УДК 517.988.5

Я. М. Дымарский (Луган. пед. ин-т)

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ВЕТВИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

For nonlinear equations of special type, the existence of unbounded branches of solutions originated at a bifurcation point is proved in the case of double degeneration of a linearized problem.

Для нелінійних рівнянь спеціального вигляду у випадку двократного виродження лінеаризованої задачі доведено існування необмежених гілок розв'язків, що виходять із точки біфуркації..

1. Введение. После опубликования работ М. А. Красносельского [1] и Рабиновица [2] о ветвях собственных функций нелинейных задач остается не полностью исследованной следующая проблема: является ли ветвь, выходящая из точки бифуркации, неограниченной. Положительный ответ на этот вопрос получен для знакопостоянных собственных функций монотонных операторов и для собственных функций вариационных операторов [1]. Известно также, что в случае, когда все собственные значения линеаризованной задачи простые и осцилляционные свойства собственных функций устойчивы и различны для разных точек бифуркации, любая ветвь, выходящая из точки бифуркации, является неограниченной (первый результат в этом направлении получил Л. А. Люстерник [3], см. также [4–8]). В [8] намечен подход, позволяющий формулировать достаточные признаки существования неограниченных ветвей в случае, когда линеаризованная задача имеет только простые собственные значения, но осцилляционные свойства собственных функций уже не являются инвариантами непрерывных ветвей.

В настоящей работе используется устойчивость осцилляционных свойств собственных функций, однако линеаризованная задача имеет двукратные собственные значения. Следует отметить, что нелинейности в исследуемых задачах весьма специфичны: они содержат в качестве линейных сомножителей собственные функции линеаризованной задачи; причем именно те собственные функции, которые соответствуют исследуемой точке бифуркации. Мы считаем, тем не менее, что предлагаемые результаты интересны по следующим причинам: 1) описан, по-видимому, новый класс нелинейностей, для которого обнаружены ветви собственных функций, выходящие из точки бифуркации и уходящие в бесконечность; 2) теорему 4 можно трактовать как утверждение о существовании периодических вынужденных колебаний любой амплитуды в системе автоматического регулирования [9]. Результаты статьи анонсированы в [10].

2. Основные теоремы. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение с периодическими краевыми условиями

$$\begin{gathered} u'' + A(u, u', x)(\delta\cos 2nx + \beta\sin 2nx)u^2 + \lambda u = 0, \\ u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi), \end{gathered} \tag{1}$$

где A — функция класса $C^0(\mathbb{R}^2 \times [0, \pi])$, π-периодическая по x; $\delta, \beta \in \mathbb{R}$, $\delta^2 + \beta^2 > 0$, $n \in \mathbb{N}$; $\lambda \in \mathbb{R}$ не известно, $u(x) \in C^2[0, \pi]$. Пара $(\lambda, 0) \in \mathbb{R} \times \times C^2$ удовлетворяет уравнению (1) при всех λ. Назовем ее тривиальным решением. Пару (λ, u), удовлетворяющую (1), назовем решением этого уравнения, если $u \neq 0$. При этом λ называется собственным значением, а u — собственной функцией.

***Определение* 1** [1]. *Число λ_0 называется точкой бифуркации для уравнения* (1), *если для каждого $\varepsilon > 0$ уравнение* (1) *имеет решение (λ, u), удовлетворяющее неравенству $|\lambda - \lambda_0| + |u|_{C^2} < \varepsilon$.*

Известно [1], что точки бифуркации для уравнения (1) находятся только среди собственных значений линеаризованной задачи: $u'' + \lambda u = 0$, $u(0) = u(\pi)$, $u'(0) = u'(\pi)$. Ее собственные значения $\lambda_m = (2m)^2$, $m = 0, 1, \ldots$, двукратные при всех $m \in \mathbb{N}$. Каждому λ_m соответствует пара собственных функций $u_{m,1} = \sqrt{2/\pi}\sin 2mx$ и $u_{m,2} = \sqrt{2/\pi}\cos 2mx$, ортонормированных в $L^2[0,\pi]$ [11].

Введем следующие обозначения: P — множество всех решений (λ, u) задачи (1) $(P \subset \mathbb{R} \times C^2[0,\pi])$; $U(\lambda_m, 0)$ — малая окрестность точки $(\lambda_m, 0)$ в $\mathbb{R} \times C^2[0,\pi]$; $P_m = P \cap U(\lambda_m, 0)$.

***Определение* 2.** *Связную компоненту P, замыкание которой в $\mathbb{R} \times C^2[0, \pi]$ содержит точку $(\lambda_m, 0)$, назовем ветвью решений, выходящей из (входящую в) точки $(\lambda_m, 0)$.*

***Определение* 3.** *Связную компоненту P_m, замыкание которой в $\mathbb{R} \times C^2[0,\pi]$ содержит точку $(\lambda_m, 0)$, назовем ветвью малых решений, выходящей из точки $(\lambda_m, 0)$.*

Обозначим для краткости $u_{n,1} = u_1$, $u_{n,2} = u_2$. Введем функции

$$a_{ij}(\varphi) = \int_0^\pi A(0,0,x)(\delta\cos 2nx + \beta\sin 2nx)(u_1\cos\varphi + u_2\sin\varphi)u_i u_j\,dx, \quad i,j = 1,2,$$

$$b(\varphi) = a_{1,2}, \quad d(\varphi) = \frac{1}{2}(a_{1,1} - a_{2,2}), \quad e(\varphi) = \frac{1}{2}(a_{1,1} + a_{2,2}),$$

где $\varphi \in [0, 2\pi)$; φ — параметризация единичной окружности S_1. Если справедливо неравенство

$$d^2(\varphi) + b^2(\varphi) > 0, \quad \varphi \in S^1, \tag{2}$$

то формулы $\cos\alpha = d(d^2+b^2)^{-1/2}$, $\sin\alpha = b(d^2+b^2)^{-1/2}$ определяют гладкое отображение $\alpha = \alpha(\varphi)$ окружности S_1 в окружность S_2, параметризованную углом α. Каждая функция $A(0,0,x)$, для которой выполнено условие (2), индуцирует отображение $\alpha = \alpha(\varphi)$. Определена степень $\deg(\alpha)$ этого отображения [12]. Важную роль в наших рассуждениях играют отображения

$$f_1, f_2\colon\ S_1 \to S_2;\quad f_1(\varphi) = 2\varphi + \pi, \quad f_2(\varphi) = 2\varphi. \tag{3}$$

Предположим, что графики отображений (3) и отображения $\alpha(\varphi)$ трансверсальны. Тогда определено число p_i, $i = 1, 2$ пересечений графика отображения $\alpha(\varphi)$ с графиком отображения f_i. Обозначим через $M(\deg(\alpha), p_1, p_2)$ класс всех функций $A(0,0,x) \in C^0[0,\pi]$, имеющих указанные характеристики. Сформулируем теорему, описывающую типичные варианты возможных сочетаний чисел $\deg(\alpha), p_1, p_2$.

Теорема 1. *Справедливо представление*

$$C^0([0,\pi)] = M(1,1,1) \cup M(1,3,3) \cup M(-1,3,3) \cup N, \tag{4}$$

где N — замкнутое нигде не плотное множество, остальные множества в правой части (4) *не пустые, открытые и связные.*

Множество N содержит те функции A, для которых либо не выполнено условие (2), либо графики отображений $\alpha(\varphi)$ и (3) не трансверсальны, и не содержит функции, для которых характеристики $\deg(\alpha), p_1, p_2$ определены.

Следующая теорема описывает структуру множества решений в окрестности типичной точки бифуркации.

Теорема 2. *Пусть функция A непрерывно дифференцируема по паре (u, u') в окрестности $(0, 0)$. Пусть $A(0, 0, x) \in M(\pm 1, p, p)$. Тогда λ_n является точкой бифуркации и из точки $(\lambda_n, 0)$ выходит p, $p = 1, 3$, пар ветвей малых решений, имеющих асимптотику*

$$\left(\lambda_j^{\pm}, u_j^{\pm}\right) = \left(\lambda_n \pm \gamma_j r + o(r),\ \pm r(u_1 \cos\varphi_j + u_2 \sin\varphi_j) + o(r)\right),$$

$j = 1, \ldots, p$, $0 < r < r_0$, где φ_j — решения уравнения $\alpha(\varphi) = f_2(\varphi)$, γ_j определяется по формуле

$$\gamma_j = e(\varphi_j) + \sqrt{d^2(\varphi_j) + b^2(\varphi_j)}.$$

В [13] сформулированы теоремы, обобщающие теоремы 1 и 2.

Структуру неограниченных ветвей, выходящих из точки бифуркации, описывает следующая (основная в статье) теорема.

Теорема 3. *Пусть $A \not\equiv 0$ и $A \geq 0$ на всей области определения. Тогда:* 1) *λ_n является точкой бифуркации задачи* (1); 2) *существуют по крайней мере две неограниченные в $\mathbb{R} \times C^1[0, \pi)$ ветви решений (λ, u), выходящие из точки $(\lambda_n, 0)$;* 3) *для одной из неограниченных ветвей $\lambda > \lambda_n$, для другой $\lambda < \lambda_n$;* 4) *собственные функции $u(x)$, принадлежащие указанным ветвям, имеют на $[0, \pi)$ точно $2n$ устойчивых нулей.*

При дополнительных ограничениях на A мы можем уточнить расположение неограниченных ветвей.

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 3 и на всей области определения*

$$|A| < B(u)(|u'|^{2-\varepsilon} + 1), \tag{5}$$

где $B(u) > 0$ — непрерывная функция, $\varepsilon = \mathrm{const}\, t > 0$. Тогда все неограниченные ветви содержат собственные функции $u(x)$ сколь угодно большой нормы в $C^0[0, \pi]$.

3. Доказательства основных теорем. Доказательство теоремы 1 следует из цепочки лемм и следствий из них.

Лемма 1. *Для любого φ справедливо $\alpha(\varphi + \pi) = \alpha(\varphi) + \pi$.*

Следствие 1. *Справедливо равенство $p_1 = p_2$.*

Лемма 2. *Для любого φ функция $\alpha'(\varphi)$ знакопостоянна.*

Следствие 2. *Справедливо равенство $\deg(\alpha) = \operatorname{sign}(\alpha'(\varphi))$.*

Лемма 3. *Характеристики $\deg(\alpha), p_1, p_2$ инвариантны относительно гомотопии $E(\varphi, t) = \alpha(\varphi - t) + 2t$, где $t \in [0, 2\pi)$.*

Следствие 3. *Если $\alpha' < 0$, то $p_1 = p_2 = 3$. Если $\alpha' > 0$, то $p_1 = p_2 = 3$ тогда и только тогда, когда уравнения $\alpha(\varphi) = f_i(\varphi)$ имеют решение φ_0, для которого $\alpha'(\varphi_0) > 2$. В противном случае $p_1 = p_2 = 1$.*

Доказательства лемм очевидны на развертке тора $S_1 \times S_2$.

Дальнейшее исследование (1) в окрестности $(\lambda_n, 0)$ осуществим с помощью уравнения разветвления Ляпунова [1]. Любая функция $u \in C^2[0, \pi]$ единственным образом представляется в виде

$$u = r(u_1 \cos\varphi + u_2 \sin\varphi) + v,$$

где

$$r \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \int_0^{\pi} v u_i \, dx = 0.$$

Лемма 4. *Пусть функция* A *непрерывно дифференцируема по паре* (u, u') *в окрестности* $(0, 0)$. *Тогда в окрестности точки* $(\lambda_n, 0)$ *уравнение* (1) *имеет уравнение разветвления вида*

$$\begin{pmatrix} e(\varphi)+d(\varphi) & b(\varphi) \\ b(\varphi) & e(\varphi)-d(\varphi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1(\gamma, r, \varphi) \\ q_2(\gamma, r, \varphi) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $0 \le r < r_0$, $\gamma = -(\lambda-\lambda_0)/r$, *функции* q_i *гладкие по паре* (γ, φ), *непрерывные по совокупности переменных и* $q_i(\gamma, 0, \varphi) \equiv 0$.

Лемма 5. *Пусть* $(\gamma(r), \varphi(r)), 0 \le r < r_0$, — *ветвь решений уравнения* (6). *Тогда уравнение* (1) *имеет ветвь малых решений*

$$(\lambda, u) = (\lambda_n - \gamma(0)r + o(r),\ r(u_1\cos\varphi(0) + u_2\sin\varphi(0)) + v(r)),$$

где $v(r) = o(r)$.

Доказательство лемм 4 и 5 осуществляется стандартно [1].

Доказательство *теоремы* 2. Количество ветвей, выходящих из точки $(\lambda_n, 0)$, равно количеству ветвей решений $(\gamma(r), \varphi(r))$, $0 \le r < r_0$, уравнения разветвления (6). Положим в (6) $r = 0$. Полученная система равносильна следующей совокупности систем:

$$\begin{cases} \alpha(\varphi) = f_i(\varphi), \\ \gamma = e(\varphi) + (-1)^i\sqrt{d(\varphi^2) + b(\varphi^2)}, \end{cases} \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

Поэтому количество решений (6) при $r = 0$ равно числу точек пересечения графиков функций $\alpha(\varphi)$ и $f_i(\varphi)$. Из теоремы 1 следует, что это число равно $2p$, $p = 1, 3$. В силу леммы 1 и свойства нечетности $e(\varphi+\pi) = -e(\varphi)$ достаточно решить одну из систем (7), для того чтобы выписать все решения (7). Условие трансверсальности графиков функций $\alpha(\varphi)$ и $f_i(\varphi)$ позволяет применить к уравнению (6) в точке $r = 0$ теорему существования неявной функции $(\gamma(r), \varphi(r))$ в окрестности каждого решения (γ_j, φ_j), $j = 1, \ldots, 2p$, системы (7). Для завершения доказательства остается использовать лемму 5.

Доказательство *теоремы* 3. Из теоремы Рабиновица [2] следует, что ветвь, выходящая из точки $(\lambda_n, 0)$ и не являющаяся неограниченной, с необходимостью входит в точку $(\lambda_m, 0)$; причем в случае четнократной вырожденности линеаризованной задачи не исключено, что $m = n$. Воспользуемся этим утверждением.

Из теорем 1, 2 следует, что малым возмущением A в окрестности компакта $\{0\}\times\{0\}\times[0, \pi]$ можно добиться того, чтобы из точки $(\lambda_n, 0)$ выходила одна или три пары ветвей малых решений (λ, u) задачи (1), причем для одной половины количества ветвей малых решений выполнялось неравенство $\lambda < \lambda_n$, а для другой — $\lambda > \lambda_n$. Любая из указанных ветвей не может войти ни в одну из точек $(\lambda_m, 0)$, где $m \ne n$. В самом деле, в этом случае изменится количество нулей собственной функции $[0, \pi)$; это может произойти, если существует собственная функция $u(x) \not\equiv 0$, имеющая неустойчивый нуль: $u(x_0) = u'(x_0) = 0$; последнее означает, что $u(x) \equiv 0$ [3].

Рассмотрим случай, когда ветвь выходит из точки $(\lambda_n, 0)$ и входит в нее же, т. е. две из рассматриваемых ветвей малых решений сливаются в одну ветвь решений. Если для одной из ветвей малых решений выполнено условие $\lambda < \lambda_n$, а для другой — $\lambda > \lambda_n$, то существует решение $(\lambda_n, \hat{u})$ ([14], следствие). Но тогда функция $\hat{u}$ является решением линейной неоднородной краевой задачи

$$u'' + \lambda_n u = -A(\hat{u}, (\hat{u})', x)(\delta u_1 + \beta u_2)(\hat{u})^2, \quad u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi).$$

Но это возможно только при выполнении условия ортогональности

$$\int_0^\pi A(\hat{u}, (\hat{u})', x)(\delta u_1 + \beta u_2)^2 (\hat{u})^2 \, dx = 0,$$

которое противоречит неотрицательности функции A.

Остается последняя возможность: сливаются ветви, для которых одновременно выполнено или условие $\lambda < \lambda_n$, или условие $\lambda > \lambda_n$. Таких ветвей нечетное количество. Покажем, что отсюда следует неограниченность по крайней мере одной из них. Допустим противное. Тогда существует такое открытое ограниченное множество $\Omega^- \subset \mathbb{R} \times C^2[0, \pi]$ (Ω^+), которое:

1) содержит все ветви, выходящие из $(\lambda_n, 0)$ и расположенные слева (справа) от λ_n;

2) расположено левее (правее) λ_n;

3) не содержит ни одной точки вида $(\lambda_m, 0)$, $m = 0, 1, \ldots, n, \ldots$;

4) на границе $\partial\Omega^-$ $(\partial\Omega^+)$ нет решений задачи (1).

Заметим, что $\partial\Omega^{\mp} \ni (\lambda_n, 0)$. Воспользуемся конструкцией Изе [15, с. 79]. От задачи (1) перейдем к равносильному интегральному уравнению $u + \lambda Tu + a(u, u') = 0$, где T и a — соответственно линейное и нелинейное компактные отображения, действующие в $C^1[0, \pi]$ [11]. Рассмотрим семейство отображений

$$f_s\colon \overline{\Omega}^{\mp} \to \mathbb{R} \times C^2[0, \pi], \quad f_s(\lambda, u) = (\|u\|^2 - s^2,\ u + \lambda Tu + a(u, u')), \quad s > 0.$$

Для любого $s > 0$ на $\partial\Omega^{\mp}$ выполняется неравенство $f_s(\lambda, u) \neq (0, 0)$. Поэтому определена степень $\deg(f_s, \Omega, (0, 0))$ [1], не зависящая от s. Если s велико, то уравнение $f_s(\lambda, u) = 0$ не имеет решений в силу допущения. Следовательно, степень равна нулю. С другой стороны, при малых s степень равна 1 или 3, как это следует из теоремы 2. Полученное противоречие доказывает теорему для всех „типичных" функций A. Предельным переходом по A, сужая окрестность компакта $\{0\} \times \{0\} \times [0, \pi]$, завершаем доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 4 опирается на априорную оценку.

Лемма 6. *Пусть на всей области определения функция A удовлетворяет оценке* (5). *Тогда для любого решения (λ, u), собственная функция которого имеет на $[0, \pi)$ $2n$ нулей и удовлетворяет оценке $\|u\|_{C^0} \leq R$, $R = \text{const} > 0$, справедлива равномерная оценка $|\lambda| + \|u\|_{C^2} < D$, $D = \text{const} > 0$.*

Доказательство леммы содержится в [4].

Пусть L — произвольная неограниченная $\mathbb{R} \times C^1[0, \pi]$ ветвь решений, выходящая из точки $(\lambda_n, 0)$. Из леммы 6 следует, что L не ограничена в $\mathbb{R} \times C^0[0, \pi]$. Введем отображение $\Pi(\lambda, u) = (|\lambda|, \|u\|_{C^0})$. Рассмотрим прямоугольник $K(D, R) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2\colon\ 0 \leq y_1 \leq D,\ 0 \leq y_2 \leq R\}$. Обозначим через $\partial K(D, R)$ границу $K(D, R)$. Как мы установили, $\Pi(L) \cap \partial K(D, R) \neq \varnothing$. В силу леммы 6 $\Pi(L) \cap \{(y_1, y_2)\colon\ y_1 = D,\ 0 < y_2 \leq R\} = \varnothing$. Следовательно, $P(L) \cap \{(y_1, y_2)\colon\ 0 \leq y_1 \leq D,\ y_2 = R\} \neq \varnothing$, что и доказывает теорему 4.

4. Дополнение. Пусть λ_2 — второе собственное значение линейной краевой задачи $\Delta u + \lambda u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, где Δ — оператор Лапласа, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей. Пусть λ_2 двукратно и ему соответствуют ортонормированные в $L^2(\Omega)$ собственные функции u_1 и u_2. Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta u + A(u, \operatorname{grad}(u), x, y)(\delta u_1 + \beta u_2)u^2 + \lambda u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{8}$$

где функция A принадлежит классу $C^0(\mathbb{R}^3 \times \Omega)$, $\delta, \beta \in \mathbb{R}$, $\delta^2 + \beta^2 > 0$. Мы ищем решения (λ, u) задачи (8) в $\mathbb{R} \times \dot{W}_2^1(\Omega)$ ($\dot{W}_2^1(\Omega)$ — замыкание в пространстве функций $W_2^1(\Omega)$ множества гладких финитных в Ω функций).

Теорема 5. *Пусть $A \not\equiv 0$ и $A \geq 0$ на всей области определения. Тогда:*

1) *точка λ_2 является точкой бифуркации задачи* (8);

2) *из точки $(\lambda_2, 0)$ выходят по крайней мере две ветви малых решений;*

3) *существует по крайней мере одна неограниченная в $\mathbb{R} \times W_2^1(\Omega)$ ветвь решений (λ, u), выходящая из точки $(\lambda_2, 0)$, для которой $\lambda < \lambda_2$;*

4) *собственные функции $u(x)$, принадлежащие указанной неограниченной ветви, имеют на Ω две области знакопостоянства.*

Доказательство теоремы 5 осуществляется по той же схеме, что и доказательство теоремы 3. Отметим, что в отличие от теоремы 3 в теореме 5 гарантируется существование только одной неограниченной ветви. У ветви, удовлетворяющей условию $\lambda < \lambda_2$, есть лишь одна возможность стать ограниченной — войти в точку $(\lambda_1, 0)$. Но это исключено, поскольку ветвь, выходящая из $(\lambda_1, 0)$, содержит только знакопостоянные собственные функции и в силу этого обстоятельства всегда не ограничена [8]. Но не исключено, что ветвь, удовлетворяющая условию $\lambda > \lambda_2$, ограничена, так как нам не известны закономерности бифуркации узловых линий [11] собственных функций, номера которых больше, чем два.

В качестве примера области Ω можно взять квадрат со стороной π. Известно [11], что в этом случае $\lambda_2 = 1^2 + 2^2 = 5$ двукратно и ему соответствуют ортонормированные в L_2 собственные функции $u_{k,l} = 2(\sin(kx)\sin(ly))/\pi$, $k, l = 1, 2$, $k \neq l$.

1. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1956. – 390 с.
2. *Rabinowitz P. H.* A global theorem for nonlinear eigenvalue problems and applications // Contrib. Nonlinear Fcl. Anal. – Acad. Press, 1971. – P. 11–36.
3. *Люстерник Л. А.* Об одной краевой задаче в теории нелинейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1941. – **33**. – С. 5–8.
4. *Дымарский Я. М.* О нормированных собственных функциях двухточечной нелинейной краевой задачи // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 4. – С. 4–8.
5. *Дымарский Я. М.* О теореме Люстерника для двухточечной задачи четвертого порядка // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. – Ярославль, 1984. – С. 16–24.
6. *Дымарский Я. М.* Существование, осцилляционные свойства и асимптотика нормированных собственных функций нелинейных краевых задач // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. – Ярославль, 1985. – С. 133–139.
7. *Келлер Дж., Антман С.* Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. – М.: Мир, 1974. – 254 с.
8. *Cosner Ch.* Bifurcations from higher eigenvalues in nonlinear elliptic equations: continua that meet infinity // Nonlinear Anal. – 1988. – **12**, № 3. – P. 271–277.
9. *Воронов А. А.* Основы теории автоматического регулирования и управления. – М.: Высш. шк., 1977. – 347 с.
10. *Дымарский Я. М.* О некомпактных ветвях собственных функций нелинейных краевых задач // Двадцать шестая воронежская зимняя школа. – Воронеж: Воронеж. ун-т, 1994. – С. 45.
11. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики: В 2-х т. – М.–Л.: Гестехтеоретиздат, 1951. – Т. 1. – 477 с.
12. *Хирш М.* Дифференциальная топология. – М.: Мир, 1979. – 280 с.
13. *Дымарский Я. М.* О типичных бифуркациях в некотором классе операторных уравнений // Докл. АН России. – 1994. – **338**, № 4. – С. 446–449.
14. *Dancer E. N.* On the structure of solutions of nonlinear eigenvalue problems // Indiana Univ. Math. J. – 1974. – **23**, № 11. – P 1069–1076.
15. *Ize J.* Bifurcation theory for Fredholm operators // Memory AMS. – 1976. – **7**, № 174. – P. 1023–1039.

Получено 27.05.94