УДК 517. 98

А. Я. Шкляр (НМЦ „Интеллект. системы" Киев. ун-та)

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

For the equation $y''(t)+Ay'(t)+By(t)=0$, where A and B are arbitrary commuting normal operators in a Hilbert space H, we obtain a necessary and sufficient condition for well-posedness of the Cauchy problem in the space of initial data $D(B)\times(D(A)\cap D(|B|^{1/2}))$ and for weak well-posedness of the Cauchy problem in $H\times H\_(|A|+|B|^{1/2}+1)$. This condition is expressed in terms of location of the joint spectrum of the operators A and B in C^2. In terms of location of the spectrum of the operator pencil z^2+Az+B in C^1, such condition cannot be written.

Для рівняння $y''(t)+Ay'(t)+By(t)=0$, де A і B — довільні нормальні оператори в гільбертовому просторі H, що комутують, дано необхідну і достатню умову для коректності задачі Коші в просторі початкових даних $D(B)\times(D(A)\cap D(|B|^{1/2}))$ і для слабкої коректності задачі Коші в $H\times H\_(|A|+|B|^{1/2}+1)$. Цю умову виражено в термінах розміщення в C^2 сумісного спектра операторів A і B. В термінах розміщення в C^1 спектра операторного пучка z^2+Az+ $+B$ таку умову записати неможливо.

В настоящей статье изучена корректность задачи Коши для уравнения

$$y''(t)+Ay'(t)+By(t) = 0, \tag{1}$$

где A и B — произвольные коммутирующие нормальные операторы (к. н. о.) в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Класс всех таких уравнений достаточно широк. В частности, он естественным образом охватывает все уравнения вида (1), где A и B — линейные дифференциальные операторы с постоянными комплексными коэффициентами в $H=L_2(R^m)$ при любом $m\geq 1$. По мнению автора класс всех уравнений (1) с к. н. о. A и B можно рассматривать как модельный класс полных линейных дифференциально-операторных уравнений второго порядка.

Настоящая работа является продолжением [1], где A и B предполагались самосопряженными. В более общем случае нормальных A и B возникает ряд новых эффектов.

1. Если специально не оговорено, то мы используем обозначения и предварительные результаты из [1] с очевидными изменениями („к. с. о." на „к. н. о.", R^2 на C^2 и т. д.).

Дадим определение слабой корректности задачи Коши для уравнения (1). Пусть Φ — линеал в H, плотный в H, $\Phi\subseteq D(A)\cap D(B)$.

***Определение* 1.** *Пусть $T\subseteq R^1$ — интервал на вещественной оси R^1. Говорят, что $y(t)$, $t\in T$, — слабое над Φ решение уравнения (1) на T, если $y(t)\in C(T,H)$ и для любого $g\in\Phi$: $(y(t),g)\in C^2(T)$, $(y(t),A^*g)\in C^1(T)$, $(y(t),B^*g)\in C(T)$ и*

$$(y(t),g)''+(y(t),A^*g)'+(y(t),B^*g) = 0$$

при любом $t\in T$.

Обозначим через Φ' пространство всех антилинейных функционалов над Φ. В силу определения 1, если $y(t)$ — слабое над Φ решение уравнения (1) на T, то для любого $\tau\in T$: $y(\tau)\in H$ и $(y(t),g)'|_{t=\tau}$ — антилинейный функционал над $g\in\Phi$, т. е. элемент Φ'.

Определение 2. Пусть $-\infty < a < b \le +\infty$. *Слабое над* Φ *решение уравнения* (1) *на* $[a, b)$ *называется слабым над* Φ *решением задачи Коши для* (1) *на* $[a, b)$ *с граничными (начальными) данными* $(f_0, f_1) \in H \times \Phi'$, *если* $y(a) = f_0$ *и для любого* $g \in \Phi$: $(y(t), g)'|_{t=a} = (f_1, g)$.

Определение 3. Пусть $G \subseteq H \times \Phi'$. *Будем говорить, что задача Коши для* (1) *на* $[a, b)$ *слабо над* Φ *корректна в* G, *если для произвольного* $(f_0, f_1) \in G$ *существует единственное слабое над* Φ *решение (сл. р.) этой граничной задачи для* (1) *на* $[a, b)$ *с граничными данными (гр. д.)* (f_0, f_1).

Для определенности в дальнейшем полагаем

$$\Phi = D(A^\infty) \bigcap D(B^\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)\right) \bigcap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D(B^n)\right) =$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} D((|A|^n + 1)(|B|^n + 1))$$

и опускаем слова „над Φ". В действительности все результаты остаются справедливыми для произвольного Φ такого, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k H \subseteq \Phi \subseteq D(A^2) \bigcap D(B)$.

Мы рассматриваем задачу Коши для (1) на $R_+ = [0, +\infty)$; для любого другого $[a, b)$ все результаты остаются справедливыми.

2. Обозначим через E_A и E_B разложения единицы операторов A и B соответственно. Через $\sigma(A, B)$ обозначим совместный спектр операторов A и B [1]. Известно, что $\sigma(A, B) \subseteq C^2$ — носитель спектральной меры E, задаваемой формулой $E(\Delta_1 \times \Delta_2) = E_A(\Delta_1) E_B(\Delta_2)$ для любых борелевских множеств $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq C^1$. Для любой $(\lambda, \mu) \in C^2$ обозначим $\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda$, $\lambda_2 = \operatorname{Im}\lambda$, $\mu_1 = \operatorname{Re}\mu$, $\mu_2 = \operatorname{Im}\mu$; $\omega_i(\lambda, \mu)$, $i = 1, 2$, — корни характеристического полинома $\omega^2 + \lambda\omega + \mu$.

Для любой $(\lambda, \mu) \in C^2$ обозначим через $\psi_i(\lambda, \mu, t)$, $t \in R_+$, $i = 0, 1$, решения скалярного обыкновенного дифференциального уравнения $u''(t) + \lambda u'(t) + \mu u(t) = 0$ на R_+ такие, что

$$\psi_0(\lambda, \mu, 0) = 1, \quad \psi_0'(\lambda, \mu, 0) = 0, \quad \psi_1(\lambda, \mu, 0) = 0, \quad \psi_1'(\lambda, \mu, 0) = 1.$$

В случае, когда A и B — коммутирующие самосопряженные операторы (к. с. о.) в H и соответственно $\sigma(A, B) \subseteq R^2$, в [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* A *и* B — *к. с. о. в* H, $G = H \times H$. *Задача Коши для уравнения* (1) *на* R_+ *слабо корректна в* G *тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий*:

1) $\exists\, 0 < \gamma < +\infty \quad \forall\, (\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)\colon \max\limits_{i=1,2} \operatorname{Re}\omega_i(\lambda, \mu) \le \gamma;$ (2)

2) $\exists\, 0 < \gamma < +\infty\colon \sigma(A, B) \subseteq \{(\lambda, \mu) \mid \lambda \ge -2\gamma,\ \mu \ge -\gamma\lambda - \gamma^2\};$

3) A *полуограничен снизу*, $B_- \stackrel{\text{def}}{=} B\ E_B((-\infty, 0))$ (*отрицательная часть* B) *подчинен* A (*т. е.* $D(A) \subseteq D(B_-)$).

Утверждение 1. *В общем случае, когда* A *и* B — *коммутирующие нормальные операторы в гильбертовом пространстве* H, *условие* (2) *не является ни необходимым, ни достаточным для слабой корректности задачи Коши для уравнения* (1) *на* R_+ *в* $G = H \times H$.

Доказательство утверждения основывается на следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть A и B — к. н. о. в H. Для того чтобы задача Коши для уравнения* (1) *на R_+ была слабо корректна в $G = H \times H$, необходимо и достаточно, чтобы* $\forall\, 0 < T < +\infty\ \exists\, C_T < +\infty$:

$$|\psi_0(\lambda, \mu, t)| \le C_T, \quad |\psi_1(\lambda, \mu, t)| \le C_T, \quad \forall\, (\lambda, \mu) \in \sigma(A, B), \quad t \in [0, T]. \tag{3}$$

Следующие примеры позволяют завершить доказательство утверждения 1.

***Пример* 1.** Пусть

$$B = 0, \quad \sigma(\operatorname{Re} A) = (-\infty, 0], \quad \operatorname{Im} A = \exp\left[(\operatorname{Re} A)^2\right]$$

(другими словами, $B = 0$, $\sigma(A) = \{\lambda_1 + i\lambda_2 \mid \lambda_1 \le 0,\ \lambda_2 = \exp(\lambda_1^2)\}$). Тогда

$$\sup_{(\lambda,\mu)\in\sigma(A,B),\, i=1,2} \operatorname{Re}\omega_i(\lambda, \mu) = \sup_{(\lambda,\mu)\in\sigma(A,B)} (-\lambda_1) = +\infty,$$

т. е. (2) не имеет места. Тем не менее, задача Коши для уравнения (1) на R_+ слабо корректна в $H \times H$ по лемме 1. Действительно, для любого $0 < T < +\infty$ имеем

$$\psi_0(\lambda, \mu, t) = 1,$$

$$|\psi_1(\lambda, \mu, t)| = \left|\frac{e^{-\lambda t} - 1}{-\lambda}\right| \le \frac{e^{-\lambda_1 t} + 1}{\exp(\lambda_1^2)} \le 1 + \exp\left(\frac{T^2}{4}\right)$$

для произвольных $(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$, $t \in [0, T]$.

***Пример* 2.** Пусть

$$\operatorname{Re} A = 0, \quad \sigma(\operatorname{Im} A) = (-\infty, +\infty), \quad B = A^2/4$$

(например, $A = d/dx$, $B = (1/4)(d^2/dx^2)$ в $H = L_2(R^1)$, определенные как обычно). Здесь для произвольной $(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$

$$\omega_1(\lambda, \mu) = \omega_2(\lambda, \mu) = -\frac{1}{2} i\lambda_2 \Rightarrow \operatorname{Re}\omega_i(\lambda, \mu) = 0, \quad i = 1, 2,$$

и следовательно, условие (2) удовлетворяется. Тем не менее, задача Коши для уравнения (1) на R_+ не является слабо корректной в $H \times H$ по лемме 1. Действительно, зафиксируем произвольное $0 < t < +\infty$; тогда для всех $(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$

$$|\psi_0(\lambda, \mu, t)| = \left|\left(\frac{1}{2} i\lambda_2 t + 1\right)\exp\left(-\frac{1}{2} i\lambda_2 t\right)\right| \ge \frac{1}{2}|\lambda_2| - 1;$$

отсюда с учетом

$$\sup_{(\lambda,\mu)\in\sigma(A,B)} |\lambda_2| = +\infty$$

имеем

$$\sup_{(\lambda,\mu)\in\sigma(A,B)} |\psi_0(\lambda, \mu, t)| = +\infty.$$

Доказательство утверждения 1 завершено.

Следующая теорема показывает, что если вместо $G = H \times H$ взять более широкое пространство $G = H \times H_-(|A| + 1)$ [2, 3], то условие (2) становится необходимым для слабой корректности задачи Коши для (1) на R_+ в пространстве G и в общем случае к. н. о. A и B.

3. В дальнейшем H_1 обозначает $H_+(\varphi(A,B))$, $H_{-1}-H_-(\varphi(A,B))$ [2, 3], где $\varphi(\lambda,\mu)=|\lambda|+\sqrt{|\mu|}+1$. Понятно, что $H_1=D(A)\bigcap D(|B|^{1/2})$ и

$$H\times H\subseteq H\times H_-(|A|+1)\subseteq H\times H_-((|A|^2+|B|+1)^{1/2})=H\times H_{-1}.$$

Теорема 2. *Пусть A и B — к. н. о. в H,*

$$H\times H_-(|A|+1)\subseteq G\subseteq H\times H_-(|A|+|B|^{1/2}+1)=H\times H_{-1}.$$

Задача Коши для уравнения (1) *на R_+ слабо корректна в G тогда и только тогда, когда выполняется одно из эквивалентных условий:*

1) *а) справедливо* (2);

б) существует $0<\varepsilon<+\infty$ такое, что

$$\sigma(A,B)\subseteq\left\{(\lambda,\mu)\,\Big|\,|\omega_i|\le\frac{1}{\varepsilon}\ (i=1,2)\right\}\cup\left\{(\lambda,\mu)\,\Big|\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right|\ge\varepsilon\right\}\cup$$

$$\cup\left\{(\lambda,\mu)\,\Big|\,|\operatorname{Im}\omega_i|\le\frac{1}{\varepsilon}|\operatorname{Re}\omega_i|,\ i=1,2\right\};\qquad(4)$$

2) *а) существует $0<\gamma<+\infty$ такое, что*

$$\sigma(A,B)\subseteq\Bigg\{(\lambda,\mu)\,|\,\lambda_1>-2\gamma,$$

$$\mu_1>\frac{1}{(\lambda_1+2\gamma)^2}\left(\mu_2^2-\lambda_1\lambda_2\mu_2-\gamma(\lambda_1+\gamma)(\lambda_2^2+(\lambda_1+2\gamma)^2)\right)\Bigg\};\qquad(5)$$

б) существует $0<\varepsilon<+\infty$ такое, что

$$\sigma(A,B)\subseteq\left\{(\lambda,\mu)\,\Big|\,|\lambda|\le\frac{1}{\varepsilon}\right\}\cup\left\{(\lambda,\mu)\,\Big|\,|\lambda_2|\le\frac{1}{\varepsilon}|\lambda_1|\right\}\cup$$

$$\cup\left\{(\lambda,\mu)\,\Big|\left|\frac{4\mu}{\lambda^2}-1\right|\ge\varepsilon\right\};\qquad(6)$$

3) *существуют $0<\gamma,\varepsilon<+\infty$ такие, что для любой $(\lambda,\mu)\in\sigma(A,B)$ удовлетворяется одно из следующих условий:*

а) $\lambda_1>-2\gamma$, $|\lambda_2|\le(1+|\lambda_1|)/\varepsilon$, (μ_1,μ_2) лежит в R^2 справа от параболы

$$\mu_1-\left(-\frac{\lambda_2^2}{4}-\lambda_1\gamma-\gamma^2\right)=\frac{1}{(\lambda_1+2\gamma)^2}\left(\mu_2-\frac{\lambda_1\lambda_2}{2}\right)^2;\qquad(7)$$

б) $\lambda_1>-2\gamma$, $|\lambda_2|>(1+|\lambda_1|)/\varepsilon$, (μ_1,μ_2) лежит в R^2 справа от параболы (7) *и вне круга, радиус которого равен $\varepsilon|\lambda|^2$, а центр находится на оси параболы* (7) *правее ее вершины на $(\lambda_1/2+\gamma)^2$.*

В этом случае для любого $(f_0,f_1)\in H\times H_{-1}$ слабое решение задачи Коши на R_+ для уравнения (1) *с начальными условиями $y(0)=f_0$, $y'(0)=f_1$ (т. е. с гр. д. (f_0,f_1)) можно записать в виде*

$$y(t)=\psi_0(A,B,t)f_0+\psi_1(A,B,t)f_1,\quad t\in R_+.$$

Следствие 1. *Пусть* A *и* B — *к. н. о. в* H *и, кроме того,* A *ограничен. Тогда для произвольного* G *такого, что* $H \times H \subseteq G \subseteq H \times H_{-}(|B|^{1/2}+1) = H \times H_{-1}$, *условие* (2) *является необходимым и достаточным для того, чтобы задача Коши для уравнения* (1) *на* R_+ *была слабо корректной в* G.

В частности, это имеет место для „неполного" уравнения второго порядка $y''(t) + By(t) = 0$, где B — нормальный оператор.

Итак, условие (2) может не быть необходимым для слабой корректности задачи Коши для (1) с к. н. о. A и B в $G = H \times H$ только в случае неограниченного A.

Доказательство теоремы 2 состоит из четырех частей.

I. Доказываем, что условие 2) эквивалентно 1) и, более того, (2) эквивалентно (5), а (4) эквивалентно (6).

II. Показываем, что для произвольного $0 < T < +\infty$ существует $C_T < +\infty$ такое, что

$$|\psi_0(\lambda, \mu, t)| \le C_T,$$

$$|\psi_1(\lambda, \mu, t)| \le \frac{C_T}{|\lambda| + \sqrt{|\mu|} + 1} \quad \forall (\lambda, \mu) \in \sigma(A, B), \quad t \in [0, T], \tag{8}$$

тогда и только тогда, когда выполняется 1).

III. Показываем, что для положительного T существует $C_T < +\infty$ такое, что выполняется (8), тогда и только тогда, когда для этого T существует $C'_T < +\infty$ такое, что

$$|\psi_0(\lambda, \mu, t)| \le C'_T,$$

$$(|\lambda| + 1)\,|\psi_1(\lambda, \mu, t)| \le C'_T \quad \forall (\lambda, \mu) \in \sigma(A, B), \quad t \in [0, T]. \tag{9}$$

IV. Показываем, что задача Коши для уравнения (1) на R_+ слабо корректна в $G = H \times H_{-1} = H \times H_{-}(|A| + |B|^{1/2} + 1)$ тогда и только тогда, когда для любого $0 < T < +\infty$ существует $C_T < +\infty$ такое, что выполняется (8).

Аналогично, показываем, что задача Коши для (1) на R_+ слабо корректна в $G = H \times H_{-}(|A| + 1)$ тогда и только тогда, когда для любого $0 < T < +\infty$ существует $C'_T < +\infty$ такое, что выполняется (9).

Здесь пп. I–III могут быть аналогично доказаны и в том случае, когда $\sigma(A, B)$ заменяется произвольным $\Omega \subseteq C^2$ [4].

4. В предыдущих пунктах мы рассматривали слабую корректность задачи Коши для уравнения (1) на R_+. Перейдем к изучению „обычной" корректности.

Определение 4 [5, 6]. *Пусть* $T \subseteq R^1$ — *интервал на вещественной оси* R^1. *Говорят, что* $y(t)$, $t \in T$, — *решение уравнения* (1) *на* T, *если:* $y(t) \in C^2(T, H)$; *для любого* $t \in T$ $y(t) \in D(B)$, $y'(t) \in D(A)$ *и, более того,* $Ay'(t) \in C(T, H)$, $By(t) \in C(T, H)$; $y''(t) + Ay'(t) + By(t) = 0$ *для любого* $t \in T$.

Решение $y(t)$ на $[a, b)$ уравнения (1) называется решением задачи Коши для (1) на $[a, b)$ с гр. д. (f_0, f_1), если $y(a) = f_0$, $y'(a) = f_1$.

Теорема 3. *Задача Коши на* R_+ *для уравнения* (1) *с к. н. о.* A *и* B *корректна в* $G = D(B) \times (D(A) \cap D(|B|^{1/2}))$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из эквивалентных условий* 1–3 *теоремы* 2.

5. Проанализируем условие 1 теоремы 2. Вдобавок к традиционному условию (2) и эквивалентному ему (5), которое можно записать также в виде

$$\sup_{(\lambda,\mu)\in\sigma(A,B),\, i=1,2} \operatorname{Re}\omega_i(\lambda,\mu) < +\infty,$$

здесь появляется новое условие (4) и эквивалентное ему (6). Условие (6) можно записать также в следующем виде:

$$\exists\, C<+\infty \quad \forall\,(\lambda,\mu)\in\sigma(A,B):\ |\omega_1+\omega_2| \le$$

$$\le C(1+|\operatorname{Re}(\omega_1+\omega_2)|+|\omega_1-\omega_2|),$$

или, что то же самое,

$$\exists\, C<+\infty \quad \forall\,(\lambda,\mu)\in\sigma(A,B):\ |\lambda| \le C(1+|\operatorname{Re}\lambda|+\sqrt{|4\mu-\lambda^2|}).$$

В ряде важных частных случаев условие (4) выполняется автоматически и, таким образом, (2) (т. е. (5)) становится необходимым и достаточным условием слабой корректности.

Следствие 2. *Пусть* A *и* B — *к. н. о. в* H *и, кроме того,* $D(\operatorname{Re}A)\subseteq D(\operatorname{Im}A)$, *т. е.* $\operatorname{Im}A$ *подчинен* $\operatorname{Re}A$. *Тогда* (6) *выполняется; таким образом, условие* (2) (*т. е.* (5)) *является необходимым и достаточным для слабой корректности задачи Коши для* (1) *на* R_+ *в* $G=H\times H_{-1}$.

Действительно, в силу теоремы 2 [1]

$$D(\operatorname{Re}A)\subseteq D(\operatorname{Im}A)\Leftrightarrow \exists\, C<+\infty \quad \forall\,\lambda\in\sigma(A):\ |\operatorname{Im}\lambda|\le C(1+|\operatorname{Re}\lambda|),$$

откуда

$$\forall\,(\lambda,\mu)\in\sigma(A,B)\subseteq\sigma(A)\times\sigma(B):\ |\operatorname{Im}\lambda|\le C(1+|\operatorname{Re}\lambda|).$$

Замечание 1. Частными случаями к. н. о. A и B таких, что $D(\operatorname{Re}A)\subseteq D(\operatorname{Im}A)$, являются:

1) к. н. о. A и B, где A самосопряженный;

2) к. н. о. A и B, где A ограниченный.

Следствие 3. *Пусть* A *и* B — *к. н. о. в* H *и, кроме того,* $D(A)\subseteq D(B)$, *т. е.* B *подчинен* A. *Тогда справедливо следствие* 2, *причем необходимое и достаточное условие слабой корректности задачи Коши для* (1) *на* R_+ *в* $G=H\times H_{-1}$ *можно записать в виде*

$$\inf\sigma(\operatorname{Re}A) > -\infty.$$

Доказательство основано на следующей лемме, вытекающей из теоремы 2 [1] для к. н. о. A, B и леммы 2 [1] для $(\lambda,\mu)\in C^2$.

Лемма 2. *Пусть* A, B — *к. н. о. в* H. *Эквивалентны следующие условия:*

1) $D(A)\subseteq D(B)$;

2) $\exists\, C<+\infty:\ \sigma(A,B)\subseteq\{(\lambda,\mu)\,|\,|\mu|\le C^2\}\cup\{(\lambda,\mu)\,|\,|\mu|\le C|\lambda|\}$;

3) $\exists\, C_1<+\infty \quad \forall\,(\lambda,\mu)\in\sigma(A,B):\ \min(|\omega_1|,|\omega_2|)\le C_1$.

Следствие 4. *Пусть* A *и* B — *к. н. о. в* H *и, кроме того,* B *сильно подчинен оператору* $A^2/4$. *Тогда справедливо утверждение следствия* 2.

Таким образом, для „неполных" уравнений вида (1) с к. н. о. A и B, т. е. если $A=0$ (и в более общем случае, когда A ограничен) или $B=0$ (и в более общем случае, когда B подчинен A), условие (4) выполняется автоматически и, следовательно, условие (2) является необходимым и достаточным для слабой корректности задачи Коши для (1) на R_+ в $G=H\times H_{-1}$. Заметим, что именно эти случаи, когда B подчинен A или A ограничен, рассмотрены в [7] (без дополнительного предположения, что A и B — коммутирующие нормальные операторы).

Но в общем случае уравнения (1) с к. н. о. A и B условие (4) в теореме 2 опустить нельзя. Рассмотрим, например, A и B из примера 2. В примере 2 показано, что условие (2) здесь выполняется. Но для любой $(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$ такой, что $\lambda \neq 0$, имеем $|\lambda_2|/|\lambda_1| = +\infty$, $|4\mu/\lambda^2 - 1| = 0$ и, принимая во внимание, что

$$\sup_{(\lambda,\mu)\in\sigma(A,B)} |\lambda| = +\infty,$$

получаем, что (6) (т. е. (4)) не выполняется.

В примере 2 показано, что для этих A и B не имеет места не только слабая корректность в $H \times H_{-1}$ (что следует из теоремы 2), но даже слабая корректность в $H \times H$.

Покажем на примере, как условие (2) изменяется дополнительным требованием (4).

Пример 3. Пусть A и B — к. н. о. в H и, кроме того, $\operatorname{Re} A = \operatorname{Im} B = 0$, т. е. для произвольной $(\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)$: $\lambda_1 = \mu_2 = 0$. Тогда условие (5) можно записать в виде

$$\exists\, 0 < \gamma < +\infty \quad \forall\, (\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)\colon\ \mu_1 \geq -\frac{\lambda_2^2}{4} - \gamma^2,$$

условия же (5) и (6) можно представить в виде

$$\exists\, 0 < \gamma, \quad \varepsilon < +\infty \quad \forall\, (\lambda, \mu) \in \sigma(A, B)\colon\ \mu_1 \geq (-1 + \varepsilon)\frac{\lambda_2^2}{4} - \gamma^2.$$

6. Чтобы изучить задачу Коши для уравнения (1), многие авторы рассматривали спектр ассоциированного с уравнением операторного пучка $P(z) = z^2 + Az + B$, $z \in C^1$ (см., например, [8]). Обозначим этот спектр через $\sigma(P)$. По определению, $\sigma(P) \subseteq C^1$ и $C^1 \setminus \sigma(P)$ — множество всех $z \in C^1$ таких, что линейный оператор $z^2 + Az + B$ в H с областью определения $D(A) \cap D(B)$ имеет обратный оператор в H, плотно определенный в H и ограниченный.

Утверждение 2. *Невозможно дать необходимое и достаточное условие слабой корректности задачи Коши для уравнения* (1) *с к. н. о.* A *и* B *на* R_+ *в* $G = H \times H_{-1}$ *в терминах размещения спектра* $\sigma(P)$ *операторного пучка* $z^2 + Az + B$ *в* C^1.

Чтобы доказать утверждение 2, рассмотрим следующие примеры. Спектр операторного пучка $z^2 + Az + B$ один и тот же в обоих случаях, но слабая корректность задачи Коши для (1) на R_+ в $G = H \times H_{-1}$ имеет место в первом случае и не имеет места во втором (по теореме 2).

Пример 4. $H = l_2(C^1)$, $A = 0$, $B = (b_{kl})_{k,l=1}^{\infty}$, где $b_{kl} = 0$ при $k \neq l$, $b_{kl} = k^2$ при $k = l$.

Пример 5. $H = l_2(C^1)$, $A = (a_{kl})_{k,l=1}^{\infty}$, $B = (b_{kl})_{k,l=1}^{\infty}$ — линейные операторы в H, определенные диагональными матрицами, где $a_{kl} = b_{kl} = 0$ при $k \neq l$; $a_{kl} = -i(2k+1)$, $b_{kl} = -k(k+1)$ при $k = l$, если k нечетное; $a_{kl} = i(2k-1)$, $b_{kl} = -k(k-1)$ при $k = l$, если k четное.

Замечание 2. Утверждение 2 остается справедливым, если заменить $G = H \times H_{-1}$ произвольным G таким, что $H \times H \subseteq G \subseteq H \times H_{-1}$ (см. примеры 4, 5).

Заметим, что само по себе условие (2) может быть выражено в терминах размещения $\sigma(P)$ в C^1.

Лемма 3. *Для к. н. о.* A *и* B *условие* (2) *эквивалентно следующему*:

$$\sup_{z \in \sigma(P)} \operatorname{Re} z < +\infty.$$

7. В заключение обсудим соотношение между приведенными выше определениями корректности в $G \subseteq H \times H$ и слабой корректности в $G \subseteq H \times \Phi'$ задачи Коши для уравнения (1) на R_+ и определениями равномерно хорошо поставленной и сильно хорошо поставленной задачи Коши для (1) на R_+, данными Фатторини в ([6], гл. VIII).

Утверждение 3. *Пусть* A *и* B — *к. н. о. в* H.

1. *Эквивалентны следующие предложения*:

а) задача Коши для уравнения (1) *на* R_+ *слабо корректна в* $G = H \times H$;

б) задача Коши для уравнения (1) *на* R_+ *равномерно хорошо поставлена.*

2. *Эквивалентны следующие предложения* i

а) задача Коши для уравнения (1) *на* R_+ *корректна в* $G = D(B) \times (D(A) \cap \cap D(|B|^{1/2}))$;

б) задача Коши для (1) *на* R_+ *слабо корректна в* $G = H \times H_-(|A| + 1)$;

в) задача Коши для (1) *на* R_+ *слабо корректна в* $G = H \times H_-(|A| + + |B|^{1/2} + 1) = H \times H_{-1}$;

г) задача Коши для (1) *на* R_+ *сильно хорошо поставлена.*

1. *Шкляр А. Я.* Совместный спектр коммутирующих самосопряженных операторов и критерии корректности и устойчивости для дифференциально-операторных уравнений // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 3. – С. 406–414.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
3. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
4. *Shklyar A. Ya.* Tests for correctness and weak correctness of the Cauchy problem for complete second order linear differential equations in Hilbert spaces. – Kiev: Inst. Math., Ukrainian Acad. Scie., 1993. – P. 1–33. – (Preprint / Ukrainian Acad. Scie. Inst. Math.; № 93.3).
5. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
6. *Fattorini H. O.* Second order linear differential equations in Banach spaces. – Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland, 1985. – 314 p.
7. *Neubrander F.* Well-posedness of higher order abstract Cauchy problems // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – **295**. – P. 257–290.
8. *Sova M.* Linear differential equations in Hilbert spaces // Rozprawy Mat. – 1981. – **91**, № 4. – P. 1–63.

Получено 29.06.94