УДК 517.5

**С. А. Пичугов** (Днепропетр. ун-т)

# СУЩЕСТВОВАНИЕ ИЗМЕРИМОЙ ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В $L_0$*

In the space of convergence in measure, we study the Bernshtein problem of the existence of a function with given values of the best approximations by a system of finite-dimensional subspaces strictly imbedded in each other.

У просторі збіжності за мірою досліджується задача С. Н. Бернштейна про існування функції з заданими значеннями найкращих наближень системою строго вкладених один в один скінченновимірних підпросторів.

Пусть $G$ — пространство с $\sigma$-аддитивной мерой $\mu$, определенной на $\sigma$-алгебре подмножеств $G$, $\mu G = 1$; $L_0 \equiv L_0(G)$ — совокупность всех $\mu$-измеримых, $\mu$-почти всюду конечных функций на $G$.

Пусть, далее, $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — невырожденная функция типа модуля непрерывности [1, с. 254], т. е. непрерывная, не убывающая, полуаддитивная, в нуле равная нулю, и $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$. Тогда множество

$$L_\varphi \equiv L_\varphi(G),$$

$$L_\varphi = \left\{ f \in L_0 : \| f \|_\varphi = \int_G \varphi(|f(x)|)\, d\mu(x) < \infty \right\} \tag{1}$$

является линейным метрическим пространством относительно метрики $\rho(f, g) = \| f - g \|_\varphi$. Далее, пространство $L_\varphi$ является полным — это следует из результатов [2, 3], полученных для пространств типа (1) при более общих предположениях на функцию $\varphi$.

В случае $\varphi(t) = t^p$, $p \in (0, 1]$, получаем известные метрические пространства $L_p$, при $\varphi(t) = t(1+t)^{-1}$ — пространство $L_0$ с топологией сходимости по мере.

Для произвольной функции $f$ из $L_\varphi$ и расширяющейся системы подпространств $\{ \mathcal{L}_m;\ m = 1, 2, \ldots \}$ из $L_\varphi$ рассмотрим последовательность значений наилучших приближений

$$E_m(f) \equiv E_m(f; \mathcal{L}_m)_\varphi = \inf \{ \| f - T_m \|;\ T_m \in \mathcal{L}_m \}.$$

С какой скоростью числовая последовательность $\{ E_m(f);\ m = 1, 2, \ldots \}$ может стремиться к нулю?

Заметим, что если $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) := d(\varphi) = \infty$, то возможные значения наилучших приближений находятся на $\mathbb{R}^+$, а если

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) := d(\varphi) < \infty,$$

то из условия $\mu G = 1$ следует, что $E_m(f) \in [0, d(\varphi))$.

**Теорема.** *Пусть* $\{ \mathcal{L}_m;\ m = 1, 2, \ldots \}$ — *последовательность конечномерных подпространств из* $L_\varphi$, *строго вложенных друг в друга,* $\mathcal{L}_m \subset \mathcal{L}_{m+1}$, $\{ \varepsilon_m;\ m = 1, 2, \ldots \}$ — *монотонно стремящаяся к нулю последовательность неотрицательных чисел,* $\varepsilon_1 < d(\varphi)$. *Тогда существует функция* $f \in L_\varphi$ *такая,*

* Выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда (грант №U92000).

*что для всех* $m \geq m_0$, $m_0 = \min\{m: \varepsilon_m + \varepsilon_1 < d(\varphi)\}$, *выполняется равенство*

$$E_m(f) = \varepsilon_m.$$

С. Н. Бернштейн [4] доказал эту теорему для полиномиальных приближений в $C[0, 1]$ и для произвольного $\varepsilon_m \downarrow 0$, но фактически [5, с. 297] им был доказан этот результат для произвольного банахова пространства. При этом от условия конечномерности $\mathcal{L}_m$ отказаться, вообще говоря, нельзя [6]. В дальнейшем А. С. Шведов [3] получил аналог этой теоремы Бернштейна для широкого класса пространств, включая пространства Орлича $L^\Psi$ функций $f$ на $G$ с функционалом

$$\|f\|_\psi = \int\limits_G \psi(|f(x)|)\, d\mu(x),$$

и, в частности, для пространств $L_p$, $0 < p < 1$. При этом в [3] сформулированы достаточные условия (см. условия (1. 1) – (1. 8) [3, с. 3]) на функционал $\|\cdot\|_\psi$, гарантирующие равенства $E_m(f)_\psi = \varepsilon_m$ для всех $m$. В случае, когда $\psi$ есть функция типа модуля непрерывности, легко проверить, что все эти условия выполняются, кроме, быть может, одного (условие (1.5) в [3]):

$$\text{для любого} \quad f \in L^\Psi, \quad f \not\equiv 0, \quad \|tf\|_\psi \to \infty, \quad t \to \infty. \tag{2}$$

В частности, в важном для нас случае пространства $L_0$ $d(\varphi) = 1$ и для любой ненулевой функции $f$ при $t \to \infty$

$$\|tf\|_\varphi \to d(\varphi) \ (< \infty). \tag{3}$$

Однако в рассуждения А. С. Шведова удается внести коррективы, связанные с заменой условия (2) на (3). Ввиду того, что соответствующие изменения по ходу доказательства приходится делать неоднократно, мы вынуждены повторить все основные этапы доказательства в [3].

В дальнейшем $\|f\|$ означает $\|f\|_\varphi$; для $\alpha \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \max(|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|).$$

Так как в случае $d(\varphi) = \infty$ утверждение теоремы содержится в [3], будем предполагать, что

$$d(\varphi) < \infty.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\dim \mathcal{L}_m = n$.

Предварительно сформулируем несколько вспомогательных предложений:

1. Пусть $z_1, \ldots, z_n \in L_\varphi$ линейно независимы,

$$\Omega = \left\{ z = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i;\ \|z\| \leq d \right\}, \quad d \in (0, d(\varphi)).$$

Тогда найдется $C > 0$ такая, что для всех $z \in \Omega$

$$|\alpha| \leq C.$$

2. Пусть $f_1, f_2 \in L_\varphi$, $\mathcal{L}$ — конечномерное подпространство $L_\varphi$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда величина

$$e(t) := \inf\{\|f_1 + tf_2 - T\|;\ T \in \mathcal{L}\}$$

непрерывна на $\mathbb{R}$ как функция от $t$.

3. Пусть $\mathcal{L}_m$ порождено линейно независимыми элементами $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$, $f \in L_\varphi$ и числа $b$, $b \in [E_{n+1}(f), d(\varphi))$, существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что

$$E_n(f + cz_{n+1}) = b. \tag{4}$$

4. Для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ существует элемент

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} z_k$$

такой, что

$$\| T_n \| = \varepsilon_1; \quad E_k(T_n) = \varepsilon_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Перейдем к доказательству предложений $1-4$.

1. Допустим противное: найдутся $d \in (0, d(\varphi))$ и некоторая последовательность $\left\{\alpha^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что

$$\Phi(\alpha^{(k)}) := \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} z_i \right\| \leq d; \quad |\alpha^{(k)}| \to \infty, \quad k \to \infty.$$

Из ограниченной последовательности векторов $\beta^{(k)} = \alpha^{(k)} / |\alpha^{(k)}|$ извлечем сходящуюся подпоследовательность: $\beta^{(k_j)} \to \beta^{(0)}$ при $j \to \infty$. Так как $\{z_i;\ i = 1, \ldots, n\}$ линейно независимы, то для $\delta \in (0, d(\varphi) - d)$ найдется $u \in \mathbb{R}^1$ такое, что

$$\Phi(u\beta^{(0)}) > d + \delta. \tag{6}$$

С другой стороны, из непрерывности $\Phi$ следует

$$\Phi(u\beta^{(0)}) = \lim_{j \to \infty} \Phi(u\beta^{(k_j)}),$$

а так как при больших $j$ $|u| < |\alpha^{(k_j)}|$, то

$$\Phi(u\beta^{(k_j)}) \leq \Phi(|\alpha^{(k_j)}|\beta^{(k_j)}) = \Phi(\alpha^{(k_j)}) \leq d,$$

что противоречит (6).

2. При доказательстве используется существование элемента наилучшего приближения в $L_\varphi$ при аппроксимации конечномерным подпространством [7].

Достаточно установить непрерывность $e(t)$ при $t = 0$. Так как функция $e(t)$ неотрицательна и полунепрерывна сверху [3], то она в некоторой окрестности нуля ограничена некоторым числом $d$, $d < d(\varphi)$. Тогда если $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(t)} z_i$ — элемент наилучшего приближения $f_1 + tf_2$, то согласно предложению 1 найдутся $\beta > 0$ и $c > 0$ такие, что для всех $t$, $|t| < \beta$, и $i = 1, \ldots, n$

$$\left|\alpha_i^{(t)}\right| \leq c.$$

Если $e(t)$ разрывна в нуле, то для некоторых $\varepsilon > 0$ и $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $t_k \to 0$ при $k \to \infty$,

$$e(0) - e(t_k) \geq \varepsilon. \tag{7}$$

Из ограниченной последовательности $\left\{\alpha^{(t_k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ выберем сходящуюся последовательность $\left\{\alpha^{(t_s)}\right\}_{s=1}^{\infty}$, $\alpha^{(t_s)} \to \beta$ при $s \to \infty$. Ввиду непрерывности $\|\cdot\|$ при $s \to \infty$

$$e(t_s) = \left\| f_1 + t_s f_2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(t_s)} z_i \right\| \to \left\| f_1 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i \right\|,$$

и из (7) получаем

$$\left\| f_1 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i \right\| \leq e(0) - \varepsilon,$$

что противоречит определению $e(0)$.

3. Допустим, что $b = E_{n+1}(f)$ и

$$E_{n+1}(f) = \left\| f - \sum_{k=1}^{n+1} c_k^{(n+1)} z_k \right\|.$$

Тогда

$$E_n\left(f - c_{n+1}^{(n+1)} z_{n+1}\right) \leq E_{n+1}(f) =$$

$$= E_{n+1}\left(f - c_{n+1}^{(n+1)} z_{n+1}\right) \leq E_n\left(f - c_{n+1}^{(n+1)} z_{n+1}\right),$$

т. е. $E_n\left(f - c_{n+1}^{(n+1)} z_{n+1}\right) = b$.

Пусть $b > E_{n+1}(f)$. Используем тот факт, что

$$\sup\left\{E_n(f + \xi z_{n+1});\ \xi \in \mathbb{R}\right\} = d(\varphi). \tag{8}$$

Тогда можно выбрать $\xi_0 \in \mathbb{R}$ так, чтобы

$$E_n\left(f - c_{n+1}^{(n+1)} z_{n+1}\right) < b < E_n(f + \xi_0 z_{n+1}). \tag{9}$$

Из предложения 2 следует непрерывность $E_n(f + \xi z_{n+1})$ как функции от $\xi$. Поэтому из (9) следует (4).

Осталось доказать (8). Пусть

$$E_n(f + \xi z_{n+1}) = \left\| f + \xi z_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k^{(\xi)} z_k \right\|.$$

Если допустить, что (8) неверно, то найдется $d \in (0, d(\varphi))$ такое, что для всех $\xi \in \mathbb{R}$

$$\left\| f + \xi z_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k^{(\xi)} u_k \right\| \leq d. \tag{10}$$

Но тогда из предложения 1 следует, что все коэффициенты ограничены. Однако коэффициент при $z_{n+1}$ в (10) неограничен. Предложение 3 доказано.

4. Доказательство этого факта см. в [3]; оно использует предложение 3 и существование элемента наилучшего приближения в $L_\varphi$ при аппроксимации конечномерным подпространством.

**Лемма.** *Пусть* $\{\mathcal{L}_m;\ m = 1, 2, \ldots\}$ *— последовательность конечномерных подпространств из* $L_\varphi$, *строго вложенных друг в друга,* $\mathcal{L}_m \subset \mathcal{L}_{m+1}$, $\{\varepsilon_m;$

$m = 0, 1, \ldots \}$ — *монотонно стремящаяся к нулю последовательность неотрицательных чисел,* $\varepsilon_0 < d(\varphi)$,

$$K = \{ f \in L_\varphi;\ \|f\| \le \varepsilon_0,\ E_m(f) \le \varepsilon_m,\ m \in \mathbb{N} \}.$$

*Тогда для любой последовательности* $\{ f_n;\ n = 1, 2, \ldots \}$, $f_n \in K$, *существуют подпоследовательность* $\{ f_{n_j};\ j = 1, 2, \ldots \}$ *и функция* $f \in L_\varphi$ *такие, что* $\| f_{n_j} - f \| \to 0$ *при* $j \to \infty$. *При этом* $\|f\| \le \varepsilon_0$ *и*

$$E_m(f) \le \varepsilon_m \quad \forall m \ge m_0, \quad m_0 = \min\{ m:\ \varepsilon_m + \varepsilon_0 < d(\varphi) \}.$$

***Доказательство.*** Можно считать, что $\mathcal{L}_n$ — линейная оболочка линейно независимых элементов $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Пусть

$$T_{m,n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{n,i}^{(m)} z_i$$

— элемент наилучшего приближения $f_n$ подпространством $\mathcal{L}_m$. Тогда для всех $n$

$$\| T_{m,n} - f_n \| \le \varepsilon_m, \tag{11}$$

и для $m \ge m_0$

$$\| T_{m,n} \| \le \| T_{m,n} - f_n \| + \| f_n \| \le \varepsilon_m + \varepsilon_0 < d(\varphi).$$

При фиксированном $m \ge m_0$ в силу предложения 1 коэффициенты $\left\{ \alpha_n^m \right\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничены в $\mathbb{R}^m$, поэтому найдется подпоследовательность $\left\{ \alpha_{n_j^{(m)}}^{(m)} \right\}_{j=1}^{\infty}$, сходящаяся к $\alpha^{(m)}$ при $j \to \infty$. При этом можно добиться, чтобы $\left\{ n_j^{(m+1)} \right\}_{j=1}^{\infty}$ содержалась в $\left\{ n_j^{(m)} \right\}_{j=1}^{\infty}$ $\forall m \ge m_0$. Положим

$$T_m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(m)} z_i,$$

тогда $\| T_{m, n_j^{(m)}} - T_m \| \to 0$ при $j \to \infty$. С помощью диагонального процесса Кантора найдем $\left\{ n_j \right\}_{j=1}^{\infty}$ такую, что

$$\| T_{m, n_j} - T_m \| \to 0 \quad \forall m \ge m_0, \quad j \to \infty. \tag{12}$$

Так как

$$f_{n_j} - f_{n_s} = ( f_{n_j} - T_{m, n_j} ) + ( T_{m, n_j} - T_m ) + ( T_m - T_{m, n_s} ) + ( T_{m, n_s} - T_{n_s} ),$$

то, выбирая последовательно достаточно большими $m$, $j$, $s$, из (11) и (12) выводим, что последовательность $\{ f_{n_j} \}$ фундаментальна, и вследствие полноты $L_\varphi$ существуют $\{ n_j \}$ и $f \in L_\varphi$ такие, что

$$\| f_{n_j} - f \| \to 0, \quad j \to \infty. \tag{13}$$

Так как $\| f_{n_j} \| \to \| f \|$, то $\| f \| \le \varepsilon_0$. Из (11) – (13) для $m \ge m_0$ следует

$$\varepsilon_m \geq \| f_{n_j} - T_{m, n_j} \| =$$

$$= \| (f - T_m) + (T_m - T_{m, n_j}) + (f_{n_j} - f) \| \to \| f - T_m \|, \quad j \to \infty.$$

Лемма доказана.

***Доказательство теоремы.*** К последовательности элементов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, построенной в предложении 4, применим утверждение леммы. Тогда найдутся подпоследовательность $\left\{T_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ и функция $f \in L_\varphi$ такие, что

$$\| T_{n_j} - f \| \to 0, \quad j \to \infty,$$

и для любого $m \geq m_0$

$$E_m(f) \leq \varepsilon_m. \tag{14}$$

С другой стороны, для любого $z$ из $\mathcal{L}_m$, $m \geq m_0$, при $j > m$

$$\varepsilon_m = E_m(T_{n_j}) \leq \| T_{n_j} - z \| = \| (T_{n_j} - f) + (f - z) \| \to \| (f - z) \|, \quad j \to \infty,$$

а значит,

$$\varepsilon_m \leq E_m(f). \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что для любого $m \geq m_0$

$$E_m(f) \leq \varepsilon_m.$$

Теорема доказана.


1. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
2. *Ульянов П. Л.* Замечания о сходимости в среднем // Мат. заметки. – 1977. – **21**, № 6. – С. 807–816.
3. *Шведов А. С.* Существование элемента с заданными величинами наилучших приближений. – М., 1982. – 20 с. – (Препринт / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 55).
4. *Бернштейн С. Н.* Об обратной задаче теории наилучшего приближения непрерывных функций // Собр. соч. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – Т. 2. – С. 292–294.
5. *Никольский С. М.* Приближение многочленами функций действительного переменного // Математика в СССР за тридцать лет. – М., Л.: Гостехиздат, 1948. – С. 288–318.
6. *Никольский В. Н.* О некоторых свойствах рефлексивных пространств // Учен. зап. Калинин. пед. ин-та. – 1963. – Вып. 29. – С.121–125.
7. *Рахметов Н. К.* О единственности элемента наилучшего приближения в некоторых функциональных пространствах // Докл. АН СССР. – 1991. – **316**, № 3. – С. 553–557.


Получено 25.05.95