УДК 517. 36

А. А. Мартынюк (Ин-т механики НАН Украины, Киев),
В. Г. Миладжанов, М. М. Муминов (Андижан. ун-т, Узбекистан)

УСТОЙЧИВОСТЬ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ПРИ СТРУКТУРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

By using the matrix Lyapunov function, we establish conditions of (uniform) stability and (uniform) asymptotic stability of a large-scale discrete system under structural perturbations.

Встановлено умови стійкості (рівномірної) і асимптотичної стійкості (рівномірної) великомасштабної дискретної системи на основі матричної функції Ляпунова. При цьому досліджувана система містить структурні збурення.

Дискретные уравнения являются удовлетворительными моделями многих нестационарных процессов в технике и технологии. Они возникают также в численных алгоритмах оптимизации, в задачах алгебры и анализа. Например, в последнее время в связи с применением в системах управления и регулирования радиолокационных, телеметрических и цифровых вычислительных устройств импульсные системы обрели новое содержание, так как во многих новых технических системах информация в общем используется только в дискретные и циклически повторяющиеся моменты времени. При исследовании систем импульсного и релейного регулирования возникают вопросы определения устойчивости стационарного состояния движения или равновесия, когда в возмущенном движении известны состояния в дискретные равноотстоящие друг от друга моменты времени. Эти вопросы тесно связаны с изучением свойств решений систем разностных уравнений и поэтому имеет смысл рассматривать их в общем виде. Методы исследования качественных свойств решений дискретных систем нашли свое отражение во многих работах (см., например, [1 – 8]).

Важное место в исследовании устойчивости дискретных систем занимает прямой метод Ляпунова, являющийся естественным обобщением прямого метода Ляпунова исследования непрерывных систем. Различные обобщения метода Ляпунова для крупномасштабных дискретных систем (КМДС) основаны на скалярной функции [3], векторной функции [3, 5, 6] либо матричной вспомогательной функции [9, 10].

Целью данной работы является получение условий устойчивости состояния равновесия КМДС при структурных возмущениях на основе матричнозначной функции Ляпунова. При этом, как и в непрерывном случае [11 – 14], рассматриваются две общие постановки.

Проблема А. Пусть КМДС расщеплена на взаимосвязанные подсистемы. Установление формы агрегирования системы, определяющей условия, при которых устойчивость исходной системы следует из устойчивости независимых подсистем и качественных свойств их взаимосвязей, представляет содержание данной проблемы.

Проблема Б. Пусть КМДС расщеплена на взаимосвязные подсистемы. Установление формы агрегирования, обеспечивающей одновременно понижение порядка системы и упрощение условий, при которых устойчивость исходной системы следует из свойств взаимосвязанных подсистем без использования информации об устойчивости независимых подсистем, представляет содержание этой проблемы.

Заметим, что устойчивость КМДС в такой постановке исследуется здесь впервые.

Описание и декомпозиция КМДС при структурных возмущениях. Рассмотрим КМДС, поведение которой определяется векторным уравнением в виде

$$(S):\ x(\tau+1) = f(\tau, x(\tau), P), \tag{1}$$

где $\tau \in N^+ \triangleq \{t_0 + m\}$, $t_0 \geq 0$, $m = 0, 1, \ldots$, $x \in R^n$, $f \in \mathcal{F}$.

Введем семейства функций

$$\mathcal{F} = \{f^1, f^2, \ldots, f^N\}, \quad \mathcal{F}_i = \left\{f_i^1, f_i^2, \ldots, f_i^N\right\},$$

где

$$f^k \in C(N^+ \times R^n \times R^{s \times q}, R^n), \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{2}$$

$$f_i^k \in C(N^+ \times R^n \times R^{1 \times q}, R^{n_i}), \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_s = n. \tag{3}$$

Число N в определении семейств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, и вариации показателя $k = k(\tau)$ на множестве $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$, $k(\tau) \in \mathcal{N}\ \forall\, \tau \in N^+$, описывают структурные изменения системы.

Система (S) структурно инвариантна тогда и только тогда, когда показатель $k(\tau)$ постоянен, т. е. $k(\tau) = k$ или множество $\mathcal{N}$ единичное, $\mathcal{N} = \{k\}$. Число N указывает количество всех возможных структур системы (S).

Функция f удовлетворяет условиям существования и единственности решения $x(\tau;\, x_0, t_0)$ уравнения (1) для любых $x_0 \in R^n$, $t_0 \geq 0$ и $\tau \in N^+$, кроме того, $x(t_0;\, x_0, t_0) = x_0$. Предположим, что $f(\tau, x(\tau), P) = 0$ при всех $\tau \in N^+$ и $P \in \mathcal{P}$, если и только если $x(\tau) = 0$, т.е. состояние $x(\tau) = 0$ — единственное состояние равновесия системы (1).

Обозначим через $\mathcal{P}$ класс всех допустимых матриц P:

$$\mathcal{P} = \{P:\ P_1 \leq P(\tau) \leq P_2 \quad \forall\, \tau \in N\}.$$

Здесь матрица $P = \left(P_1^T, P_2^T, \ldots, P_s^T\right)^T \in R^{s \times q}$ характеризует внутренние и (или) внешние возмущения, а матрицы P_1 и P_2 заранее определены; множество $\mathcal{P}$ может быть также одноэлементным $\{0\}$. Буквой s обозначено количество подсистем $\{S_i\}$ в КМДС (S). Взаимосвязанная подсистема (S_i) описывается уравнением

$$(S_i):\ x_i(\tau + 1) = f_i(\tau, x(\tau), P_i), \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{4}$$

Далее векторы $x(\tau)$ и f расчленяются на субвекторы:

$$x(\tau) = \left(x_1^T(\tau), x_2^T(\tau), \ldots, x_s^T(\tau)\right)^T, \quad f = \left(f_1^T, f_2^T, \ldots, f_s^T\right)^T,$$

поэтому $f_i \in \mathcal{F}_i$.

Обозначим $x^i(\tau) = (0^T, 0^T, \ldots, 0^T, x_i^T(\tau), 0^T, \ldots, 0^T)^T$. Состояние i-й невзаимодействующей подсистемы $(\hat{S}_i)$ описывается системой

$$(\hat{S}_i):\ x_i^i(\tau + 1) = f_i(\tau, x^i(\tau), 0), \tag{5}$$

где $x_i(\tau) \in R^{n_i}$ — вектор состояния подсистемы $(\hat{S}_i)$.

Очевидно, что функции f_i^*, определяемые с помощью выражений

$$f_i^*(\tau, x(\tau), P_i) = f_i(\tau, x(\tau), P_i) - f_i(\tau, x^i(\tau), 0)$$

$$i = 1, 2, \ldots, s, \tag{6}$$

описывают действие системы (S) на ее i-ю подсистему (S_i) совокупности (4), что можно представить посредством уравнения

$$(S_i)\colon\ x_i(\tau+1) = f_i(\tau, x^i(\tau), 0) - f_i^*(\tau, x^i(\tau), P_i),$$
$$i = 1, 2, \ldots, s. \tag{7}$$

Для того чтобы более точно описать структурные изменения системы (S) так, как в непрерывном случае (см. [2]), вводятся следующие обозначения.

Структурный параметр $s_{ij}\colon N^+ \to \{0, 1\}$ ($s_{ij}\colon N^+ \to [0, 1]$ или $s_{ij} = s_{ij}(\tau)$ $\forall\, \tau \in N^+$) является (i, j) элементом структурной матрицы S_i i-подсистемы (S_i):

$$S_i = (s_{i1}J_i, \ldots, s_{iN}J_i), \qquad J_i = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1) \in R^{n_i \times n_i}.$$

Отметим, что она может быть такой (но это не обязательно), что из соотношения $s_{ij} = 1$ следует $s_{ij}(\tau) = 0$ при всех $k \neq j$.

Функция $h_i\colon N^+ \times R^n \times R^{1\times q} \to R^{N_{ni}}$,

$$h_i = \left(f_i^{1^T}, f_i^{2^T}, \ldots, f_i^{N^T}\right)^T \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, s,$$

описывающая все возможные взаимодействия подсистем (7), входит в правую часть уравнения

$$(S_i)\colon\ x_i(\tau+1) = f_i(\tau, x^i(\tau), 0) + S_i(\tau) h_i(\tau, x^i(\tau), P_i),$$
$$i = 1, 2, \ldots, s. \tag{8}$$

Пусть $S_i\colon N^+ \to R^{n\times N_n}$ определяется выражением

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & O_{12} & \ldots & O_{1s} \\ \hdashline O_{s1} & O_{s2} & \ldots & S_s \end{pmatrix}, \quad O_{ij} \in R^{n_i} \times R^{n_j}.$$

Матрица $S(\tau)$, описывающая все структурные вариации системы (S), называется структурной матрицей системы (S). Множество всех возможных матриц $S(\tau)$ обозначим через $\mathcal{S}$ и назовем структурным множеством системы (S). В общем

$$\mathcal{S} = \left\{ S\colon S = \begin{pmatrix} S_1 & O_{12} & \ldots & O_{1s} \\ \hdashline O_{s1} & O_{s2} & \ldots & S_s \end{pmatrix},\ S_i = (s_{i1}J_i, \ldots, s_{iN}J_i), \right.$$
$$\left. s_{ij} = \{0, 1\},\ i, j = 1, 2, \ldots, s \right\}. \tag{9}$$

Если теперь принять $h = \left(h_1^T, h_2^T, \ldots, h_s^T\right)^T$, то исходную систему (S) можно представить так:

$$(S)\colon\ x(\tau+1) = f(\tau, x(\tau), 0) + S(\tau) h(\tau, x(\tau), P),$$
$$S(\tau) \in \mathcal{S}, \quad P \in \mathcal{P}, \quad \forall\, \tau \in N^+. \tag{10}$$

Структурная устойчивость КМДС и классы матриц-функций Ляпунова. В монографиях [1–8] сформулированы различные определения устойчивости (неустойчивости) по Ляпунову для дискретных систем. Свойства структурной устойчивости КМДС могут быть определены согласно этим понятиям, и поэтому здесь приведем только те, которые будут использоваться в данной работе.

Определение 1. *Состояние* $x(\tau) = 0$ *системы* (10):

а) *равномерно устойчиво в целом на* $\mathcal{P} \times \mathcal{S}$ *тогда и только тогда, когда оно равномерно устойчиво в целом при любых* $(P, S) \in \mathcal{P} \times \mathcal{S}$;

б) *равномерно асимптотически устойчиво (в целом) на* $\mathcal{P}\times\mathcal{S}$ *тогда и только тогда, когда оно равномерно асимптотически устойчиво (в целом) при любых* $(P, S)\in\mathcal{P}\times\mathcal{S}$;

в) *неустойчиво на* $\mathcal{P}\times\mathcal{S}$ *тогда и только тогда, когда оно неустойчиво хотя бы для одной пары значений* $(P, S)\in\mathcal{P}\times\mathcal{S}$.

Решение вопроса об устойчивости КМДС при структурных возмущениях основано на естественном распространении теорем прямого метода Ляпунова на основе матричнозначной функции.

Далее наряду с системой (8) будем рассматривать матрицу-функцию (МФ)

$$U(\tau, x(\tau)) = [U_{ij}(\tau, x(\tau))], \quad i, j = 1, 2, \dots, s, \tag{11}$$

с помощью которой построим скалярную функцию (СФ)

$$V(\tau, x(\tau), \psi) = \psi^T U(\tau, x(\tau))\psi, \tag{12}$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_s)^T$, $\psi_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, s$. Заметим, что если $\psi = J = (1, 1, \dots, 1)^T \in R^s$, то функция (12) принимает вид

$$V(\tau, x(\tau)) = \sum_{i,\, j=1}^{s} v_{ij}(\tau, x(\tau)). \tag{13}$$

Определение 2. *Матрица-функция* $U: N^+\times R^n \to R^{s\times s}$ *называется:*

1) *положительно определенной на* N^+, *если и только если существует инвариантная в дискретном времени окрестность* $\mathcal{N}\subseteq R^n$ *точки* $x(\tau)=0$, *положительно определенная функция* $\omega(x(\tau)): R^n\to R_+$, *определенная на* $\mathcal{N}$, *и вектор* $\psi\in R^s$ *такие, что*

а) $U: N^+\times\mathcal{N}\to R^{s\times s}$;

б) $U(\tau, 0) = 0 \;\; \forall\, \tau\in N^+$;

в) $V(\tau, x(\tau), \psi) \geq \omega(x(\tau)) \;\; \forall\; (\tau, x(\tau)\neq 0, \psi\neq 0)\in N^+\times\mathcal{N}\times R^s$;

2) *убывающей на* N^+, *если и только если выполняются условия* 1 а), б) *и существует положительно определенная функция* $u(x(\tau)): R^n\to R_+$ *такая, что*

г) $V(\tau, x(\tau), \psi) \leq u(x(\tau)) \;\; \forall\; (\tau, x(\tau)\neq 0, \psi\neq 0)\in N^+\times\mathcal{N}\times R^s$.

Следующие ниже утверждения облегчают проверку условий знакоопределенности МФ.

Лемма 1. *Матричнозначная функция* $U: N^+\times\mathcal{N}\to R^{s\times s}$ *положительно определена на* $N^+\times\mathcal{N}$, *если и только если она может быть представлена в виде*

$$\psi^T U(\tau, x(\tau))\psi = \psi^T U_+(\tau, x(\tau))\psi + \omega(x(\tau)) \;\; \forall\; (\tau, x(\tau))\in N^+\times\mathcal{N},$$

где $U_+(\tau, x(\tau))$ — *положительно полуопределенная матричнозначная функция,* $\omega(x(\tau))$ — *положительно определенная функция* $\omega: R^n\to R_+$, $\omega(0)) = 0$.

Лемма 2. *Матричнозначная функция* $U: N^+\times R^n\to R^{s\times s}$ *убывающая на* $N^+\times\mathcal{N}$, *если и только если она может быть представлена в виде*

$$\psi^T U(\tau, x(\tau))\psi = \psi^T U_-(\tau, x(\tau))\psi + u(x(\tau)) \;\; \forall\; (\tau, x(\tau))\in N^+\times\mathcal{N},$$

где $U_-(\tau, x(\tau))$ — *отрицательно полуопределенная матричнозначная функция,* $u(x(\tau))$ — *положительно определенная функция* $u: R^n\to R_+$, $u(0) = 0$.

Для первых разностей МФ (11) и СФ (12) вдоль решений КМДС (8) введем обозначения

$$\Delta U(\tau, x(\tau)) = [\Delta v_{ij}(\tau, x(\tau))], \quad i, j = 1, 2, \ldots, s, \tag{14}$$

$$\Delta V(\tau, x(\tau)) = \psi^T \Delta U(\tau, x(\tau))\psi, \tag{15}$$

где первые разности функций $v_{ij}(\tau, x(\tau))$ относительно $(\tau, x(\tau)) \in N^+ \times \mathcal{N}$ определены в соответствии с [1].

Определение 3. *Матричнозначная функция* $U: N^+ \times R^n \to R^{s\times s}$ *называется*

1) *матрицей-функцией Ляпунова (МФЛ) типа* $S(\psi)$, *если*

а) *МФ* $U(\tau, x(\tau))$ — *положительно определенная и убывающая на* $N^+ \times \mathcal{N}$;

б) *МФ* $\Delta U(\tau, x(\tau))$ — *неположительная на* $N^+ \times \mathcal{N}$ *для любых* $(P, S) \in \in \mathcal{P} \times \mathcal{S}$ *и* $\Delta U(\tau, 0)$ $\forall \in N^+$;

2) *МФЛ типа* $AS(\psi)$, *если*

а) *МФ* $U(\tau, x(\tau))$ — *положительно определенная и убывающая на* $N^+ \times \mathcal{N}$;

б) *МФ* $\Delta U(\tau, x(\tau))$ — *определенно отрицательная на* $N^+ \times \mathcal{N}$ *для любых* $(P, S) \in \mathcal{P} \times \mathcal{S}$ *и* $\Delta U(\tau, 0) = 0$ $\forall\, \tau \in N^+$;

Теоремы об устойчивости дискретных систем (см. [1, 4]) на основе МФ (12) и ее первой разности (14), (15) имеют следующие обобщения.

Теорема 1. *Для того чтобы состояние* $x(\tau) = 0$ *системы* (8) *было устойчиво (равномерно) на* $\mathcal{P} \times \mathcal{S}$, *достаточно существования МФЛ* $U: N^+ \times \mathcal{N} \to \to R^{s\times s}$ *типа* $S(\psi)$ *для любого натурального* s.

Теорема 2. *Для того чтобы состояние* $x(\tau) = 0$ *системы* (8) *было асимптотически устойчиво (равномерно) на* $\mathcal{P} \times \mathcal{S}$, *достаточно существования МФЛ* $U: N^+ \times \mathcal{N} \to R^{s\times s}$ *типа* $AS(\psi)$ *для любого натурального* s.

Доказательства теорем 1 и 2 состоят в проверке выполнения всех условий классических теорем об устойчивости и асимптотической устойчивости (равномерной) в случае дискретных систем при выполнении условий теорем 1 и 2 и определения 3 (см., например, [1 – 8]).

Форма агрегирования и условия устойчивости КМДС при решении проблемы А. Введем некоторые предположения о компонентах v_{ij} МФ $U(\tau, x(\tau))$ и динамических свойствах подсистемы $(\hat{S}_i)$.

Предположение 1. Существуют:

1) инвариантные в дискретном времени окрестности $\mathcal{N}_i \subseteq R^{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, s$, состояний равновесия $x_i(\tau) = 0$;

2) функции φ_{ik}: $N_i \to R_+$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $k = 1, 2$, $\varphi_i \in K(KR)$, где $K(KR)$ — класс функций Хана [11];

3) постоянные $\underline{\alpha}_{ij}$, $\overline{\alpha}_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, s$, и МФ $U(\tau, x(\tau))$ с элементами

$$v_{ii} = v_{ii}(\tau, x_i(\tau)), \quad v_{ij} = v_{ij}(\tau, x_i(\tau), x_j(\tau)), \quad i \neq j,$$

$$v_{ij} = v_{ji}, \quad v_{ii}(\tau, 0) = v_{ij}(\tau, 0, 0) = 0,$$

удовлетворяющими оценкам

а) $\underline{\alpha}_{ii}\varphi_{i1}^2(\|x_i(\tau)\|) \leq v_{ii}(\tau, x_i(\tau)) \leq \overline{\alpha}_{ii}\varphi_{i2}^2(\|x_i(\tau)\|)$ $\forall\, (\tau, x_i(\tau)) \in N^+ \times \mathcal{N}_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$;

б) $\underline{\alpha}_{ij}\varphi_{i1}(\|x_i(\tau)\|)\varphi_{j1}(\|x_j(\tau)\|) \leq v_{ij}(\tau, x_i(\tau), x_j(\tau)) \leq$ $\leq \overline{\alpha}_{ij}\varphi_{i2}(\|x_i(\tau)\|)\varphi_{j2}(\|x_j(\tau)\|) \quad \forall\ (\tau, x_i(\tau), x_j(\tau)) \in N^+ \times \mathcal{N}_i \times \mathcal{N}_j, \quad i \neq j.$

Здесь $v_{ii}(\tau, x_i(\tau))$ соответствуют подсистемам (5), а $v_{ij}(\tau, x_i(\tau), x_j(\tau))$ учитывают связи $h_i(\tau, x(\tau), P_i)$ между уравнениями (5).

Лемма 3. *При выполнении условий предположения* 1 *для функции* (12) *верна оценка*

$$u_1^T H^T A H u_1 \leq V(\tau, x(\tau), \psi) \leq u_2^T H^T B H u_2$$
$$\forall\ (\tau, x_i(\tau), x_j(\tau)) \in N^+ \times \mathcal{N}_i \times \mathcal{N}_j, \tag{16}$$

где

$$u_k^T = (\varphi_{1k}(\|x_1(\tau)\|, \varphi_{2k}(\|x_2(\tau)\|), \ldots, \varphi_{sk}(\|x_s(\tau)\|)), \quad k = 1, 2;$$
$$H = \operatorname{diag}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_s); \quad A = [\underline{\alpha}_{ij}], \quad \underline{\alpha}_{ij} = \underline{\alpha}_{ji};$$
$$B = [\overline{\alpha}_{ij}], \quad \overline{\alpha}_{ij} = \overline{\alpha}_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, s;$$
$$\psi^T = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_s).$$

Предположение 2. Существуют:

1) инвариантные в дискретном времени окрестности $\mathcal{N}_i \subseteq R^{n_i}$ состояний $x_i(\tau) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$;

2) функции $\varphi_i\colon \mathcal{N}_i \to R_+$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $\varphi_i \in K(KR)$, и v_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, s$, указанные в предположении 1, причем

а) функции $v_{ii}(\tau, x(\tau))$, определенные на $N^+ \times \mathcal{N}_{i0}$ либо на $N^+ \times R^{n_i}$;

б) функции $v_{ij}(\tau, x_i(\tau), x_j(\tau))$, определенные на $N^+ \times \mathcal{N}_{i0} \times \mathcal{N}_{j0}$ либо $N^+ \times R^{n_i} \times R^{n_j}$, $i \neq j$, $\mathcal{N}_{i0} = \{x_i(\tau)\colon x_i(\tau) \in \mathcal{N}_i,\ x_i(\tau) \neq 0\}$;

3) постоянные α_{1i}, $\alpha_{2i}(P, S)$, $\alpha_{ij}(P, S)$ $(i \neq j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, s$, такие, что в силу КМДС (8) и подсистем (5) выполняются неравенства

а) $\psi_i^2\{v_{ii}(\tau, x_i^i(\tau+1)) - v_{ii}(\tau, x_i^i(\tau))\} \leq \alpha_{1i}\varphi_i^2(\|x_i(\tau)\|)\ \forall\, x_i(\tau) \in \mathcal{N}_{i0}$, $i = 1, 2, \ldots, s$;

б) $$\sum_{i=1}^{s} \psi_i^2\{v_{ii}(\tau, x_i(\tau+1)) - v_{ii}(\tau, x_i^i(\tau+1))\} + v_{ii}(\tau, x_i^i(\tau))\} -$$
$$- v_{ii}(\tau, x_i(\tau))\} + 2\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \psi_i\psi_j\{v_{ij}(\tau, x_i(\tau+1), x_j(\tau+1)) -$$
$$- v_{ij}(\tau, x_i(\tau), x_j(\tau))\} \leq \sum_{i=1}^{s} \alpha_{2i}(P, S)\varphi_i^2(\|x_i(\tau)\|) +$$
$$+ 2\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij}(P, S)\varphi_i(\|x_i(\tau)\|)\,\varphi_j(\|x_j(\tau)\|),$$
$$\forall\ (\tau, x_i, x_j) \in N^+ \times \mathcal{N}_{i0} \times \mathcal{N}_{j0} \quad \forall\ (P, S) \in \mathcal{P} \times \mathcal{S}.$$

Примечание. Здесь $x_i^i(\cdot)$ означает, что разность берется в силу подсистем (5).

Лемма 4. *Если выполняются все условия предположения* 2, *то верна оценка*

$$V(\tau, x(\tau + 1), \psi) - V(\tau, x(\tau), \psi) \leq u^T C(P, S) u \tag{17}$$

$$\forall\ (\tau, x) \in N^+ \times \mathcal{N}_{i0}, \quad (P, S) \in \mathcal{P} \times \mathcal{S},$$

где

$$u^T = (\varphi_1(\| x_1 \|, \varphi_2(\| x_2 \|), \ldots, \varphi_{sk}(\| x_s(\tau) \|)),$$

$$C(P, S) = [C_{ij}(P, S)], \quad i, j = 1, 2, \ldots, s, \qquad C_{ij}(P, S) = \alpha_{ij}(P, S),$$

$$C_{ij}(P, S) = \alpha_{1i} + \alpha_{2i}(P, S), \qquad C_{ij}(P, S) = \alpha_{ij}(P, S), \quad i \neq j, \ i, j = 1, 2, \ldots, s.$$

Теорема 3. *Пусть КМДС (8) такова, что выполняются все условия предположений* 1 *и* 2, *а также*

а) *матрица A определенно положительная;*

б) *существует полуопределенно отрицательная матрица $G \in R^{s \times s}$ такая, что для матрицы $C(P, S)$ выполняется оценка*

$$C(P, S) \leq G \quad \forall\ (P, S) \in \mathcal{P} \times \mathcal{S}.$$

Тогда состояние равновесия $x(\tau) = 0$ системы (8) *равномерно устойчиво на $\mathcal{P} \times \mathcal{S}$.*

Доказательство. При выполнении условий предположения 1 леммы 3 и условия а) теоремы 3 функция (12) является определенно положительной на $N^+ \times \mathcal{N}_{i0}$. Из условий предположения 2 леммы 4 и условия б) теоремы 3 следует, что $v(\tau, x(\tau), \psi) \geq v(\tau, x(\tau + 1), \psi)$ при любом $(P, S) \in \mathcal{P} \times \mathcal{S}$. При этом для каждой пары $(P, S) \in \mathcal{P} \times \mathcal{S}$ выполняются условия, достаточные для устойчивости нулевого решения КМДС (8) на $\mathcal{P} \times \mathcal{S}$ (см. [1–8]).

Теорема 4. *Пусть КМДС* (8) *такова, что выполняются все условия предположений* 1 *и* 2, *а также*

а) *матрицы A и B определенно положительные*;

б) *существует определенно отрицательная матрица $G \in R^{s \times s}$ такая, что для матрицы $C(P, S)$ выполняется оценка*

$$C(P, S)) \leq G \quad \forall\ (P, S) \in \mathcal{P} \times \mathcal{S}.$$

Тогда состояние равновесия $x(\tau) = 0$ системы (8) *равномерно асимптотически устойчиво на $\mathcal{P} \times \mathcal{S}$.*

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3.

***Пример* 1.** Рассмотрим линейную КМДС, декомпозированную на две подсистемы

$$x_i(\tau + 1) = A_{ii} x_i(\tau) + A_{ij} s_{ij} x_j(\tau), \quad i \neq j, \ i, j = 1, 2, \tag{18}$$

где A_{ij} — постоянные матрицы соответствующего порядка

$$\mathcal{S} = \{ S : S = \operatorname{diag}\{S_1, S_2\}, \ S_i = [s_{ij} J_i], \ 0 \leq s_{ij} \leq 1, \ i \neq j, \ i, j = 1, 2 \},$$

J_i — единичная матрица соответствующей размерности, $x_i \in R^{n_i}$, $i = 1, 2$, $x = (x_1^T, x_2^T)^T \in R^n$.

Для системы (18) построим матрицу-функцию $U(x)$ с элементами [10]

$$v_{11} = x_1^T B_1 x_1, \quad v_{22} = x_2^T B_2 x_2, \quad v_{12} = v_{21} = x_1^T B_3 x_2, \tag{19}$$

где B_1, B_2 — симметрические положительно определенные матрицы, а B_3 — постоянная матрица.

Нетрудно проверить, что для функций (19) верны оценки

$$\lambda_m(B_i)\|x_i\|^2 \le v_{ii}(x_i(\tau)) \le \lambda_M(B_i)\|x_i\|^2, \quad i=1,2,$$

$$-\lambda_m^{1/2}(B_3B_3^T)\,\|x_1\|\,\|x_2\| \le v_{12}(x_1(\tau), x_2(\tau)) \le \lambda_M^{1/2}(B_3B_3^T)\,\|x_1\|\,\|x_2\|.$$

где $\lambda_m(B_i)$ и $\lambda_M(B_i)$ — минимальные и максимальные собственные числа матриц B_i, $i=1,2$, $\lambda_M^{1/2}(B_3B_3^T)$ — норма матрицы B_3.

При этом матрицы A и B из оценки (16) имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_m(B_1) & -\lambda_M^{1/2}(B_3B_3^T) \\ -\lambda_M^{1/2}(B_3B_3^T) & \lambda_m(B_2) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_M(B_1) & \lambda_M^{1/2}(B_3B_3^T) \\ \lambda_M^{1/2}(B_3B_3^T) & \lambda_m(B_2) \end{pmatrix}.$$

Для положительной определенности этих матриц достаточно выполнения условия

$$\lambda_m(B_1)\lambda_m(B_2) > \lambda_M(B_3B_3^T); \tag{20}$$

так как матрицы B_1 и B_2 — положительно определенные, то $\lambda_M(B_i) > \lambda_m(B_i) > 0$, $i=1,2$.

Пусть $\psi^T = (1,1)$, тогда для указанной матрицы-функции $U(x)$ элементы матрицы $C(S)$ имеют вид

$$C_{11}(S) = \lambda_M(C_1) + \lambda_M(C_3(S)),$$

$$C_{22}(S) = \lambda_M(C_2) + \lambda_M(C_4(S)),$$

$$C_{12}(S) = \lambda_M^{1/2}(C_1(S)C_5^T(S)),$$

где

$$C_1 = A_{11}^T B_1 A_{11} - B_1, \qquad C_2 = A_{22}^T B_2 A_{22} - B_2,$$

$$C_3(S) = (A_{21}s_{21})^T B_2 A_{21}s_{21} + 2A_{11}^T B_3 A_{21}s_{21} - B_1,$$

$$C_4(S) = (A_{12}s_{12})^T B_1 A_{12}s_{12} + 2(A_{12}s_{12})^T B_3 A_{22} - B_2,$$

$$C_5 = A_{11}^T B_3 A_{22} + (A_{21}s_{21})^T B_3^T A_{12}s_{12} - B_3.$$

Итак, если выполняется неравенство (20) и существует отрицательно полуопределенная матрица G такая, что $C(S) \le G$ для всех $S \in \mathcal{S}$, то выполняются все условия теоремы 3 (4) и нулевое решение КМДС (18) устойчиво (асимптотически устойчиво).

Форма агрегирования и условия устойчивости КМДС при решении проблемы Б. Форма агрегирования КМДС при решении проблемы Б по-иному учитывает взаимосвязи между подсистемами $(\hat{S}_i)$. Пусть с взаимодействующими подсистемами (8) связаны элементы матрицы-функции $U(\tau, x(\tau))$ и для них выполняются все условия предположения 1. В основу этой формы агрегирования положена вместе с условиями предположения 1 следующая система условий.

Предположение 3:

1) выполняются условия 1, 2 предположения 2;

2) существуют постоянные $\rho_{ii}(P,S)$ и $\rho_{ij}(P,S)$, $i=1,2,\ldots,s$, $j=2,3,\ldots,s$, $i<j$, такие, что в силу КМДС (8) выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{s}\psi_i^2\{v_{ii}(\tau,x_i(\tau+1))-v_{ii}(\tau,x_i(\tau))+$$

$$+\;2\sum_{i=1}^{s}\sum_{\substack{j=2\\ j>i}}^{s}\psi_i\psi_j\{v_{ij}(\tau,x_i(\tau+1),x_j(\tau+1))-v_{ij}(\tau,x_i(\tau),x_j(\tau+1))\}\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{s}\rho_{ii}(P,S)\varphi_i^2(\|x_i(\tau)\|)+2\sum_{i=1}^{s}\sum_{\substack{j=2\\ j>i}}^{s}\rho_{ij}(P,S)\varphi_i(\|x_i(\tau)\|)\varphi_j(\|x_j(\tau)\|)$$

$$\forall\,(\tau,x_i,x_j)\in N^+\times\mathcal{N}_{i0}\times\mathcal{N}_{j0},\quad\forall\,(P,S)\in\mathcal{P}\times\mathcal{S}.$$

Лемма 5. *Если выполняются все условия предположения 3, то для первой разности функции $V(\tau,x(\tau))$ справедлива оценка*

$$V(\tau,x(\tau+1),\psi)-V(\tau,x(\tau),\psi)\le u^TG(P,S)u$$
$$\forall\,(\tau,x)\in N^+\times\mathcal{N}_0,\quad\forall\,(P,S)\in\mathcal{P}\times\mathcal{S}, \tag{21}$$

где

$$u^T=(\varphi_1(\|x_1\|,\varphi_2(\|x_2\|),\ldots,\varphi_s(\|x_s(\tau)\|)),$$

$$C(P,S)=[\rho_{ij}(P,S)],\quad i,j=1,2,\ldots,s,\qquad\rho_{ij}(P,S)=\rho_{ji}(P,S).$$

Теорема 5. *Пусть КМДС* (8) *такова, что выполняются условия предположений* 1 *и* 3 *и*

1) *матрица A определенно положительная;*

2) *существует отрицательно полуопределенная матрица $G\in R^{s\times s}$ такая, что для матрицы $C(P,S)$ выполняется оценка $C(P,S)\le G$ $\forall\,(P,S)\in\mathcal{P}\times\mathcal{S}$.*

Тогда состояние равновесия $x(\tau)=0$ КМДС (8) *равномерно устойчиво на $\mathcal{P}\times\mathcal{S}$.*

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 3.

Теорема 6. *Пусть КМДС* (8) *такова, что выполняются все условия предположений* 1 *и* 3 *и*

1) *матрицы A и B определенно положительные;*

2) *существует определенно отрицательная матрица $G\in R^{s\times s}$ такая, что для матрицы $C(P,S)$ выполняется оценка $C(P,S)\le G$ $\forall\,(P,S)\in\mathcal{P}\times\mathcal{S}$.*

Тогда состояние равновесия $x(\tau)=0$ КМДС (8) *равномерно асимптотически устойчиво на $\mathcal{P}\times\mathcal{S}$.*

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 3.

***Пример* 2.** Рассмотрим линейную КМДС (18). Пусть для системы (18) построена матрица-функция $U(x)$ с элементами (19) и $\psi^T=(1,\;1)$. Тогда элементы матрицы $C(S)$ имеют вид

$$\rho_{11}(S)=\lambda_m(C_1(S)),\qquad\rho_{22}(S)=\lambda_M(C_2(S)),$$
$$\rho_{11}(S)=\lambda_m^{1/2}(C_3(S)C_3^T(S)),$$

где

$$C_1(S)=A_{11}^TB_1A_{11}+(A_{21}s_{21})^TB_2A_{21}s_{21}+2A_{11}^TB_3A_{21}s_{21}-2B_1,$$

$$C_2(S) = A_{22}^T B_2 A_{22} + (A_{12} s_{12})^T B_1 A_{12} s_{12} + 2(A_{12} s_{12})^T B_3 A_{22} - 2B_2,$$

$$C_3(S) = A_{11}^T B_3 A_{22} + (A_{21} s_{21})^T B_3^T A_{12} s_{12} - B_3.$$

Итак, если для системы (18) построена матрица-функция с элементами (19) и выполняется неравенство (20), а также существует отрицательно полуопределенная (отрицательно определенная) матрица G такая, что $C(S) \le G \ \forall S \in \mathcal{S}$, то выполняются все условия теоремы 5 (6) и нулевое решение КМДС (18) устойчиво (асимптотически устойчиво) на $\mathcal{P} \times \mathcal{S}$.

***Пример* 3.** Рассмотрим дискретную систему четвертого порядка, состоящую из двух подсистем второго порядка, которые описываются системами уравнений

$$x_i(\tau+1) = -0{,}1 x_i + 0{,}2 x_j + 0{,}5 s_{i1}(\tau) x_i + 0{,}3 s_{i2}(\tau) x_j, \quad i = 1, 2, \tag{22}$$

где $x_i = (x_{i1}, x_{i2})^T \in R^2$, $s_{ij}(\tau) \in [0, 1]$, $i, j = 1, 2$ $\forall \tau \in N^+$ и структурные матрицы $S_i(\tau)$ имеют вид

$$S_i(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s_{i1}(\tau) & 0 & s_{i2}(\tau) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_{i1}(\tau) & 0 & s_{i2}(\tau) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

Структурное множество системы (22) определяется так:

$$S = \left\{ S(\tau) \colon S(\tau) = \begin{bmatrix} S_1(\tau) & 0 \\ 0 & S_1(\tau) \end{bmatrix}, \ S_i(\tau) = (J_2, s_{i1}(\tau) J_2, s_{i2}(\tau) J_2), \right.$$

$$\left. s_{ij}(\tau) \in [0, 1] \ \forall \tau \in N^+, \ i, j = 1, 2 \right\}.$$

Для системы (22) построим матрицу-функцию $U(x)$ с элементами

$$v_{ii}(x_i) = x_i^2, \quad i = 1, 2, \qquad v_{12}(x_1, x_2) = 0{,}5 x_1 x_2,$$

удовлетворяющими оценкам

$$\| x_i \|^2 \ge v_{ii}(x_i) \ge \| x_i \|^2, \quad i = 1, 2.$$

Матрицы A и B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$$

являются положительно определенными.

Пусть $\psi^T = (1, 1)$, тогда для указанной матрицы-функции $U(x)$ элементы матрицы $C(S)$ имеют вид

$$\rho_{11}(S) = 0{,}03 + 0{,}09 s_{21} + 0{,}15 s_{11} s_{21} + 0{,}25 s_{11}^2 + 0{,}09 s_{21}^2 - 1 \le -0{,}39,$$

$$\rho_{22}(S) = 0{,}03 + 0{,}09 s_{12} + 0{,}15 s_{12} s_{22} + 0{,}09 s_{12}^2 + 0{,}25 s_{22}^2 - 1 \le -0{,}39,$$

$$\rho_{12}(S) = 0{,}01 + 0{,}05 s_{11} + 0{,}03 s_{12} + 0{,}03 s_{21} + + 0{,}05 s_{22} + 0{,}15 s_{11} s_{12} +$$

$$+ 0{,}25 s_{11} s_{22} + + 0{,}09 s_{12} s_{22} + 0{,}15 s_{21} s_{22} - 1/2 \le 0{,}31.$$

Нетрудно проверить, что матрица

$$G(S) \le G = \begin{pmatrix} -0{,}39 & 0{,}31 \\ 0{,}31 & -0{,}39 \end{pmatrix}$$

является отрицательно определенной.

Так как выполняются все условия теоремы 6, то нулевое решение системы (22) асимптотически устойчиво на S.

В заключение заметим, что построение скалярной функции Ляпунова для КМДС (8) является актуальной и трудной задачей теории дискретных систем. Применение матрицы-функции $U(\tau, x(\tau))$ для построения скалярной функции $V(\tau, x(\tau), \psi)$ снижает некоторые трудности за счет ослабления требований к компонентам v_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, s$, что в свою очередь позволяет более полно учитывать взаимосвязи между независимыми подсистемами (5).

Предложенный способ анализа устойчивости КМДС (8) отличается простотой и общностью. Все установленные достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости выражаются в терминах знакоопределенности специальных матриц.

1. *Бромберг П. В.* Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. – М.: Наука, 1967. – 320 с.
2. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 310 с.
3. *Фурасов В. Д.* Устойчивость и стабилизация дискретных процессов. – М.: Наука, 1982. – 191 с.
4. *Цыпкин Я. З., Меликян А. А.* Теория нелинейных импульсных систем. – М.: Наука, 1973. – 241 с.
5. *Michel A. N., Miller R. K.* Qualitative analysis of large scale dynamical systems. – New York: Acad. press, 1977. – 289 p.
6. *Šiljak D. D.* Large–Scale dynamic systems. – New York: North-Holland, 1978. – 416 p.
7. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A.* Stability analysis of nonlinear systems. – New York: Marcel Dekker, Inc., 1989. – 315 p.
8. *Grujic Lj. T.* Diskretni sistemi. – Beograd: Mašinski facultet, univezitet u Beogradu, 1980. – 396 p.
9. *Мартынюк А. А., Крапивный Ю. Н.* Матричные функции Ляпунова и устойчивость крупномасштабных дискретных систем. – Киев, 1988. – 24 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики, № 11).
10. *Djordjevic M. Z.* Zur stabilität nichtlinear Gekoppelter Systeme mit der Matrix–Ljapunov–Methode. – Zürich: HTH, 1984. – 155 S.
11. *Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – Киев: Наук. думка, 1984. – 307 с.
12. *Мартынюк А. А.* Иерархическая матричная функция Ляпунова и устойчивость при структурных возмущениях // Докл. АН СССР. – 1989. – **305**, № 1. – С. 41–44.
13. *Мартынюк А. А., Миладжанов В. Г.* Об устойчивости крупномасштабных систем при структурных возмущениях. Проблема А // Электрон. моделирование. – 1992. – **14**, № 1. – С. 3–10.
14. *Мартынюк А. А., Миладжанов В. Г.* Об устойчивости крупномасштабных систем при структурных возмущениях. Проблема Б // Там же. – № 4. – С. 35–42.
15. *Миладжанов В. Г.* Об устойчивости крупномасштабной импульсной системы при структурных возмущениях // Докл. АН Украины. – 1992. – № 11. – С. 59–62.
16. *Миладжанов В. Г.* Форма агрегирования крупномасштабной импульсной системы при структурных возмущениях // Там же. – № 12. – С. 64–67.

Получено 11.03.96