УДК 517.968

С. Г. Солодкий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СЛОЖНОСТЬ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ*

We propose a modification of the projection scheme for solving ill-posed problems. We show that this modification allows one to obtain, for some classes of equations of the first kind, the best possible order of accuracy of Tikhonov regularization by using an amount of information which is far less than for the standard projection technique.

Розглядається проблема скінченновимірної апроксимації розв'язків рівнянь I роду, а також пропонується модифікація проекційної схеми розв'язування некоректних задач. Встановлено, що ця модифікація дозволяє одержати для багатьох класів рівнянь I роду найкращий можливий порядок точності тихоновської регуляризації, використовуючи при цьому значно меншу кількість інформації, ніж стандартна проекційна схема.

1. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — некоторый ортонормированный базис в гильбертовом пространстве X, а P_m — ортопроектор на $\operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, т. е. для любого $f \in X$

$$P_m f = \sum_{i=1}^{m} e_i(e_i, f),$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в X и, как обычно, $\|f\|_X = \sqrt{(f,f)}$.

Обозначим через X^r, $0 < r < \infty$, линейное подпространство X с нормой $\|f\|_{X^r} = \|f\|_X + \|D_r f\|_X$, где D_r — некоторый линейный оператор, действующий из X^r в X. Кроме того, для любого $m = 1, 2, \ldots$

$$\|I - P_m\|_{X^r \to X} \le c_r m^{-r},$$

где I — тождественный оператор, а константа c_r не зависит от m.

В настоящей работе будем рассматривать задачу конечномерной аппроксимации решения уравнений

$$Ax = f, \tag{1}$$

где A — линейный компактный оператор из X в X, а свободный член f принадлежит множеству $\operatorname{Range}(A) := \{f : f = Ag,\ g \in X\}$, т. е. уравнение (1) разрешимо. Однако, как правило, вместо свободного члена f нам задано некоторое его приближение $f_\delta \in X$ такое, что $\|f - f_\delta\|_X \le \delta$, где δ — малое положительное число, которое обычно известно.

Традиционный подход к конечномерной аппроксимации решений уравнений (1) заключается в следующем: мы выбираем некоторый конечномерный оператор $A_{N,\varepsilon}$ такой, что $\operatorname{rank} A_{N,\varepsilon} = N$ и $\|A - A_{N,\varepsilon}\|_X \le \varepsilon$, где ε зависит от δ. Далее, в рамках регуляризации по Тихонову, в качестве приближенного решения (1) берется минимум x_α функционала

$$\Omega_\alpha(A_{N,\varepsilon}, x) = \|A_{N,\varepsilon} x - f_\delta\|_X^2 + \alpha \|x\|_X^2, \tag{2}$$

где α — параметр регуляризации, зависящий от δ. Элемент x_α можно определить из уравнения Эйлера для функционала (2)

$$\alpha x + A_{N,\varepsilon}^* A_{N,\varepsilon} x = A_{N,\varepsilon}^* f_\delta, \tag{3}$$

* Выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (грант UB 1000).

где $A_{N,\varepsilon}^*$ — оператор, сопряженный к $A_{N,\varepsilon}$. Заметим, что решение (3) принадлежит $\operatorname{Range}(A_{N,\varepsilon}^*)$, $\dim \operatorname{Range}(A_{N,\varepsilon}^*) = \operatorname{rank} A_{N\varepsilon} = N$, и нахождение элемента x_α приводит к решению системы из N линейных алгебраических уравнений.

Так называемые проекционные методы решения некорректных задач состоят в следующем (см., например, [1], § 6. 3). В описанной выше схеме конечномерной аппроксимации полагаем $A_{N\varepsilon} = P_m A P_l$ и определяем x_α согласно (3) из уравнения

$$\alpha x + P_l A^* P_m A P_l x = P_l A^* P_m f_\delta. \tag{4}$$

В рамках проекционных методов возникает вопрос о соотношении между m и l. В следующем пункте мы обсудим этот вопрос для некоторых классов уравнений вида (1).

Введем прежде всего следующие классы операторов:

$$\mathcal{H}_\gamma^{r,s} := \{A : \|A\|_{X \to X^r} \le \gamma_1, \ \|A^*\|_{X \to X^s} \le \gamma_2\},$$

$$\overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s} := \{A : A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}, \ \|(D_r A)^*\|_{X \to X^s} \le \gamma_3\}, \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

где $\|\cdot\|_{X \to X^r}$ — обычная норма в пространстве линейных ограниченных операторов из X в X^r; A^* такой, что для любых $f, g \in X$ $(f, Ag) = (A^* f, g)$.

Договоримся под записью $a_n \prec b_n$ понимать, что существует постоянная c_0, при которой неравенство $a_n \le c_0 b_n$ выполняется для всех $n \ge n_0$. При этом постоянная c_0 не зависит от n. Запись $a_n \asymp b_n$ означает, что $a_n \prec b_n$ и $b_n \prec a_n$ одновременно.

Отметим далее, что в теории некорректных задач (1) множество „истокопредставимых" элементов

$$M_\rho(A) := \{u : u = A^* A v, \ \|v\|_X \le \rho\}$$

играет значительную роль. А именно, известно [2] (§ 4), что для $f \in AM_\rho(A) := \{f : f = Au, \ u \in M_\rho(A)\}$ уравнение (1) имеет единственное решение $x = A^{-1} f \in M_\rho(A)$. Кроме того, из [3] следует, что если $x_\alpha = x_\alpha(A_{N\varepsilon}, f_\delta)$ — некоторое приближенное решение (1), полученное в рамках схемы (2), (3), то

$$\inf_{A_{N,\varepsilon}} \sup_{f \in AM_\rho(A)} \sup_{f_\delta : \|f - f_\delta\|_X \le \delta} \left\| A^{-1} f - x_\alpha(A_{N,\varepsilon}, f_\delta) \right\|_X \asymp \delta^{2/3}. \tag{5}$$

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать классы $\Phi_\gamma^{r,s}$ и $\overline{\Phi}_\gamma^{r,s}$ уравнений (1) со свободными членами $f \in AM_\rho(A)$ и операторами A соответственно из классов $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ и $\overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$.

2. Используя результат [4], можно для классов $\Phi_\gamma^{r,s}$ и $\overline{\Phi}_\gamma^{r,s}$ решить вопрос о соотношении между m и l в (4).

Заметим прежде всего, что для $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$

$$\|(I - P_m)A\|_{X \to X} \le \|I - P_m\|_{X^r \to X} \|A\|_{X \to X^r} \le \gamma_1 c_r m^{-r},$$

$$\|A(I - P_l)\|_{X \to X} = \left\|(I - P_l)A^*\right\|_{X \to X} \le \gamma_2 c_s l^{-s}. \tag{6}$$

Пусть $x_{\alpha,m,l}$ — решение регуляризованного уравнения (4), т. е.

$$x_{\alpha,m,l} = (\alpha I + P_l A^* P_m A P_l)^{-1} P_l A^* P_m f_\delta. \tag{7}$$

Из [4] (теорема 3. 1) и (6) следует, что для

$$\alpha \asymp \delta^{2/3}, \quad m \asymp \delta^{-1/(3r)}, \quad l \asymp \delta^{-2/(3s)} \tag{8}$$

$$\sup_{A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}} \sup_{f \in AM_\rho(A)} \sup_{f_\delta : \|f - f_\delta\|_X \le \delta} \left\| A^{-1} f - x_{\alpha, m, l} \right\|_X \asymp \delta^{2/3}.$$

Если сравнивать эту оценку с (5), то очевидно, что проекционный метод (7), (8) реализует на классе $\Phi_\gamma^{r,s}$ оптимальный порядок точности. Оценим теперь сложность метода (7), (8).

Договоримся использовать только значение информационных функционалов (и. ф.) вида

$$(e_i, Ae_j), \quad (e_i, f_\delta), \tag{9}$$

называемых галеркинской информацией. Как обычно, под номером и. ф. (e_i, Ae_j) будем понимать точку (i, j) на координатной плоскости.

Приближенное решение $x_\alpha = x_{\alpha,m,l}$ имеет стандартный вид

$$x_\alpha = \sum_{i=1}^{l} d_i e_i, \tag{10}$$

где в случае $m \ge l$ $(r \le s/2)$ коэффициенты определяются из соотношения

$$\alpha d_i = \sum_{j=1}^{l} d_j \sum_{k=1}^{m} (e_k, Ae_j)(e_k, Ae_i) + \sum_{k=1}^{m} (e_k, f_\delta)(e_k, Ae_j).$$

Таким образом, для нахождения решения x_α согласно (10) нам потребуется выполнить $O(ml^2) \asymp \delta^{-(4r+s)/(3rs)}$ арифметических операций (а. о.) над $O(m + ml) \asymp \delta^{-(2r+s)/(3rs)}$ и. ф. (9). Однако для $m \le l$ $(r \ge s/2)$ более удобно искать решение (4) в виде

$$x_{\alpha,m,l} = \sum_{\nu=1}^{m} x_\nu \Psi_\nu, \tag{11}$$

где $\Psi_\nu = P_l A^* e_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, а неизвестные коэффициенты x_υ определяются из системы уравнений

$$\alpha x_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} a_{\nu,\mu} x_\mu = (e_\nu, f_\delta), \quad \nu = 1, 2, \ldots, m, \tag{12}$$

где

$$a_{\nu,\mu} = (e_\nu, A\Psi_\mu) = (e_\nu, AP_l A^* e_\mu) = \left(e_\nu, \sum_{i=1}^{l} Ae_i (e_i, A^* e_\mu) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} (e_\nu, Ae_i)(e_i, A^* e_\mu) = \sum_{i=1}^{l} (e_\nu, Ae_i)(e_\mu, Ae_i), \quad \nu, \mu = 1, 2, \ldots, m.$$

Таким образом, для вычисления всех коэффициентов $a_{\nu,\mu}$ нужно выполнить $O(lm^2) \asymp \delta^{-(2r+2s)/(3rs)}$ а. о. над значением и. ф. (9). Кроме того, необходимо решить систему (12) (не менее $O(m^2)$ а. о.), после чего можно перейти от представления (11) решения $x_{\alpha,m,l}$ к стандартному виду (10). А именно,

$$x_{\alpha,m,l} = \sum_{\nu=1}^{m} x_\nu \Psi_\nu = \sum_{\nu=1}^{m} x_\nu P_l A^* e_\nu = \sum_{\nu=1}^{m} x_\nu \sum_{i=1}^{l} e_i (e_i, A^* e_\nu) = \sum_{i=1}^{l} d_i e_i,$$

$$d_i = \sum_{\nu=1}^{m} x_\nu (e_\nu, Ae_i), \quad i = 1, 2, \ldots, l,$$

на что потребуется еще $(2m-1)l$ а. о. Число и. ф. (9), необходимых в этом случае для реализации схемы (7), (8), равно $m + ml$.

Такие рассуждения справедливы и для уравнений из класса $\overline{\Phi}_\gamma^{r,s}$.

Обозначим через $\mathrm{Card}(\text{АО})$ и $\mathrm{Card}(\text{ИФ})$ соответственно число а. о. и число и. ф. (9), необходимых для построения приближенного решения x_α. Теперь можно сформулировать полученное нами утверждение.

Теорема 1. *Для проекционного метода* (7), (8) *на классах* $\Phi_\gamma^{r,s}$ *и* $\overline{\Phi}_\gamma^{r,s}$ *справедливы оценки*

$$\mathrm{Card}(\text{ИФ}) \asymp \delta^{-(2r+s)/(3rs)},$$

$$\mathrm{Card}(\text{АО}) \asymp \begin{cases} \delta^{-(4r+s)/(3rs)}, & r \le s/2, \\ \delta^{-(2r+2s)/(3rs)}, & r \ge s/2. \end{cases}$$

3. Общая идея предлагаемой ниже модификации проекционной схемы состоит в следующем. Мы можем сохранить порядок точности (5) проекционных методов, существенно сократив при этом число используемых функциналов (e_i, Ae_j). В случае уравнений II рода эта идея успешно реализована в работах [5 – 7]. К уравнениям I рода такой подход впервые был применен С. В. Переверзевым [8]. Цель данной статьи — использовать преимущества указанной идеи на достаточно широких классах $\Phi_\gamma^{r,s}$ и $\overline{\Phi}_\gamma^{r,s}$ уравнений (1).

Пусть Γ_n^b — множество вида

$$\Gamma_n^b = \{1\} \times [1, 2^{bn}] \bigcup_{k=1}^{n} (2^{k-1}, 2^k] \times [1, 2^{bn-k}],$$

где b — произвольное действительное число, не меньшее 1. Каждому оператору $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ поставим в соответствие конечномерный оператор

$$A_n = A_{b,n} := \sum_{k=1}^{n} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{bn-k}} + P_1 A P_{2^{bn}}.$$

В случае, когда bn не является целым числом, под $P_{2^{bn-k}}$ будем понимать $P_{[2^{bn-k}]}$, где $[a]$ — целая часть числа a. Легко видеть, что

$$(e_i, A_n e_j) = \begin{cases} (e_i, Ae_j), & (i, j) \in \Gamma_n^b; \\ 0, & (i, j) \notin \Gamma_n^b. \end{cases}$$

Это означает, что для построения $A_{b,n}$ можно использовать только функционалы (9) с номерами из Γ_n^b. Полагая теперь в схеме конечномерной аппроксимации (2), (3) $A_{N,\varepsilon} = A_{b,n}$, будем находить приближенное решение $x_{\alpha,b,n} = x_{\alpha,n}$ из уравнения

$$\alpha x_{\alpha,n} + A_n^* A_n x_{\alpha,n} = A_n^* f_\delta, \tag{13}$$

где A_n^* — оператор, сопряженный к $A_n = A_{b,n}$. Метод, состоящий в отыскании приближенного решения (1) из (13), обозначим через $\mathcal{P}_{b,n}$.

Подсчитаем теперь число а. о., производных над значениями и. ф. (9), необходимых для построения приближенного решения $x_{\alpha,b,n}$. Прежде всего из определения $A_{b,n}$ находим

$$A_n^* = \sum_{k=1}^{n} P_{2^{bn-k}} A^*(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) + P_{2^{bn}} A^* P_1, \tag{14}$$

$$A_n^* A_n = \sum_{k=1}^{n} P_{2^{bn-k}} A^*(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{bn-k}} + P_{2^{bn}} A^* P_1 A P_{2^{bn}}. \tag{15}$$

Учитывая (14) и (15), решение (13) будем искать в виде

$$x_{\alpha,b,n} = \sum_{i=1}^{2^n} x_i \varphi_i, \tag{16}$$

где

$$\varphi_i = \begin{cases} P_{2^{bn}} A^* e_1; & i = 1; \\ P_{2^{bn-\nu}} A^* e_i, & i \in \left(2^{\nu-1}, 2^{\nu}\right], \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Пусть $T_0 = \{1\}$, $T_m = \{2^{m-1}+1, 2^{m-1}+2, \ \ldots \ , 2^m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, $\operatorname{card} T_0 = 1$, $\operatorname{card} T_m = 2^{m-1}$. Легко видеть, что

$$A_n^* A_n \varphi_j = \sum_{i=1}^{2^n} \overline{a}_{ij} \varphi_i,$$

где $\overline{a}_{ij} = \overline{a}_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, 2^n$, и для $i \in T_k$, $j \in T_\nu$, $k, \nu = 0, 1, \ldots, n$, $k \le \nu$

$$\overline{a}_{ij} = \left(e_i, A P_{2^{bn-\nu}} A^* e_j\right). \tag{17}$$

Кроме того, $A_n^* f_\delta = \sum_{i=1}^{2^n} (e_i, f_\delta)\varphi_i$. Неизвестные коэффициенты x_i в представлении (16) будем определять из системы линейных уравнений

$$\alpha x_i + \sum_{j=1}^{2^n} \overline{a}_{ij} x_j = (e_i, f_\delta), \quad i = 1, 2, \ldots, 2^n.$$

Чтобы решить эту систему, например, методом Гаусса, нам необходимо выполнить $N_1 \asymp 2^{3n}$ а. о. над коэффициентами $\overline{a}_{ij}$ и и. ф. (e_i, f_δ). Оценим теперь число операций, требуемых для вычисления коэффициентов $\overline{a}_{ij}$. Заметим, что

$$\overline{a}_{ij} = \left(e_i, A P_{2^{bn-\nu}} A^* e_j\right) = \sum_{\mu=1}^{2^{bn-\nu}} (e_i, A e_\mu)(e_j, A e_\mu)$$

Таким образом, для определения коэффициента $\overline{a}_{ij}$ мы должны выполнить $2^{bn-\nu+1} - 1$ а. о. над значениями и. ф. (9). При фиксированных k и ν требуется выполнение $O(\operatorname{card} T_k \cdot \operatorname{card} T_\nu \cdot (2^{bn-\nu+1} - 1))$ операций для нахождения всех коэффициентов $\overline{a}_{ij}$ с i и j, удовлетворяющими условиям (17). Наконец, при всех k и ν таких, что $k, \nu = 0, 1, \ldots, n, k \le \nu$, для определения коэффициентов $\overline{a}_{ij}$ с индексами (17) достаточно выполнить не более N_2 а. о. над и. ф. (9), где

$$N_2 = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k=0}^{\nu} \operatorname{card} T_k \cdot \operatorname{card} T_\nu \cdot (2^{bn-\nu+1} - 1) \asymp$$

$$\asymp 2^{bn} \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k=0}^{\nu} 2^k \asymp 2^{bn} \sum_{\nu=0}^{n} 2^\nu \asymp 2^{(b+1)n}.$$

Если коэффициенты x_i известны, то можно перейти от представления (16) к стандартному виду (10). А именно,

$$x_{\alpha,b,n} = \sum_{i=1}^{2^n} x_i \varphi_i = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i \in T_\nu} x_i P_{2^{bn-\nu}} A^* e_i + x_1 P_{2^{bn}} A^* e_1 =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{2^{bn-\nu}} e_\mu \sum_{i \in T_\nu} x_i (e_i, A e_\mu) + \sum_{\mu=1}^{2^{bn}} x_1 e_\mu (e_1, A e_\mu) = \sum_{p=1}^{2^{bn}} d_p e_p,$$

$$d_p = \sum_{i=1}^{2^{\nu(p)}} x_i (e_i, A e_p),$$

где $\nu(p)$ — наибольшее целое число такое, что

$$2^{\nu(p)} \le \min\left\{2^n, 2^{bn}/p\right\}.$$

Таким образом, для вычисления всех коэффициентов d_p, $p = 1, 2, \ldots, 2^{bn}$, достаточно выполнить не более N_3 а. о., где

$$N_3 \asymp \sum_{p=1}^{2^{bn}} 2^{\nu(p)} \le 2^{bn} \sum_{p=1}^{2^{bn}} \frac{1}{p} \asymp 2^{bn} n.$$

Окончательно для метода $\mathcal{P}_{b,n}$ мы можем записать оценки, характеризующие его сложность:

$$\begin{gathered} \operatorname{Card}(\text{ИФ}) \asymp 2^n + n 2^{bn} \asymp n 2^{bn}, \\ \operatorname{Card}(\text{АО}) \asymp N_1 + N_2 + N_3 \asymp \begin{cases} 2^{3n}, & b \le 2; \\ 2^{(b+1)n}, & b \ge 2. \end{cases} \end{gathered} \tag{18}$$

4. Перейдем к получению основных результатов настоящей работы.

Теорема 2. *Пусть* $2^{-2nr} \asymp \alpha \asymp \delta^{2/3}$. *Тогда*

а) *при*

$$b = \begin{cases} (3r + 2s)/(2s), & r \le 2s; \\ 2r/s, & r \ge 2s, \end{cases}$$

справедливо

$$\sup_{A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}} \sup_{f \in AM_\rho(A)} \sup_{f_\delta : \|f - f_\delta\|_X \le \delta} \left\| A^{-1} f - x_{\alpha,b,n} \right\|_X \asymp \delta^{2/3};$$

б) *при*

$$b = \begin{cases} (r + s)/s, & r \le s; \\ 2r/s, & r \ge s, \end{cases}$$

справедливо

$$\sup_{A \in \overline{\mathcal{H}}_{\gamma}^{r,s}} \sup_{f \in AM_{\rho}(A)} \sup_{f_{\delta} : \| f - f_{\delta} \|_X \le \delta} \left\| A^{-1} f - x_{\alpha, b, n} \right\|_X \asymp \delta^{2/3}.$$

Доказательство. Следуя [4], рассмотрим операторы

$$R_{\alpha}(G) = (\alpha I + G^* G)^{-1} G^*, \quad S_{\alpha}(G) = I - R_{\alpha}(G) G,$$

для которых при любом линейном ограниченном операторе G из X в X найдены в [4] следующие оценки:

$$\left\| R_{\alpha}(G) \right\|_{X \to X} \le c_1 \alpha^{-1/2}, \quad \| S_{\alpha}(G) \|_{X \to X} \le c_2,$$
$$\left\| S_{\alpha}(G) G^* G \right\|_{X \to X} \le c_3 \alpha, \tag{19}$$

где c_1, c_2, c_3 не зависят от α и G. Полагая $R_{\alpha, b, n} = R_{\alpha}(A_{b,n})$, $S_{\alpha, b, n} = S_{\alpha}(A_{b,n})$, из определения $x_{\alpha, b, n}$ находим

$$x_{\alpha, b, n} = R_{\alpha, b, n} f_{\delta},$$

$$A^{-1} f - x_{\alpha, b, n} = R_{\alpha, b, n}(f - f_{\delta}) + S_{\alpha, b, n} A^{-1} f + R_{\alpha, b, n}(A_n - A) A^{-1} f. \tag{20}$$

Учитывая первую оценку из (19) при $\alpha \asymp \delta^{2/3}$ и $G = A_{b,n}$, имеем

$$\| R_{\alpha, b, n}(f - f_{\delta}) \|_X \le \left\| R_{\alpha}(A_{b,n}) \right\|_{X \to X} \| f - f_{\delta} \|_X \le c_1 \alpha^{-1/2} \delta \asymp \delta^{2/3}. \tag{21}$$

Кроме того, для $f \in AM_{\rho}(A)$ справедливо $A^{-1} f = A^* A u$ и $\| u \|_X \le \rho$. Тогда с учетом (19) получаем

$$\| S_{\alpha, b, n} A^{-1} f \|_X = \| S_{\alpha, b, n} A^* A u \|_X \le \| S_{\alpha, b, n} A_n^* A_n u \|_X +$$
$$+ \| S_{\alpha, b, n}(A^* A - A_n^* A_n) u \|_X \le c_3 \rho \alpha + c_2 \rho \| A^* A - A_n^* A_n \|_{X \to X}. \tag{22}$$

Отсюда следует первое условие оптимальности оператора $A_{b,n}$:

$$\text{i)} \quad \| A^* A - A_n^* A_n \|_{X \to X} \prec \delta^{2/3}.$$

Осталось оценить последнее слагаемое в (20). Из (14) следует, что $A_n^* P_{2^n} = A_n^*$, а тогда

$$R_{\alpha, b, n}(P_{2^n} A - A) A^{-1} f = (\alpha I + A_n^* A_n)^{-1} (A_n^* P_{2^n} A - A_n^* A) A^{-1} f = 0.$$

Следовательно, учитывая (19), для $f \in AM_{\rho}(A)$ имеем

$$\| R_{\alpha, b, n}(A_n - A) A^{-1} f \|_X \le \| R_{\alpha, b, n}(A_n - P_{2^n} A) A^{-1} f \|_X \le$$
$$\le \left\| R_{\alpha}(A_{b,n}) \right\|_{X \to X} \| A_n A^* - P_{2^n} A A^* \|_{X \to X} \| A u \|_X \le$$
$$\le c_1 \gamma_1 \rho \alpha^{-1/2} \| A_n A^* - P_{2^n} A A^* \|_{X \to X}. \tag{23}$$

Отсюда получаем второе условие на оператор $A_{b,n}$:

$$\text{ii)} \quad \| A_n A^* - P_{2^n} A A^* \|_{X \to X} \prec \alpha^{1/2} \delta^{2/3} \asymp \delta.$$

Таким образом, для доказательства теоремы 2 достаточно в силу (5), (20) – (23) подобрать для оператора $A_{b,n}$ коэффициент b так, чтобы выполнялись условия i) и ii). Оценки норм операторов, содержащихся в указанных условиях, вытекают из следующих лемм.

Лемма 1. *Для* $A \in \mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}$

$$\|A_n A^* - P_{2^n} AA^*\|_{X\to X} < 2^{-2(b-1)sn},$$

а для $A \in \overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$

$$\|A_n A^* - P_{2^n} AA^*\|_{X\to X} < \begin{cases} 2^{-(2(b-1)s+r)n}, & r<2s; \\ 2^{-brn} n, & r=2s; \\ 2^{-2bsn} n, & r>2s. \end{cases}$$

Доказательство. Прежде всего из определения A_n находим

$$A_n A^* - P_{2^n} AA^* =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}})\left(AP_{2^{bn-k}} A^* - AA^*\right) + P_1\left(AP_{2^{bn}} A^* - AA^*\right). \tag{24}$$

Далее заметим, что для $A \in \overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$

$$\left\|A(I-P_\mu)\right\|_{X\to X^r} \le \left\|(I-P_\mu)A^*\right\|_{X\to X} + \left\|(I-P_\mu)(D_r A)^*\right\|_{X\to X} \le$$

$$\le c_s \mu^{-s}\left(\left\|A^*\right\|_{X\to X^s} + \left\|(D_r A)^*\right\|_{X\to X^s}\right) \le c_s(\gamma_2+\gamma_3)\mu^{-s}.$$

Используя это неравенство, получаем

$$\left\|(I-P_\nu)A(I-P_\mu)\right\|_{X\to X} \le \|I-P_\nu\|_{X^r\to X}\left\|A(I-P_\mu)\right\|_{X\to X^r} \le$$

$$\le c_r c_s(\gamma_2+\gamma_3)\nu^{-r}\mu^{-s}. \tag{25}$$

Тогда имеем

$$\left\|(P_{2^k} - P_{2^{k-1}})\left(AP_{2^{bn-k}} A^* - AA^*\right)\right\|_{X\to X} \le$$

$$\le \left\|(I-P_{2^k})A(I-P_{2^{bn-k}})\left(A^* - P_{2^{bn-k}} A^*\right)\right\|_{X\to X} +$$

$$+ \left\|(I-P_{2^{k-1}})A(I-P_{2^{bn-k}})\left(A^* - P_{2^{bn-k}} A^*\right)\right\|_{X\to X} \le$$

$$\le c_r c_s(\gamma_2+\gamma_3)2^{-2(bn-k)s}(2^{-kr} + 2^{-(k-1)r})\|I - P_{2^{bn-k}}\|_{X^s\to X}\|A^*\|_{X\to X^s} \le$$

$$\le c_r c_s \gamma_2(\gamma_2+\gamma_3)2^{-2bsn+k(2s-r)}, \tag{26}$$

а для любого $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$

$$\left\|P_1\left(AP_{2^{bn}} A^* - AA^*\right)\right\|_{X\to X} \le$$

$$\le \left\|A(I-P_{2^{bn}})\left(A^* - P_{2^{bn}} A^*\right)\right\|_{X\to X} < 2^{-2bsn}. \tag{27}$$

Объединяя (24), (26) и (27), для $A \in \overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$ получаем

$$\|A_n A^* - P_{2^n} AA^*\|_{X\to X} < 2^{-2bsn}\sum_{k=0}^{n} 2^{k(2s-r)}.$$

Отсюда непосредственно вытекает вторая часть утверждения леммы.

Пусть теперь $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$. Тогда вместо (26) имеем

$$\left\|(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})(AP_{2^{bn-k}}A^*-AA^*)\right\|_{X\to X} \prec \left\|AP_{2^{bn-k}}A^*-AA^*\right\|_{X\to X} =$$
$$= \left\|A(I-P_{2^{bn-k}})(A^*-P_{2^{bn-k}}A^*)\right\|_{X\to X} \le c_s^2\gamma_2^2 2^{-2(bn-k)s}. \tag{28}$$

Объединяя (24), (27), (28) для $A\in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ получаем

$$\|A_nA^* - P_{2^n}AA^*\|_{X\to X} \prec 2^{-2bsn}\sum_{k=0}^{n} 2^{2sk} \asymp 2^{-2(b-1)sn}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Для* $A\in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$

$$\|A^*A - A_n^*A_n\|_{X\to X} \prec \begin{cases} \max\left\{2^{-2rn}, 2^{-(bs-s+r)n}\right\}, & r<s; \\ \max\left\{2^{-2rn}, 2^{-brn}n\right\}, & r=s; \\ \max\left\{2^{-2rn}, 2^{-bsn}\right\}, & r>s, \end{cases}$$

а для $A\in \overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$

$$\|A^*A - A_n^*A_n\|_{X\to X} \prec \begin{cases} \max\left\{2^{-2rn}, 2^{-(bs-s+2r)n}\right\}, & r<s/2; \\ \max\left\{2^{-2rn}, 2^{-2brn}n\right\}, & r=s/2; \\ \max\left\{2^{-2rn}, 2^{-bsn}\right\}, & r>s/2. \end{cases}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что для $A\in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ в силу (6)

$$\|A^*A - A_n^*A_n\|_{X\to X} \le \left\|A^*(I-P_{2^n})(I-P_{2^n})A\right\|_{X\to X} +$$
$$+ \|A^*P_{2^n}A - A_n^*A_n\|_{X\to X} \le \|I-P_{2^n}\|^2_{X^r\to X}\|A\|^2_{X\to X^r} +$$
$$+ \|A^*P_{2^n}A - A_n^*A_n\|_{X\to X} \le c_r^2\gamma_1^2 2^{-2nr} + \|A^*P_{2^n}A - A_n^*A_n\|_{X\to X}. \tag{29}$$

Далее, учитывая (15), имеем

$$\|A^*P_{2^n}A - A_n^*A_n\|_{X\to X} \le$$
$$\le \|A^*P_1A - P_{2^{bn}}A^*P_1AP_{2^{bn}}\|_{X\to X} + \sum_{k=1}^{n}\|B_k\|_{X\to X}, \tag{30}$$

$$B_k = A^*(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})A - P_{2^{bn-k}}A^*(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})AP_{2^{bn-k}}.$$

С учетом (6) и (25) для $A\in \overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$ находим

$$\|B_k\|_{X\to X} \le \left\|(I-P_{2^{bn-k}})A^*(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})A\right\|_{X\to X} +$$
$$+ \left\|P_{2^{bn-k}}A^*(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})A(I-P_{2^{bn-k}})\right\|_{X\to X} \prec$$
$$\prec 2^{-(bsn-k(s-2r))}. \tag{31}$$

Аналогично для $A\in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ имеем

$$\|B_k\|_{X\to X} \prec 2^{-(bsn-k(s-r))}. \tag{32}$$

Кроме того, для любого $A\in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ выполняется

$$\| A^* P_1 A - P_{2^{bn}} A^* P_1 A P_{2^{bn}} \|_{X \to X} \le$$
$$\le \left\| (I - P_{2^{bn}}) A^* P_1 A \right\|_{X \to X} + \left\| P_{2^{bn}} A^* P_1 A (I - P_{2^{bn}}) \right\|_{X \to X} \prec 2^{-bsn}. \tag{33}$$

Таким образом, в силу (30), (31) и (33) для $A \in \overline{\mathcal{H}}_\gamma^{r,s}$ имеем

$$\| A^* P_{2^n} A - A_n^* A_n \|_{X \to X} \prec 2^{-bsn} \sum_{k=0}^{n} 2^{k(s-2r)},$$

откуда с учетом (29) получаем вторую часть утверждения леммы.

Аналогично в силу (29), (30), (32) и (33) доказывается первая часть утверждения леммы.

Вернемся к доказательству теоремы 2. Если теперь положить $M = \log(\delta^{-1})/n$, то в силу условий i), ii) и лемм 1, 2 получаем следующие системы неравенств:

для уравнений из $\Phi_\gamma^{r,s}$

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} r < s; \\ r \ge M/3; \\ (b-1)s \ge M/2; \\ (b-1)s + r \ge 2M/3, \end{cases} \qquad \text{(II)} \quad \begin{cases} r = s; \\ r \ge M/3; \\ (b-1)r \ge M/2; \\ br \ge 2M/3 + \log n / n, \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} r > s; \\ r \ge M/3; \\ (b-1)s \ge M/2; \\ bs \ge 2M/3, \end{cases}$$

для уравнений из $\overline{\Phi}_\gamma^{r,s}$

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} r < s/2; \\ r \ge M/3; \\ 2(b-1)s + r \ge M; \\ (b-1)s + 2r \ge 2M/3, \end{cases} \qquad \text{(V)} \quad \begin{cases} r = s/2; \\ r \ge M/3; \\ 4br - 3r \ge M; \\ br \ge M/3 + \log n/(2n), \end{cases}$$

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} s/2 < r < 2s; \\ r \ge M/3; \\ 2(b-1)s + r \ge M; \\ bs \ge 2M/3, \end{cases} \qquad \text{(VII)} \quad \begin{cases} r = 2s; \\ r \ge M/3; \\ br \ge 4M/3; \\ br \ge M + \log n / n, \end{cases} \qquad \text{(VIII)} \quad \begin{cases} r > 2s; \\ r \ge M/3; \\ bs \ge M/2; \\ bs \ge 2M/3. \end{cases}$$

Поскольку целью настоящей работы является построение не просто оптимального по точности проекционного метода $\mathcal{P}_{b,n}$, но и наиболее экономичного в смысле величин Card (ИФ), Card (АО), а указанные величины выражаются (18) через $2^{bn} \asymp \delta^{-b/M}$, то отсюда очевидно, что наша задача сводится к отысканию в каждом из 8 отдельных случаев наименьшего b и наибольшего M, удовлетворяющих соответствующей системе неравенств. Таким образом, путем элементарных рассуждений для каждой системы неравенств получаем:

$$\text{(I), (II):}\ M = 3r,\ b = (3r + 2s)/(2s);$$

$$\text{(III):}\ M = 3r,\ b = (3r + 2s)/(2s) \ \text{при}\ r \le 2s \ \text{и}\ b = 2r/s \ \text{при}\ r \ge 2s;$$

$$\text{(IV), (V):}\ M = 3r,\ b = (r + s)/s;$$

$$\text{(VI):}\ M = 3r,\ b = (r + s)/s \ \text{при}\ r \le s \ \text{и}\ b = 2r/s \ \text{при}\ r \ge s;$$

$$\text{(VII), (VIII):}\ M = 3r,\ b = 2r/s.$$

При этом заметим, что для приведенных значений b и M последние неравенства в системах (II), (V) и (VII) являются следствием остальных неравенств системы. Теорема 2 доказана.

Сформулируем теперь теорему, содержащую оценки предложенной нами модификации проекционного метода.

Теорема 3. *Для метода* $\mathcal{P}_{b,n}$ *справедливы оценки:*

а) *на классе* $\Phi_\gamma^{r,s}$

$$\mathrm{Card}\,(\text{ИФ}) \asymp \begin{cases} \delta^{-(3r+2s)/(6rs)}\log\delta^{-1}, & r \le 2s; \\ \delta^{-2/(3s)}\log\delta^{-1}, & r \ge 2s, \end{cases}$$

$$\mathrm{Card}\,(\text{АО}) \asymp \begin{cases} \delta^{-1/r}, & r \le 2s/3; \\ \delta^{-(3r+4s)/(6rs)}, & 2s/3 \le r \le 2s; \\ \delta^{-(2r+s)/(3rs)}, & r \ge 2s; \end{cases}$$

б) *на классе* $\overline{\Phi}_\gamma^{r,s}$

$$\mathrm{Card}\,(\text{ИФ}) \asymp \begin{cases} \delta^{-(r+s)/(3rs)}\log\delta^{-1}, & r \le s; \\ \delta^{-2/(3s)}\log\delta^{-1}, & r \ge s, \end{cases}$$

$$\mathrm{Card}\,(\text{АО}) \asymp \begin{cases} \delta^{-1/r}, & r \le s; \\ \delta^{-(2r+s)/(3rs)}, & r \ge s. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 3 непосредственно следует из утверждения теоремы 2 и оценок (18).

Замечания. **1.** Сравнение теорем 1 и 3 показывает, что для классов $\Phi_\gamma^{r,s}$ и $\overline{\Phi}_\gamma^{r,s}$ предложенный нами метод $\mathcal{P}_{b,n}$ является по сравнению с обычным проекционным методом (7), (8) более экономичным по числу используемых им и. ф. (9) при любых r и s, а также по числу а. о. производимых над этими функционалами при $r \ge s/2$.

2. Ранее метод $\mathcal{P}_{b,n}$ при $b = 2$ был применен в работе [8] для решения уравнений из класса $\overline{\Phi}_\gamma^{r,r}$. Полученные для этого случая в теореме 3 настоящей работы оценки лучше соответствующих результатов из [8] на логарифмический множитель.

1. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
2. *Вайникко Г. М.* Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. – Тарту: Тарт. ун-т, 1982. – 110 с.
3. *Вайникко Г. М.* Принцип невязки для одного класса регуляризованных методов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1982. – **22**, № 3. – С. 499–515.
4. *Plato R., Vainikko G.* On the regularization of projection methods for solving ill-posed problems // Numer. Math. – 1990. – **57**. – P. 63–70.
5. *Alpert B., Beylkin G., Coifman R., Rokhlin V.* Wavelet-like bases for the fast solution of second-kind integral equation // SIAM J. Sci. Comput. – 1993. – **14**. – P. 159–184.
6. *Heinrich S.* Random approximation in numerical analysis // Funct. Anal. (New York). – 1994. – P. 123–171.
7. *Pereverzev S. V., Schapirov C. C.* Information complexity of equations of the second kind with compact operators in Hilbert space // J. Complexity. – 1992. – **8**. – P. 176–202.
8. *Pereverzev S. V.* Optimization of projection methods for solving ill-posed problems. – Kaiserslautern, 1994. – **12** p. – (Preprint / Univ. Kaiserslautern; 254).

Получено 14.02.95