УДК 517.5

А. В. Бондарь, д-р физ.-мат. наук,
Е. А. Лукьянова, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О ПСЕВДОАНАЛИТИЧНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С ПОСТОЯННЫМ σ-РАСТЯЖЕНИЕМ

Доказывается теорема о псевдоаналитичности непрерывных функций, обладающих постоянным σ-растяжением, являющаяся аналогом известных результатов Бора, Радемахера, Меньшова, Трохимчука об аналитичности функций, обладающих постоянным растяжением.

Доводиться теорема про псевдоаналітичність неперервних функцій з постійним σ-розтягом, яка є аналогом відомих результатів Бора, Радемахера, Меньшова, Трохимчука про аналітичність функцій з постійним розтягом.

В тридцатых годах текущего столетия Д. Е. Меньшов ввел локальные условия на определенные в областях $D \subset \mathbb{C}$ непрерывные функции f, — так называемые условия K', K'', K''', которые были использованы самим Д.Е. Меньшовым и его последователями для установления ряда практически неулучшаемых в рамках принятого подхода критериев аналитичности [1 – 3].

Целью настоящей статьи является доказательство критерия псевдоаналитичности непрерывных функций, использующего определяемое в статье условие K''_σ, обобщающее условие K″ Д. Е. Меньшова. При этом будут использованы определения и результаты из [4].

Пусть D — область комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $\sigma = p - iq$, $p(z) > 0$ $\forall z \in D$, — функция класса $C(D)$. Функция $f = u + iv$ класса C^1 называется σ-аналитической в D, если она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} + \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}\frac{\partial \bar f}{\partial \bar z} = 0, \tag{1}$$

которое эквивалентно уравнению

$$\sigma\frac{\partial u}{\partial \bar z} + i\frac{\partial v}{\partial \bar z} = 0 \tag{2}$$

или системе

$$\begin{aligned} p\frac{\partial u}{\partial x} + q\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= 0,\\ -q\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Если f имеет обобщенные частные производные в смысле Соболева, почти всюду в D удовлетворяющие уравнению (1) (или (2), (3)), то f называется обобщенно σ-аналитической в D [5, 6].

***Определение* 1.** *Будем говорить, что функция $f = u + iv$ удовлетворяет в точке $a \in D$ условию K''_σ, если из точки a исходят три луча $t_1(a)$, $t_2(a)$, $t_3(a)$, лежащие на различных прямых, вдоль которых существует один и тот же предел*

$$R(a) = \lim_{\substack{z \to a \\ z \in t_\nu(a)}} \left| \frac{\sigma(z)[u(z) - u(a)] + i[v(z) - v(a)]}{z - a} \right|.$$

***Определение* 2.** *Будем говорить, что функция f является прямой в точке*

© А. В. БОНДАРЬ, Е. А. ЛУКЬЯНОВА, 1993

$a \in D$, если существуют две последовательности $\{z'_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{z''_n\}_{n=1}^{\infty}$ из D, сходящиеся к точке a с полукасательными l', l'' в точке a, лежащими на различных прямых, такие, что все точки $w'_n = f(z'_n)$, $w''_n = f(z''_n)$ отличны от $b = f(a)$ и последовательности $\{w'_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{w''_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют в точке b полукасательные L', L'' со следующим свойством: если $0 < (\widehat{l', l''}) < \pi$ и этот угол отсчитывается в положительном направлении от l', то $0 \le (\widehat{L', L''}) < \pi$ при отсчете последнего угла от L'. Если f является прямой в каждой точке a некоторого подмножества $A \subset D$, то будем говорить, что функция f является прямой на A.

Через $C(D)$ и $C^k_\alpha(D)$ будем обозначать классы непрерывных функций и функций, имеющих непрерывные по Гельдеру с показателем $\alpha, 0 < \alpha \le 1$, k-е частные производные; при $k = 0$ полагаем $C_\alpha(D) = C^0_\alpha(D)$.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $\sigma = p - iq$ — функция класса $C^1_\alpha(D)$ и f — непрерывная в D функция, обладающая свойством K''_σ в каждой точке $a \in D$, за возможным исключением не более чем счетного их множества S. Если функция f является прямой почти в каждой точке $a \in D$, то она σ-аналитична в D и имеет вторые частные производные, принадлежащие классу $C_\gamma(D)$ с показателем γ, сколь угодно близким к α. Кроме того:*

a) если $\sigma \in C^k_\alpha(D)$, $k \ge 1$, то $f \in C^{k+1}_\gamma(D)$, где γ сколь угодно близко к α;

b) если $\sigma \in C^\infty(D)$, то $f \in C^\infty(D)$;

c) если σ — аналитическая функция от x и y, то f — аналитическая функция от x и y.

Докажем ряд лемм, необходимых для доказательства теоремы 1.

Лемма 1. *Если функция f в точке $a \in D$ $\mathbb{R}$-дифференцируема, удовлетворяет условию K''_σ и является прямой, то она σ-моногенна ([4], определение 2) в этой точке.*

Доказательство. Из $\mathbb{R}$-дифференцируемости f в точке a и леммы 2 [4] вытекает, что вдоль лучей $t_\nu(a)$ существуют σ-производные числа

$$\lambda_\nu = f^\sigma_z(a) + f^\sigma_{\bar z}(a)\, e^{-2i\alpha_\nu}, \tag{4}$$

где α_ν — угол между лучем t_ν и осью $0x$, а из условия K''_σ вытекает, что эти производные числа равны по модулю:

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = R(a),$$

т. е. лежат на окружности радиуса $R(a)$ с центром в нуле. С другой стороны, из (4) следует, что λ_ν лежат на окружности с центром $f^\sigma_z(a)$ и радиусом $r = |f^\sigma_{\bar z}(a)|$. Рассмотрим два возможных случая.

1. Если $f^\sigma_z(a) \ne 0$, то эти окружности пересекаются не более чем в двух точках и поэтому два из производных чисел, например, λ_1 и λ_2, должны совпадать. В этом случае

$$f^\sigma_{\bar z}(a)\,[\,e^{-2i\alpha_1} - e^{-2i\alpha_2}\,] = 0, \ \alpha_1 - \alpha_2 \ne k\pi,$$

и следовательно, $f^\sigma_{\bar z}(a) = 0$, т. е. f σ-моногенна в точке a.

2. Если же $f_z^{\sigma}(a) = 0$, то в точке a будут выполнены равенства

$$pU_x - qU_y + V_y = 0 \text{ и } V_x - qU_x - pU_y = 0,$$

из которых следует, что якобиан отображения f в точке a равен

$$-p(a)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}(a)\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}(a)\right)^2\right].$$

Так как по условию f — прямая и $p(a) > 0$, то этот якобиан должен быть равным нулю. Тогда $f_{\bar z}^{\sigma}(a) = 0$ и функция f σ-моногенна в точке a. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, F — совершенное подмножество из D и f — непрерывная функция, удовлетворяющая условию K''_{σ} на некотором подмножестве $Q \subset F$ не первой категории на F. Тогда найдутся непустая порция $P = F \cap B$, где B — круг, и постоянная L такие, что*

$$|f(z') - f(z'')| < L\,|z' - z''|$$

для произвольных точек $z', z'' \in P$.

Доказательство. Так как $\sigma = p - iq$ и $p(z) > 0$ $\forall z \in D$, то $|\sigma(z)| > 0$ $\forall z \in D$. Поэтому из условия K''_{σ} для точек $a \in Q$ вытекает

$$\varlimsup_{\substack{\Delta z \to 0 \\ a+\Delta z \in t_{\nu}(a)}} \left|\frac{f(a+\Delta z) - f(a)}{\Delta z}\right| < \infty \quad \forall a \in Q,$$

т. е. выполнены условия леммы 13 [3], из которой и следует утверждение леммы 2. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $Q = [a, b; c, d]$ — прямоугольник на плоскости $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ диаметра меньше единицы, $\sigma = p - iq$, $p(z) > 0$ $\forall z \in Q$ класса $C^1_{\alpha}(Q)$, $0 < \alpha \le 1$, и f — непрерывная на Q функция, которая абсолютно непрерывна почти на каждом горизонтальном и вертикальном отрезках*

$$I_y = \{(x, y):\ a \le x \le b\},\quad y \in [c, d],$$

и

$$I_x = \{(x, y):\ c \le y \le d\},\quad x \in [a, b].$$

Если частные производные функций u и v суммируемы на Q и удовлетворяют почти в каждой точке Q уравнению (2), *то функция f σ-аналитична внутри Q* и *ее частные производные принадлежат некоторому классу $C_{\alpha}(Q)$,* $0 < \gamma < 1$.

Доказательство. Пусть φ — произвольная функция класса C^{∞} с компактным носителем, содержащимся во внутренности Q. Тогда частные производные функции φf суммируемы на Q и

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}(\varphi f) = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar z} f + \varphi \frac{\partial f}{\partial \bar z}.$$

Поэтому, используя теорему Фубини, получаем

$$\iint\limits_Q \frac{\partial \varphi}{\partial \bar z} f\,dx\,dy + \iint\limits_Q \varphi \frac{\partial f}{\partial \bar z}\,dx\,dy = \iint\limits_Q \frac{\partial \varphi}{\partial \bar z}(\varphi f)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_c^d \left[\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}(\varphi f)dx \right] dy + \frac{1}{2} i \int_a^b \left[\int_c^d \frac{\partial}{\partial y}(\varphi f)\, dy \right] dx.$$

Так как для почти каждого $y \in [c, d]$ функция $x \to \varphi(x) f(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$ и ее производная суммируема на $[a, b]$, то для таких y

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}(\varphi f)\, dx = \varphi(b) f(b) - \varphi(a) f(a),$$

а так как носитель φ содержится во внутренности Q, то $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, и поэтому первый интеграл в (5) равен нулю. Совершенно аналогично доказывается, что второй интеграл в (5) также равен нулю. Тем самым доказано, что существующая почти всюду на Q обычная частная производная $\partial f / \partial \bar{z}$ является также обобщенной производной функции f в смысле Соболева [5, с. 47]. Так как эта частная производная удовлетворяет почти всюду на Q уравнению (1), то функция f является обобщенно σ-аналитической во внутренности Q. И по теореме 3.30 [5, с. 219] существует такая аналитическая во внутренности функция Φ, что $f(z) = \Phi[W(z)]$, где W — основной гомеоморфизм уравнения Бельтрами

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} - q \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad q(z) = \frac{\sigma(z) - 1}{\sigma(z) + 1}\left(\frac{\overline{\partial W}}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^{-1},$$

причем в силу теоремы 2.15 [5, с. 113] можно считать, что W принадлежит некоторому классу C_β, $0 < \beta < 1$. Поэтому функция f также принадлежит классу $C_\beta(Q)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi = \varphi_1 + i\,\varphi_2 = p\,u + i\,(v - qu)$. Эта функция имеет почти всюду на Q частные производные, причем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}\, u$$

почти всюду на Q, и, кроме того, легко видеть, что $\partial\varphi / \partial \bar{z}$ также является и обобщенной производной для φ в смысле Соболева. Отсюда по теореме 1.16 [5, с. 50]

$$\varphi(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi} = \iint_Q \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}(\zeta)\; u(\zeta)}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta), \tag{6}$$

где Φ — аналитическая во внутренности Q функция. Поскольку оператор

$$T g = -\frac{1}{\pi}\iint_Q \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta)$$

является вполне непрерывным оператором в $C_\gamma(Q)$ и отображает это пространство в C_γ^1 [5, с. 77], а функция $\dfrac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} u$, учитывая, что $\operatorname{diam} Q < 1$, очевидно, принадлежит классу $C_\gamma(Q)$, где $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$, то из (6) вытекает, что функция φ также принадлежит классу $C_\gamma^1(\operatorname{int} Q)$. А так как из определения φ следует, что почти всюду на Q

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{p}\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - u\frac{\partial p}{\partial x}\right],\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= q\,\frac{\partial u}{\partial x} + u\,\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x},\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{p}\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - u\frac{\partial p}{\partial y}\right],\\
\frac{\partial v}{\partial y} &= q\,\frac{\partial u}{\partial y} + u\,\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y},
\end{aligned} \tag{7}$$

то частные производные функций u и v удовлетворяют условию Гельдера с показателем γ на множестве E (полной меры) тех точек из Q, в которых они существуют. Из этого легко следует, что u и v имеют в каждой точке множества $\operatorname{int} Q$ частные производные класса $C_\gamma(\operatorname{int} Q)$ и равенства (7) имеют место $\forall\,(x, y) \in \operatorname{int} Q$. Действительно, если $y \in [c, d]$ такое, что функция $x \to u(x, y)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, то

$$u(x, y) = u(a, y) + \int_a^x \frac{1}{p}\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - u\frac{\partial p}{\partial x}\right]dx, \quad x \in [a, b], \tag{8}$$

а так как множество A тех точек из $[c, d]$, для которых выполняется (8), всюду плотно на $[c, d]$ и функция u по условию непрерывна, то (8) выполняется $\forall\, y \in [c, d]$. Поскольку в (8) под интегралом стоит непрерывная функция, то по теореме о дифференцировании неопределенного интеграла $\partial u / \partial x$ совпадает с подынтегральным выражением во всех точках $x \in (a, b)$ при фиксированном $y \in [c, d]$. Аналогичные рассуждения можно провести и для остальных частных производных.

Тем самым доказано, что u и v имеют всюду во внутренности Q частные производные класса $C_\gamma(\operatorname{int} Q)$. Кроме того, эти частные производные почти всюду на Q удовлетворяют уравнению (2), и из непрерывности этих частных производных и функции σ вытекает, что уравнение (2) справедливо во всех точках множества $\operatorname{int} Q$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *В условиях теоремы* 1 *существует открытое всюду плотное в* D *множество* O, *на котором функция* f σ*-аналитична.*

Доказательство. Пусть V — произвольное открытое подмножество, содержащееся со своим замыканием в D. Полагая в лемме 2 $F = \overline{V}$, заключаем, что найдется такой открытый круг $B \subset \overline{V}$, на котором функция f удовлетворяет условию Липшица. Тогда f $\mathbb{R}$-дифференцируема почти в каждой точке $a \in B$, и в этом случае согласно лемме 1 f σ-моногенна почти в каждой точке $a \in B$. Очевидно, что для любого прямоугольника $Q \subset B$ выполнены все условия леммы 3, из которой следует, что f σ-аналитична в Q, а значит, f σ-аналитична в B. Из произвольности V вытекает, что точки, где f σ- аналитична, образуют открытое всюду плотное в D множество O. Лемма 4 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Обозначим через O множество всех тех точек $a \in D$, в которых функция f σ-аналитична, т. е. $a \in O$ тогда и только тогда, когда f σ-аналитична в некоторой окрестности точки a. По лемме 4 множество O всюду плотно в D. Если $O = D$, то теорема доказана. Предположим, что $O \neq D$, и покажем, что это предположение противоречит условиям доказываемой теоремы.

Если $F = D \setminus O \neq \emptyset$, то это множество замкнуто и по теореме об устранимой особой точке [6, с. 167] не имеет изолированных точек, т. е. совершенно. По лемме 2 найдется порция $P = F \cap B$, где $B \subset \overline{B} \subset D$ — круг, на котором f удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой L. Пусть f_0 — глобальный гомеоморфизм уравнения (1). Эта функция непрерывно дифференцируема в D и $\partial_\sigma f_0(a) \neq 0 \ \ \forall\ a \in D$. Поэтому

$$0 < m = \min_{a \in \overline{B}} |\partial_\sigma f_0(a)|, \tag{9}$$

и f_0 удовлетворяет условию Липшица на $\overline{B}$ с некоторой константой L_1. Из (9) согласно формуле (14) [4] вытекает, что найдется такое $\delta > 0$, для которого будет выполнено неравенство

$$|f_0(z) - f_0(a)| \geq \delta\, |z - a|, \quad z, a \in \overline{B}. \tag{10}$$

Пусть $G_1, G_2, \ldots$ — все компоненты открытого множества $B \setminus F$. Если для компоненты G_k существует такая константа b, что

$$\partial_\sigma f(z) = -b\, \partial_\sigma f_0(z) \quad \forall\ z \in G_k,$$

то положим $b_k = b$, в противном случае полагаем $b_k = 0$. Возьмем теперь такое $b > (L + \delta)/\delta$, которое не совпадает ни с одним из чисел b_k, $k = 1, 2, \ldots$, и рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(z) = f(z) + b f_0(z).$$

Тогда для $z, a \in P$ с учетом (10) имеем

$$|g(z) - g(a)| \geq |b f_0(z) - b f_0(z)| - |f(z) - f(a)| \geq$$
$$\geq (b\delta - L)|z - a| \geq \delta\, |z - a|. \tag{11}$$

Покажем, что в каждой компоненте G_k функция g не есть константа. Действительно, если для некоторого k существует такая константа C, что

$$g(z) = f(z) + b f_0(z) \equiv C,$$

то

$$\partial_\sigma g(z) = -b\, \partial_\sigma f_0(z) \quad \forall\ z \in G_k,$$

т. е. b должно совпадать с b_k, что противоречит выбору b.

Поскольку g не является константой ни в одной компоненте G_k и является σ-аналитической, то из теоремы 3.30 [5, с. 219] следует, что g осуществляет внутреннее отображение по Стоилову каждой такой компоненты с сохранением ориентации. В силу (11) никакой континуум на $F \cap B$ не сводится в точку и образ $F_1 = (F \cap B)$ нигде не плотен на плоскости, т. е. для g выполнены все условия теоремы 8 [3, с. 84]. Согласно этой теореме g является внутренним в B и, в частности, найдутся точка $a_0 \in F_1$ и прямоугольник $Q = [a, b; c, d] \subset B$, содержащий внутри точку a_0, на котором функция g однолистна.

Покажем, что для g и Q выполняются все условия леммы 3. Для этого сначала докажем, что частные производные функций $u_1 = \operatorname{Re} g$ и $v_1 = \operatorname{Im} g$ суммируемы в $Q \setminus F$. Действительно, так как функция g σ-аналитична в $\operatorname{int}(Q \setminus F)$, то для ее якобиана справедливо равенство

$$\mathcal{J}(g) = \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2\right].$$

А так как интеграл от якобиана однолистной функции g равен мере образа множества $g(\operatorname{int}(Q\setminus F))$, которая конечна, то частные производные функции u_1 по x и y суммируемы с квадратом в $\operatorname{int}(Q\setminus F)$ и, следовательно, в силу ограниченности этого множества суммируемы. А из системы (3) вытекает, что частные производные функции v_1 также суммируемы в $\operatorname{int}(Q\setminus F)$.

Согласно теореме Фубини найдутся множества полной меры $E_1 \subset [a, b]$ и $E_2 \subset [c, d]$ такие, что частные производные функций u_1 и v_1 суммируемы на множествах $I_y\setminus F$, $y\in E_2$, и $I_x\setminus F$, $x\in E_1$.

Пусть $y\in E_2$ фиксировано. Так как на F функция g, а значит, и u_1 липшицевы, а на $I_y\setminus F$ гладкие, то функция u_1 на I_y обладает N-свойством, т.е. переводит каждое множество нулевой меры в множество нулевой меры.

Кроме того, если P — множество всех тех точек из I_y, в которых существует частная производная $\frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y)$, то эта частная производная суммируема на P (суммируемость на $P\setminus F$ следует из того, что $y \in E_2$, а на $P \cap F$ функция u_1 липшицева).

В силу теоремы 7.7 [7, с. 412] эти условия достаточны для того, чтобы функция u_1 была абсолютно непрерывной на I_y. Аналогично доказывается, что функция u_1 абсолютно непрерывна на I_x, $x\in E_1$, и функция v_1 абсолютно непрерывна на отрезках I_y, $y\in E_2$, и I_x, $x\in E_1$. Из доказанного следует, что частные производные однолистной функции g существуют почти всюду в Q, а тогда по лемме 1 [8, с. 28] функция g $\mathbb{R}$-дифференцируема почти всюду на Q. В этом случае согласно лемме 1 функция g σ-моногенна почти всюду на Q, т. е. почти во всех точках $a \in Q$ частные производные функции g удовлетворяют уравнению (2). Так как эти частные производные суммируемы на Q, то согласно лемме 3 функция g σ-аналитична в $\operatorname{int} Q$. Отсюда следует, что функция $f = g - bf_0$ также σ-аналитична в $\operatorname{int} Q$ и, в частности, в точке $a_0 \in$ $\in F \cap Q$, что противоречит определению множества F. Тем самым получено противоречие с допущением $D\setminus O \neq \emptyset$. Следовательно, $D = O$ и, таким образом, функция f σ-аналитична в D. Утверждения *а*) — *в*) о гладкости f вытекают из теорем 3 – 5 [6, с. 134]. Теорема 1 доказана.

1. *Menchoff D.* Sur une généralizations d'un théorème de M. N. Bohr // Мат. сб. – 1937. – **44**, № 2. – С. 339–356.
2. *Menchoff D.* Sur la généralizations des conditions de Cauchy – Riemann // Fund. Math. – 1935. – **25**. – P. 59–97.
3. *Трохимчук Ю. Ю.* Непрерывные отображения и условия моногенности. – М.: Физматгиз, 1963. – 212 с.
4. *Бондарь А. В., Лукьянова Е. А.* О структуре множеств σ-моногенности непрерывных функций // Укр. мат. журн.– 1993.– **45**, № 2. – С. 226–232.
5. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.
6. *Положий Г. Н.* Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. — Киев: Изд-во Киев. университета, 1965. – 441 с.
7. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 494 с.
8. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. – 132 с.

Получено 11. 03. 92