УДС 517.944: 519.46

В. М. Федорчук, О. С. Лейбов
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

СИМЕТРІЙНА РЕДУКЦІЯ І ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ БАГАТОМІРНОГО РІВНЯННЯ МОНЖА – АМПЕРА

By using the subgroup structure of the generalized Poincare group $P(1,4)$, the symmetry reduction of the multidimensional Monge–Ampere equation to differential equations with fewer number of independent variables is done. Taking into account the solutions of the reduced equations some classes of exact solutions of the investigated equation are constructed.

З використанням підгрупової структури узагальненої групи Пуанкаре $P(1,4)$ проведена симетрійна редукція багатомірного рівняння Монжа–Ампера до диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних. На основі розв'язків редукованих рівнянь побудовані деякі класи точних розв'язків досліджуваного рівняння.

Розв'язування багатьох задач геометрії, теоретичної фізики, газової динаміки зводиться до дослідження рівнянь Монжа–Ампера в просторах різної вимірності (див., наприклад, [1–7]). В [8–10], зокрема, вивчені симетрійні властивості багатомірного рівняння Монжа–Ампера і на основі спеціальних анзаців побудовані багатопараметричні сім'ї точних розв'язків досліджуваного рівняння.

Розглянемо багатомірне рівняння Монжа–Ампера вигляду [8]

$$\det(u_{\mu\nu}) = \lambda(1-u_\nu u^\nu)^3, \quad \lambda \neq 0, \tag{1}$$

де

$$u = u(x), \quad x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in R_4, \quad u_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu},$$

$$u^\nu = g^{\nu\alpha} u_\alpha, \quad u_\alpha \equiv \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \quad g_{\mu\nu} = (1,-1,-1,-1)\delta_{\mu\nu},$$

$\mu,\ \nu,\ \alpha = 0, 1, 2, 3$. Рівняння (1) інваріантне [8–10] відносно узагальненої групи Пуанкаре $P(1,4)$ — групи поворотів і зсувів у п'ятимірному просторі Мінковського. Для дослідження рівняння (1) використовувалася підгрупова структура [11–15] групи $P(1,4)$. У даній роботі на основі інваріантів [16, 17] підгруп групи $P(1,4)$ побудовані анзаци, які редукують рівняння (1) до диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних, проведена відповідна симетрійна редукція. На основі розв'язків редукованих рівнянь побудовані деякі класи точних розв'язків багатомірного рівняння Монжа–Ампера.

1. Спочатку одержимо анзаци, які редукують рівняння (1) до звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), одержані ЗДР та розв'язки багатомірного рівняння Монжа–Ампера.

1. $u^2 = \varphi^2(\omega) - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \quad \omega = x_0; \quad \varphi'' + \lambda\varphi^3(1-\varphi'^2)^3 = 0;$

$$u = \left[(x_0+c)^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + \frac{k}{\sqrt{-\lambda}}\right]^{1/2}, \quad k = 0, \pm 1,$$

c — довільна стала.

2. $$u^2 = -\varphi^2(\omega) + x_0^2, \quad \omega = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2};$$

$$\varphi''\varphi'^2 - \lambda\omega^2\varphi(\varphi'^2 - 1)^3 = 0;$$

$$u = \left\{x_0^2 - \left[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} + c\right]^2 + \frac{k}{\sqrt{-\lambda}}\right\}^{1/2}, \quad k = 0, \pm 1, \quad k \cdot c = 0.$$

3. $$u^2 = \varphi^2(\omega) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2, \quad \omega = x_3; \quad \varphi'' - \lambda\varphi^3(\varphi'^2 + 1)^3 = 0;$$

$$u = \left[x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - (x_3 + c)^2 + \frac{k}{\sqrt{-\lambda}} \right]^{1/2}, \quad k = 0, \pm 1,$$

4. $$u^2 = \varphi^2(\omega) + x_0^2 - x_3^2, \quad \omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2};$$

$$\varphi''\varphi' + \lambda\omega\varphi^2(\varphi'^2 + 1)^3 = 0;$$

$$u = \left\{ x_0^2 - [(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} + c]^2 - x_3^2 + \frac{k}{\sqrt{-\lambda}} \right\}^{1/2}, \quad k = 0, \pm 1, \quad k \cdot c = 0.$$

5. $$u = \varphi(\omega), \quad \omega = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2)^{1/2};$$

$$\varphi''\varphi'^3 + \lambda\omega^3(\varphi'^2 + 1)^3 = 0;$$

$$u = \left\{ -[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2)^{1/2} + c]^2 + \frac{k}{\sqrt{-\lambda}} \right\}^{1/2}, \quad k = 0, \pm 1, \quad k \cdot c = 0.$$

6. $$u^2 = \varphi^2(\omega) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2, \quad \omega = \frac{c}{\alpha} x_3 + \ln(x_0 + u); \quad \alpha \neq 0,$$

$$\varphi''\varphi^2 - \varphi''\varphi'\varphi - \varphi'^3 - \frac{\lambda\alpha^2}{c^2}\left(\frac{c^2}{\alpha^2}\varphi'^2\varphi - 2\varphi' + \varphi \right)^3 = 0, \quad c > 0.$$

7. $$u^2 = -\varphi^2(\omega) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2, \quad \omega = x_3 + \alpha \ln(x_0 + u);$$

$$\varphi''\varphi^2 - \alpha\varphi''\varphi'\varphi - \alpha\varphi'^3 - \lambda(\varphi'^2\varphi + 2\alpha\varphi' - \varphi)^3 = 0, \quad \alpha > 0.$$

Анзаци (1)–(7) можна подати у вигляді

$$h(u) = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \tag{2}$$

де $h(u)$, $f(x)$, $g(x)$ — задані функції, $\varphi(\omega)$ — невідома функція, $\omega = \omega(x, u)$ — одномірні інваріанти підгруп групи $P(1,4)$.

8. $$2\omega x_0 = -\varphi(\omega) + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad \omega = x_0 + u;$$

$$\frac{\omega^2}{2}\varphi'' - \omega\varphi' + \varphi - \lambda(\omega\varphi' - \varphi + \omega^2)^3 = 0;$$

$$u = \frac{1}{2}\left\{ c \pm \left[(2x_0 + c)^2 - 4\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{k}{\sqrt{-\lambda}} \right) \right]^{1/2} \right\}, \quad k = 0, \pm 1.$$

9. $$2\omega x_0 - \frac{\varepsilon\alpha x_3^2}{2\omega} = -\varphi(\omega) + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \varepsilon\alpha x_0, \quad \omega = x_0 + u;$$

$$4(2\omega + \varepsilon\alpha)[(2\omega + \varepsilon\alpha)^2\varphi'' - 4(2\omega + \varepsilon\alpha)\varphi' + 8\varphi] - \lambda\omega[2(2\omega + \varepsilon\alpha)\varphi' -$$

$$-4\varphi + (2\omega + \varepsilon\alpha)^2]^3 = 0; \quad x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - u^2 +$$

$$+\left(c - \frac{\varepsilon\alpha}{2} \right)(u + x_0) - \varepsilon\alpha x_0 + \frac{\varepsilon\alpha x_3^2}{2(u + x_0)} + \frac{\varepsilon c\alpha}{2} = 0, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \alpha > 0.$$

10. $$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2}\omega + \omega(\omega - 1)(\omega - x_0) = \varphi(\omega) + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \quad \omega = x_0 + u;$$

$$\omega(\omega - 1)^2[\omega^2(\omega - 1)^2\varphi'' - 2\omega(2\omega^2 - 3\omega + 1)\varphi' + 2(3\omega^2 - 3\omega + 1)\varphi] -$$

$$-\lambda[2\omega(\omega-1)\varphi'-2(2\omega-1)\varphi-\omega^2(\omega-1)^2]^3 = 0;$$

$$\frac{1}{2}(x_0+u)(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + (x_0+u)(x_0+u-1)\left[\frac{1}{2}(u-x_0)-c\right]-$$

$$-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2) = 0.$$

11. $$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{2}\omega+\omega(\omega+1)(\omega-x_0) = \varphi(\omega)-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}, \quad \omega = x_0+u;$$

$$\omega(\omega+1)^2[\omega^2(\omega+1)^2\varphi''-2(2\omega^3+3\omega^2+\omega)\varphi'+2(3\omega^2+3\omega+1)\varphi]-$$

$$-\lambda[2\omega(\omega+1)\varphi'-2(2\omega+1)\varphi-\omega^2(\omega+1)^2]^3 = 0;$$

$$\frac{1}{2}(x_0+u)(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + (x_0+u)(x_0+u+1)\left[\frac{1}{2}(u-x_0)-c\right]+$$

$$+\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2) = 0.$$

12. $$(\omega+1)\left[\omega(\omega-\beta)(\omega-x_0)+(\omega-\beta)\frac{x_1^2}{2}+\omega\frac{x_3^2}{2}\right]+\omega(\omega-\beta)\frac{x_2^2}{2} = \varphi(\omega),$$

$$\omega = x_0+u; \quad \omega^2(\omega+1)^2(\omega-\beta)^2\{\omega^2(\omega+1)^2(\omega-\beta)^2\varphi''-2\omega(\omega+1)\times$$

$$\times(\omega-\beta)[3\omega^2-2(\beta-1)\omega-\beta]\varphi'+2[\omega^2(\omega-\beta)^2+\omega^2(\omega+1)^2+$$

$$+(\omega-\beta)^2(\omega+1)^2+\omega^2(\omega-\beta)(\omega+1)+\omega(\omega-\beta)^2(\omega+1)+$$

$$+\omega(\omega-\beta)(\omega+1)^2]\varphi\}-\lambda\{2\omega(\omega-\beta)(\omega+1)\varphi'-$$

$$-2[3\omega^2-2(\beta-1)\omega+\beta]\varphi-\omega^2(\omega-\beta)^2(\omega+1)^2\}^3 = 0;$$

$$(x_0+u+1)\left[(x_0+u)(x_0+u-\beta)u+(x_0+u-\beta)\frac{x_1^2}{2}+(x_0+u)\frac{x_3^2}{2}\right]+$$

$$+(x_0+u)(x_0+u-\beta)\frac{x_2^2}{2} = (x_0+u)\left\{\frac{1}{2}(x_0+u)^3+c(x_0+u)^2-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\beta^2}{2}-\left(\frac{1}{2}-c\right)(\beta-1)\right](x_0+u)-\beta\left[\frac{1}{2}(\beta-1)+c\right]\right\}.$$

13. $$(\omega-1)\left[\omega(\omega-\beta)(\omega-x_0)+(\omega-\beta)\frac{x_1^2}{2}+\omega\frac{x_3^2}{2}\right]+\omega(\omega-\beta)\frac{x_2^2}{2} = \varphi(\omega),$$

$$\omega = x_0+u; \quad \omega^2(\omega-1)^2(\omega-\beta)^2\{\omega^2(\omega-1)^2(\omega-\beta)^2\varphi''-2\omega(\omega-1)\times$$

$$\times(\omega-\beta)[3\omega^2-2(\beta+1)\omega+\beta]\varphi'+2[\omega^2(\omega-\beta)^2+\omega^2(\omega-1)^2+$$

$$+(\omega-\beta)^2(\omega-1)^2+\omega^2(\omega-\beta)(\omega-1)+\omega(\omega-\beta)^2(\omega-1)+$$

$$+\omega(\omega-\beta)(\omega-1)^2]\varphi\}-\lambda\{2\omega(\omega-\beta)(\omega-1)\varphi'-2[3\omega^2-2(\beta+1)\omega+$$

$$+\beta]\varphi-\omega^2(\omega-\beta)^2(\omega-1)^2\}^3 = 0;$$

$$(x_0+u-1)\left[(x_0+u)(x_0+u-\beta)u+(x_0+u-\beta)\frac{x_1^2}{2}+(x_0+u)\frac{x_3^2}{2}\right]+$$

$$+ (x_0 + u)(x_0 + u - \beta)\,\frac{x_2^2}{2} = (x_0 + u)\left\{\frac{1}{2}(x_0 + u)^3 + c(x_0 + u)^2 - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\beta^2}{2} + \left(\frac{1}{2} + c\right)(\beta + 1)\right](x_0 + u) + \beta\left[\frac{1}{2}(\beta + 1) + c\right]\right\}.$$

14. $$\frac{\omega - \gamma}{\omega - \alpha}\left(x_1^2 + x_2^2 - \frac{\alpha x_1^2}{\omega}\right) + (\omega - \gamma)(\omega - 2x_0) = \varphi(\omega) - x_3^2, \quad \omega = x_0 + u;$$

$$\frac{1}{2}(\omega - \gamma)^2\varphi'' - (\omega - \gamma)\varphi' + \varphi + \lambda\,\frac{\omega(\omega - \alpha)}{(\omega - \gamma)^2}\,[\varphi - (\omega - \gamma)\varphi']^3 = 0, \quad \alpha > 0.$$

Анзаци (8)–(14) можна записати у вигляді

$$h(\omega, x) = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \tag{3}$$

де $h(\omega, x)$, $f(x)$, $g(x)$ — задані функції, $\varphi(\omega)$ — невідома функція, $\omega = \omega(x, u)$ — одномірні інваріанти підгруп групи $P(1, 4)$.

2. Тепер одержимо анзаци, які редукують рівняння (1) до двомірних диференціальних рівнянь з частинними похідними і, відповідні їм, редуковані рівняння.

1. $$u^2 = \varphi^2(\omega_1, \omega_2) + x_0^2 - x_3^2, \quad \omega_1 = x_1; \quad \omega_2 = x_2;$$

$$\det\varphi + \lambda\varphi^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 1)^3 = 0;$$

$$\det\varphi \equiv \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix}, \quad \varphi_{ij} \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_i\partial\omega_j}, \quad \varphi_i \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_i}, \quad i, j = 1, 2.$$

2. $$u^2 = \varphi^2(\omega_1, \omega_2) - x_3^2, \quad \omega_1 = x_0; \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2};$$

$$\varphi_2\det\varphi - \lambda\omega_2\varphi(\varphi_1^2 - \varphi_2^2 - 1)^3 = 0.$$

3. $$u^2 = -\varphi^2(\omega_1, \omega_2) + x_0^2, \quad \omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$$

$$\omega_2 = \frac{x_3}{\alpha} + \arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}};$$

$$\omega_1^3\varphi^2\varphi_1\det\varphi - \varphi^2\varphi_2^2\varphi_{22} + \lambda\omega_1^4\left[\varphi_1^2 + \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)\varphi_2^2 - 1\right]^3, \quad \alpha \neq 0.$$

Анзаци (1)–(3) можна записати у вигляді (2), де $\omega = \omega(x) = (\omega_1(x), \omega_2(x))$ — двомірні інваріанти підгруп групи $P(1, 4)$.

4. $$2x_0\omega_1 = -\varphi(\omega_1, \omega_2) + x_1^2 + x_2^2, \quad \omega_1 = x_0 + u; \quad \omega_2 = x_3;$$

$$\omega_1^2\det\varphi + 2\omega_1\varphi_2\varphi_{12} - 2(\varphi - \omega_1\varphi_1)\varphi_{22} - \varphi_2^2 +$$

$$+ \frac{\lambda}{16}[4(\varphi_1\omega_1 - \varphi + \omega_1^2) + \varphi_2^2]^3 = 0.$$

5. $$2x_0\omega_1 = -\varphi(\omega_1, \omega_2) + x_3^2, \quad \omega_1 = x_0 + u; \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2};$$

$$\omega_1^2\varphi_2\det\varphi + 2\omega_1\varphi_2^2\varphi_{12} + 2\varphi_2(\varphi - \omega_1\varphi_1)\varphi_{22} - \varphi_2^3 +$$

$$+ \frac{\lambda}{8}\omega_2[\varphi_2^2 - 4(\omega_1\varphi_1 - \varphi + \omega_1^2)]^3 = 0.$$

6. $$\frac{\alpha}{\mu}\operatorname{arch}\frac{x_0}{\omega_2} = \varphi(\omega_1,\omega_2) + \arcsin\frac{x_1}{\omega_1} - \frac{x_3}{\mu}, \quad \omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$$

$$\omega_2 = (x_0^2 - u^2)^{1/2}; \quad \mu^2\omega_1^3\omega_2^3\varphi_1\varphi_2\det\varphi + \frac{\alpha^2}{\mu^2}\omega_1^3\varphi_1\varphi_{11} - \mu^2\omega_2^3\varphi_2\varphi_{22} -$$

$$-\frac{\alpha^2}{\mu^2} + \lambda\omega_1^4\omega_2^4\left[\mu^2\left(\varphi_1^2 - \varphi_2^2 + \frac{1}{\omega_1^2}\right) + \frac{\alpha^2}{\omega_2^2} + 1\right]^3 = 0, \quad \alpha > 0, \quad \mu > 0.$$

7. $$\frac{1}{3\mu}\left(\frac{2\omega_2}{\mu} + x_3\right)[2(\omega_2 - \mu x_3)]^{1/2} = \varphi(\omega_1,\omega_2) + \arcsin\frac{x_2}{\omega_1} - x_0,$$

$$\omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \omega_2 = \mu x_3 + \frac{(x_0 + u)^2}{2};$$

$$\mu^4\omega_1^3\varphi_1\varphi_2\det\varphi - \omega_1^3\varphi_1\varphi_{11} - \mu^4\varphi_2\varphi_{22} + 1 +$$

$$+\lambda\mu^2\omega_1^4\left[\varphi_1^2 + \mu^2\varphi_2^2 + \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{2}{\mu^2}\omega_2 - 1\right]^3 = 0, \quad \mu \neq 0.$$

8. $$\frac{1}{3}(2\omega_2 + x_3)[2(\omega_2 - x_3)]^{1/2} = \varphi(\omega_1,\omega_2) - x_0,$$

$$\omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \omega_2 = x_3 + \frac{(x_0 + u)^2}{2};$$

$$\varphi_1\varphi_2\det\varphi - \varphi_1\varphi_{11} - \lambda\omega_1(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 2\omega_2 - 1)^3 = 0.$$

9. $$\omega_1(2x_0 - \omega_1) = \varphi(\omega_1,\omega_2) + x_1^2 + x_2^2,$$

$$\omega_1 = x_0 + u, \quad \omega_2 = x_1 + x_3(x_0 + u);$$

$$16\omega_1^2\left[\omega_1^2\det\varphi + 2\varphi_{22}\left(\varphi - \omega_1\varphi_1 - \frac{1}{4}\varphi_2^2 - \omega_2\varphi_2\right)\right] -$$

$$-\lambda[4(\omega_1\varphi_1 + \omega_2\varphi_2 - \varphi) + (\omega_1^2 + 1)\varphi_2^2]^3 = 0.$$

10. $$(\omega_1 - 2x_0)(\omega_1 - \gamma) - \frac{\gamma x_1^2}{\omega_1} = \varphi(\omega_1,\omega_2) - x_1^2 - x_2^2,$$

$$\omega_1 = x_0 + u, \quad \omega_2 = \frac{x_1}{x_0 + u} + \frac{\beta x_2}{x_0 + u - \gamma} + x_3;$$

$$\frac{16}{\omega_1}\Big\{(\omega_1 - 1)(\omega_1 - \gamma)^2\det\varphi + 2(\omega_1 - 1)(\omega_1 - \gamma)\varphi_{12}\varphi_2 +$$

$$+\left[2(\omega_1 - 1)\varphi - 2(\omega_1 - 1)(\omega_1 - \gamma)\varphi_1 + \frac{(\omega_1 - \gamma)^2}{2\omega_1^3}\varphi_2^2\right]\varphi_{22} - (\omega_1 - 1)\varphi_2^2\Big\} -$$

$$-\lambda\left[4\varphi - 4(\omega_1 - \gamma)\varphi_1 + \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{\beta^2}{(\omega_1 - \gamma)^2} + 1\right)\varphi_2^2\right]^3 = 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0.$$

11. $$(\omega_1 - 2x_0)(\omega_1 - \gamma) - \frac{\gamma x_1^2}{\omega_1} = \varphi(\omega_1,\omega_2) - x_1^2 - x_2^2,$$

$$\omega_1 = x_0 + u, \quad \omega_2 = x_1 + x_3(x_0 + u);$$

$$16(\omega_1-\gamma)\left\{\omega_1(\omega_1-\gamma)^2\det\varphi+2\gamma(\omega_1-1)\varphi_{12}\varphi_2+\right.$$

$$+2\left[\omega_1\varphi-\omega_1(\omega_1-\gamma)\varphi_1-(\omega_1-\gamma)^2\omega_2\varphi_2+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4}(\omega_1-\gamma)\varphi_2^2\right]\varphi_{22}-\frac{\omega_1-\gamma}{\omega_1}\gamma^2\varphi_2^2\right\}-$$

$$-\lambda\left\{4\left[\varphi-(\omega_1-\gamma)\varphi_1-\frac{\omega_1-\gamma}{\omega_1}\omega_2\varphi_2\right]+(\omega_1^2+1)\varphi_2^2\right\}^3=0,\quad \gamma>0.$$

12. $$(\omega_1-2x_0)(\omega_1-1)-\frac{x_1^2}{\omega_1}=\varphi(\omega_1,\omega_2)-x_1^2-x_2^2,$$

$$\omega_1=x_0+u,\quad \omega_2=\beta x_2+x_3(x_0+u-1);$$

$$16\frac{(\omega_1-1)^3}{\omega_1}\left\{(\omega_1-1)^2\det\varphi+2\left[\varphi-(\omega_1-1)\varphi_1-\omega_2\varphi_2+\frac{\beta^2}{4}\varphi_2^2\right]\varphi_{22}\right\}-$$

$$-\lambda\{4[\varphi-(\omega_1-1)\varphi_1-\omega_2\varphi_2]+[(\omega_1-1)^2+\beta]\,\varphi_2^2]^3=0,\quad \beta>0.$$

13. $(\omega_1-2x_0)(\omega_1-1)-\dfrac{x_1^2}{\omega_1}=\varphi(\omega_1,\omega_2)-x_1^2-x_2^2,\ \ \omega_1=x_0+u,\ \ \omega_2=x_3;$

$$16\frac{\omega_1-1}{\omega_1}\{(\omega_1-1)^2\det\varphi+2(\omega_1-1)\varphi_{12}\varphi_2+2[\varphi-(\omega_1-1)\varphi_1]\varphi_{22}-\varphi_2^2\}-$$

$$-\lambda[4\varphi+4(1-\omega_1)\varphi_1+\varphi_2^2]^3=0.$$

14. $$\omega_1\left(\omega_1-x_0-\frac{1}{2}\arcsin\frac{x_1}{\omega_2}\right)=\varphi(\omega_1,\omega_2)-\frac{x_3^2}{2},$$

$$\omega_1=x_0+u,\quad \omega_2=(x_1^2+x_2^2)^{1/2};$$

$$\frac{1}{\omega_2}\left[\omega_1^2\varphi_2\det\varphi-\frac{\omega_1^4}{4\omega_2^3}\varphi_{11}+2\omega_1\varphi_{12}\varphi_2^2+2\varphi_{22}\varphi_2(\varphi-\omega_1\varphi_1)+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega_1^3}{2\omega_2^3}\varphi_1-\varphi_2^3-\frac{\omega_1^2}{2\omega_2^3}\varphi\right]+\lambda\left[2\varphi-2\omega_1\varphi_1+\varphi_2^2+\omega_1^2\left(1+\frac{1}{4\omega_2^2}\right)\right]^3=0.$$

15. $$2\omega_1\left(\omega_1-x_0+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x_1}{\omega_2}\right)=\varphi(\omega_1,\omega_2)-x_3^2,$$

$$\omega_1=x_0+u,\quad \omega_2=(x_1^2+x_2^2)^{1/2};$$

$$\frac{8}{\omega_2}\left[\omega_1^2\varphi_2\det\varphi-\frac{\omega_1^4}{\omega_2^3}\varphi_{11}+2\omega_1\varphi_2^2\varphi_{12}+2\varphi_{22}\varphi_2(\varphi-\omega_1\varphi_1)+\right.$$

$$\left.+\frac{2\omega_1^3}{\omega_2^3}\varphi_1-\varphi_2^3-\frac{2\omega_1^2}{\omega_2^3}\varphi\right]+\lambda\left[4\varphi-4\omega_1\varphi_1+\varphi_2^2+\omega_1^2\left(4+\frac{1}{\omega_2^2}\right)\right]^3=0.$$

Анзаци (4)–(15) можна записати у вигляді (3), де $\omega = \omega(x, u) = (\omega_1(x, u), \omega_2(x, u))$ — інваріанти підгруп групи $P(1,4)$.

16. $$u = \exp\left(d \arcsin \frac{x_2}{\omega_1}\right) \exp(-d\varphi(\omega_1, \omega_2)) - x_0,$$

$$\omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \omega_2 = (x_3^2 + u^2 - x_0^2)^{1/2};$$

$$\frac{\varphi_2}{d\omega_2}\left(\frac{\varphi_1}{d} - \frac{1}{\omega_1}\right)\det\varphi - \frac{\varphi_2^2}{d\omega_2}\left[3\varphi_1\varphi_2 - d\omega_2\varphi_1\varphi_2^2 + \frac{1}{d\omega_2}\left(\varphi_1 - \frac{d}{\omega_1}\right)\right]\varphi_{11} -$$

$$-\frac{\varphi_2}{d^2\omega_2}\left(d\varphi_1^3 + \frac{2}{\omega_1^2}\varphi_1 + \frac{1}{\omega_1^3}\right)\varphi_{22} + \frac{4}{d\omega_2}\varphi_2^2\left(\varphi_1^2 + \frac{1}{\omega_1^2}\right)\varphi_{12} +$$

$$+\varphi_2^2\left(\frac{3}{d\omega_1^3\omega_2}\varphi_2 + \frac{\varphi_1^3}{\omega_2^2} + \frac{\varphi_2^2}{\omega_1^3} + \frac{2\varphi_1}{d\omega_1^2\omega_2^2} + \frac{1}{d^2\omega_1^3\omega_2^2}\right) -$$

$$-\lambda\omega_1\omega_2^2\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \frac{2\varphi_2}{d\omega_2} + \frac{1}{\omega_1^2}\right)^3 = 0, \quad d > 0.$$

1. *Погорелов А. В.* Многомерная проблема Минковского. – М.: Наука, 1975. – 96 с.
2. *Погорелов А. В.* Многомерное уравнение Монжа – Ампера. – М.: Наука, 1988. – 96 с.
3. *Kozlowski M.* The Monge–Ampere equation in affine differential geometry // Anz. Math. Naturwiss. kl. – 1990. – **126**. – P. 21–24.
4. *Козлов В. В.* Лиувиллевость инвариантных мер вполне интегрируемых систем и уравнение Монжа–Ампера // Мат. заметки. – 1993. – **53**, вып. 4. – С. 45–61.
5. *Nutku Y., Sarioglu O.* An integrable family of Monge–Ampere equations and their multi-Hamiltonian structure // Phys. Lett. A. – 1993. – **173**, № 3. – P. 270–274.
6. *Хабиров С. В.* Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы неоднородного уравнения Монжа–Ампера // Мат. сб. – 1990. – **181**, № 12. – С. 1607–1622.
7. *Хабиров С. В.* Применение контактных преобразований неоднородного уравнения Монжа–Ампера в одномерной газодинамике // Докл. АН СССР. – 1990. – **310**, № 2. – С. 333–336.
8. *Фущич В. И., Серов Н. И.* Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера // Там же. – 1983. – **273**, № 3. – С. 543–546.
9. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.
10. *Fushchich W. I., Shtelen W. M., Serov N. I.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 435 p.
11. *Федорчук В. М.* Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера $P(1,4)$. – Киев, 1978. – 36 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 78.18).
12. *Федорчук В. М.* Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 6. – С. 717–722.
13. *Федорчук В. М.* Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Там же. – 1981. – **33**, № 5. – С. 696–700.
14. *Федорчук В. М., Фущич В. И.* О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре // Теоретико-групповые методы в физике: Тр. междунар. семинара. Звенигород, 1979. – М.: Наука, 1980. – Т. 1. – С. 61–66.
15. *Fushchich W. I., Barannik A. F., Barannik L. F., Fedorchuk V. M.* Continious subgroups of the Poincare group $P(1,4)$ // J. Phys. A: Math. Gen. – 1985. – **18**, № 14. – P. 2893–2899.
16. *Фущич В. И., Федорчук В. М., Федорчук И. М.* Подгрупповая структура обобщенной группы Пуанкаре и точные решения некоторых нелинейных волновых уравнений. – Киев, 1986. – 36 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.27).
17. *Федорчук В. М., Федорчук И. М.* Редукция и точные решения пятимерных нелинейных волновых уравнений. – Киев, 1988. – 27 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.21).

Одержано 01.06.94