k-1)+i)+1)}]$, $\bar{x}=(x_1,\dots,x_k)\in V^k$. В силу (6) для любого $\bar{x}\in V^k$ имеем

$$|g_{k,i,T}(\bar{x})|\le\|f_k\|_\infty CT^{(n-1)/2}\min(T^{(n+1)/2},T^{((n+1)/2)(-\beta(l(d(k-1)+i)))})\times$$

$$\times\chi_{\left(\left|\sum_{j=1}^{k}x_j\right|<T^{\beta(l(d(k-1)+i)+1)}\right)}.$$

Так как интервал $[0,\infty)$ разбит на конечное число промежутков, то достаточно показать, что при $T\to\infty$

$$\int_V\dots\int_V\prod_{k=1}^{\nu}\prod_{i=1}^{s(k)}g_{k,i,T}(\bar{x})\sigma(dx_1)\dots\sigma(dx_{N/2})=o(T^{nm/2}).\tag{7}$$

Обозначим $l_{\max}\equiv\max\{l(1),\dots,l(m)\}$. Используем оценку для $g_{k,i,T}$ и лемму 5 в следующих случаях:

1. $l_{\max}=0$. Тогда для всех k,i

$$g_{k,i,T}(\bar{x})=\zeta_{k,T}\chi_{\left(\left|\sum_{j=1}^{k}x_j\right|<T^{-a}\right)}.$$

Соответственно интеграл в (7) равен $O(T^{nm}T^{-na(m-1)})$.

2. $l_{\max}=K$. Для интеграла в (7) получаем оценку

$$O\left\{T^{\frac{n-1}{2}}T^{\frac{n+1}{2}(b-\delta)}\cdot\left(\max\left(T^nT^{-na},T^{\frac{n-1}{2}}T^{\frac{n+1}{2}\delta}T^{\frac{n-1}{2}(-b+\delta)},T^{\frac{n-1}{2}}T^{\frac{n-1}{2}(b-\delta)}\right)\right)^{m-1}\right\}.$$

3. $1\le l_{\max}\le K-1$. В этом случае оценка имеет вид

$$O\left(T^{\frac{n-1}{2}}T^{\frac{n+1}{2}a}\cdot\left(\max\left(T^{n-an},T^{\frac{n-1}{2}}T^{\frac{n-1}{2}(-b+\delta)}T^{\frac{n+1}{2}\delta}\right)\right)^{m-1}\right).$$

Далее из 1 вытекает допустимое значение $a>3/4$, и остается добиться выполнения следующих неравенств:

$$\frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}(b-\delta)<\frac{n}{2}\ \text{ и }\ \frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}a+\left(\frac{n-1}{2}(1-b)+n\delta\right)(m-1)<\frac{n\cdot m}{2}.$$

Выбирая a как угодно близким к $3/4$, δ как угодно малым и полагая $b\equiv1/(n+1)$, видим, что первое неравенство выполняется при всех n, а второе — при $n=1,2,3$.

Следствие 2. *Пусть* $n\in\{2,3\}$, $t_{k_j}\in[0,1]$, $1\le j\le s(k)$, $k=1,\dots,\nu$, $\gamma\in$

$\in \Gamma_0(1,\dots,1,\dots,\nu,\dots,\nu)\setminus\Gamma_1(1,\dots,1,\dots,\nu,\dots,\nu)$, *где* k *появляется* $s(k)$ *раз и* $m = \sum_{k=1}^{\nu} s(k)$. Тогда

$$\mathbb{I}_\gamma(\zeta_{1,T,t_{11}},\dots,\zeta_{1,T,t_{1s(1)}},\dots,\zeta_{\nu,T,t_{\nu 1}},\zeta_{\nu,T,t_{\nu s(\nu)}}) = o(T^{n\cdot m/2}).$$

Доказательство не отличается от случая $n=1$, приведенного в [1].

Замечание. Так как $|\zeta_{k,T,t}-\zeta_{k,T,s}|$ для $t,s\in(0,1]$ имеет такое же асимптотическое представление при $T\to\infty$, как и $\zeta_{k,T,t}$, то следствие 2 остается справедливым, если заменить $\zeta_{k,T,t_{kj}}$ на $\zeta_{k,T,t_{kj}}-\zeta_{k,T,t_{kj}}$.

Нетрудно подсчитать (см, например, [1]), что

$$|\Gamma_1| = \begin{cases} 0, & \text{если хоть одно } s(k) \text{ нечетно;} \\ \prod_{k=1}^{\nu}\left((k!/2)^{s(k)/2}\dfrac{s(k)!}{(s(k)/2)!}\right), & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{8}$$

а также для всех $\gamma\in\Gamma_1$

$$\mathbb{I}_\gamma(\zeta_{1,T,t},\dots,\zeta_{N,T,t}) = \prod_{k=1}^{\nu}\|\zeta_{k,T,t}\|_{\sigma^k}^{s(k)}.$$

Из лемм 5, 6 и следствия 2 непосредственно вытекает

$$\lim_{T\to\infty}\left(T^{-nm/2}E\left(\prod_{k=1}^{\nu}(Z_{T,k}(t))^{s(k)}\right) - \prod_{k=1}^{\nu}\left\{\left(\frac{V_k(Tt^{1/n})}{T^n}\right)^{s(k)/2}\cdot EU_k^{s(k)}\right\}\right) = 0,$$

где $\{U_k\}_{k=1}^{\nu}$ — независимые величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 7. *При* $T\to\infty$ *все моменты произведений координат случайного вектора* $T^{-n/2}(Z_{T,1}(t),\dots,Z_{T,\nu}(t))$ *асимптотически равны соответствующим моментам от вектора* $((V_1(Tt^{1/n})T^{-n})^{1/2}U_1,\ \dots,\ (V_\nu(Tt^{1/n})T^{-n})^{1/2}U_\nu)$, *где* U_1, $\dots$, U_ν *независимы, имеют стандартное нормальное распределение.*

Пусть $t>s$. Тогда, воспользовавшись теоремой Планшереля, получим

$$\int_V(\psi_{T,t}-\psi_{T,s})^2dx = \int_V(\psi_{T,t}^2+\psi_{T,s}^2-2\psi_{T,t}\psi_{T,s})dx = \int_V(\psi_{T,t}^2-\psi_{T,s}^2)dx =$$

$$= n|\upsilon(1)|T^nt\int_V J_{n/2}^2(Tt^{1/n}\rho)\frac{d\rho}{\rho} - n|\upsilon(1)|T^ns\int_V J_{n/2}^2(Ts^{1/n}\rho)\frac{d\rho}{\rho} = \int_V\psi_{T,t-s}^2dx.$$

Отсюда $T^{-n}\|\zeta_{k,T,t}-\zeta_{k,T,s}\|_{\sigma^k}^2 = T^{-n}(V_k(T(t-s)^{1/n}) + o(1)$, при $T\to\infty$ (аналогично пункту а) леммы 3) с учетом того, что $\limsup_{T\to\infty}T^{-n}V(T)<\infty$ и $\limsup_{h\downarrow 0}|h^{-1}\varphi_k(x)f^{*k}-a_k|=0$ для всех $k>0$.

Далее, пусть $f_k\in\mathbb{L}_\infty(\sigma^k)$, γ регулярная: $s(k)$ уровней длины k. Зафиксируем $t_0=0<t_1<\dots<t_p\le 1$ и неотрицательные целые r_{jk}, $j=1,\dots,p$, такие, что $r_{1k}+\dots+r_{pk}=s(k)$. Тогда в силу леммы 6, следствия 2 и замечания при $T\to\infty$ получаем

$$T^{-nm/2}\left\{E\left(\prod_{k=1}^{\nu}\prod_{j=1}^{p}(\mathbb{I}_k(\zeta_{k,T,t_j}-\zeta_{k,T,t_{j-1}}))^{r_{jk}}\right)-\right.$$

$$\left.-\prod_{k=1}^{\nu}\prod_{j=1}^{p}E(\mathbb{I}_k(\zeta_{k,T,t_j}-\zeta_{k,T,t_{j-1}}))^{r_{jk}}\right\}$$

отличается на $o(1)$ от

$$\prod_{k=1}^{\nu}(k!)^{-s(k)}\sum_{\gamma\in\Gamma^*}T^{-nm/2}\,\mathbb{I}_\gamma(\zeta_{1,T,t_1},\ldots,\zeta_{N,T,t_p}-\zeta_{N,T,t_{p-1}}), \tag{9}$$

где $(\zeta_{k,T,t_j}-\zeta_{k,T,t_{j-1}})$ входит как аргумент r_{jk} раз, а $\Gamma^*\subset\Gamma_1$ — множество регулярных диаграмм, которые соединяют по крайней мере одну пару уровней, соответствующую t_l, t_{l-1} и t_j, t_{j-1} с $l\neq j$.

Лемма 3, б) показывает, что каждое слагаемое в (9) есть $o(1)$. Отсюда аналогично лемме 7 следует асимптотическое стремление при $T\to\infty$ $E(\mathbb{I}_k(\zeta_{k,T,t_j}-$ $-\zeta_{k,T,t_{j-1}}))^{r_{jk}}$ к

$$\left(\frac{V_k(T(t_j-t_{j-1})^{1/n})}{t_j-t_{j-1}}\right)^{\frac{r_{jk}}{2}}E(W(t_j)-W(t_{j-1}))^{r_{jk}},$$

где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс.

Таким образом, получена следующая лемма.

Лемма 8. *Из условий A 1'), A 2'), A 3') следует, что для* $0=t_0<t_1<\ldots<t_p$ *и произвольной последовательности неотрицательных целых чисел* $\{r_{jk}\colon j=$ $=1,\ldots,p,\ k=1,\ldots,\nu\}$

$$\lim_{T\to\infty}\left\{T^{-nm/2}E\prod_{k=1}^{\nu}\prod_{j=1}^{p}(\mathbb{I}_k(\zeta_{k,T,t_j}-\zeta_{k,T,t_{j-1}}))^{r_{jk}}-\right.$$

$$\left.-\prod_{k=1}^{\nu}\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{V_k(T(t_j-t_{j-1}))}{T^n(t_j-t_{j-1})}\right)^{\frac{r_{jk}}{2}}E(W(t_j)-W(t_{j-1}))^{r_{jk}}\right\}=0,$$

где $m=\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{p}r_{jk}$.

4. Доказательства теорем 1 и 2 опираются на метод моментов и теорему 4.2 из [4] и для $n=1$ приведены в [1]. Для случая $n=2, 3$ с учетом приведенных лемм доказательства аналогичны.

1. *Chambers D., Slud E.* Central Limit Theorems for Nonlinear Functionals of Stationary Gaussian Processes // Probab. Theory and Relative Fields. – 1989. – **80**. – p. 323–346.
2. *Леоненко Н. Н., Иванов А. В.* Статистический анализ случайных полей.– Киев: Выща шк., 1986.– 216 с.
3. *Major P.* Multiple Wiener – Itô Integrals // Lect. Notes Math. – 1981. – **849**. – 127 p.
4. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер.– М.: Наука, 1977.– 351 с.

Получено 09. 03. 92