УДК 517.91

**А. М. Самойленко**, чл.-корр. АН Украины (Ин-т математики АН Украины, Киев)

# ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ*

Исследуется поведение дискретной динамической системы в окрестности квазипериодической траектории. Найдены условия сведения системы в такой окрестности к системе с квазипериодическими коэффициентами. Выясняется поведение рассматриваемой системы при малых возмущениях.

Досліджується поведінка дискретної динамічної системи в околі квазіперіодичної траєкторії. Знайдені умови зведення системи в такому околі до системи з квазіперіодичними коефіцієнтами. З'ясовується поведінка системи, яка розглядається, при малих збуреннях.

В настоящей работе результаты, полученные в [1, 2], распространены на дискретную динамическую систему. Следовательно, речь идет о приведении рассматриваемой системы в окрестности ее квазипериодической траектории к дискретной квазипериодической системе.

Рассматриваемую динамическую систему $x = x(n, x_0)$, $x_0 \in E^q$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, задаем решением системы разностных уравнений

$$x(n+1) - x(n) = X(x(n)),\ x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $n = 0, \pm 1, \ldots$ — дискретное время, $x = x(x_1, \ldots, x_q)$ — точка $q$-мерного евклидового пространства $E^q$, $X = X(x)$ — $r$ раз непрерывно дифференцируемая функция $x$ в $E^q$.

Пусть система (1) имеет инвариантную поверхность

$$M\colon x = f(\varphi),\ \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{2}$$

где $\mathcal{T}_m$ — $m$-мерный тор, $f$ — функция пространства $r$ непрерывно дифференцируемых функций на торе $C^r(\mathcal{T}_m)$, заполненную квазипериодическими траекториями

$$x(n, f(\varphi)) = f(\omega n + \varphi),\ n = 0, \pm 1, \ldots, \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{3}$$

Здесь $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — частотный базис квазипериодической функции $f(\omega t)$, $\varphi$ — произвольная точка $\mathcal{T}_m$.

Будем предполагать, что

$$\operatorname{rank} \frac{f(\varphi)}{\partial\varphi} = m,\quad \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{4}$$

и что матрица $\partial f(\varphi)/\partial\varphi$ дополняема до базиса в $E^q$ с базой $\mathcal{T}_m$; следовательно, существует матрица $B(\varphi)$ из $C^r(\mathcal{T}_m)$ такая, что матрица $[\partial f(\varphi)/\partial\varphi, B(\varphi)]$ — невырождена:

$$\det\left[\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi},\ B(\varphi)\right] \neq 0,\ \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{5}$$

При сделанных предположениях перейдем к исследованию поведения траекторий системы (1), начинающихся в малой окрестности многообразия $M$. Прежде всего отметим, что инвариантность многообразия $M$ и квазипериодичность траекторий на нем требуют выполнения тождества

$$f(\varphi + \omega) = f(\varphi) + X(f(\varphi)),\ \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{6}$$

Предположения о ранге матрицы $\partial f(\varphi)/\partial\varphi$ и ее дополняемости до базиса в

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$E^q$ с базой $\mathcal{T}_m$ гарантируют введение в окрестности $M$ локальных координат $(\varphi, h) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m, h_1, \ldots, h_{q-m})$ согласно формуле

$$x = f(\psi) + B(\varphi)h \tag{7}$$

и представление (1) в окрестности $M$ в виде

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) - \varphi(n) &= \omega + A(\varphi(n), h(n))\, h(n), \\ h(n+1) - h(n) &= P(\varphi(n), h(n))\, h(n) \end{aligned} \tag{8}$$

с периодическими по $\varphi$ периода $2\pi$ и достаточно гладкими по $\varphi, h$ в области

$$\| h \| \le \delta,\ \varphi \in \mathcal{T}_m \tag{9}$$

матрицами $A(\varphi, h)$ и $P(\varphi, h)$ соответствующих размеров. Здесь $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $\ldots$, $\delta$ — достаточно малое положительное число. Покажем это. С этой целью выполним в (1) замену переменных (2) и получим для определения матриц $A = A(\varphi, h)$ и $P = P(\varphi, h)$ систему уравнений

$$f(\varphi + \omega + A(\varphi, h)h) + B(\varphi + \omega + A(\varphi, h)h)\,[h + P(\varphi, h)h] - [f(\varphi) + B(\varphi)h] = \\ = X(f(\varphi) + B(\varphi)h),$$

или с учетом тождества (6)

$$f(\varphi + \omega + Ah) - f(\varphi + \omega) + B(\varphi + \omega + Ah)\,(h + Ph) - B(\varphi)h = \\ = X(f(\varphi) + B(\varphi)h) - X(f(\varphi)).$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\frac{\partial f(\varphi+\omega)}{\partial\varphi} Ah + B(\varphi + \omega + Ah)Ph = X(f(\varphi) + B(\varphi)h) - X(f(\varphi)) - \{[f(\varphi + \omega + Ah) - \\ - f(\varphi + \omega) - \frac{\partial f(\varphi+\omega)}{\partial\varphi} Ah] + [B(\varphi + \omega + Ah) - B(\varphi + \omega)]\,h + [B(\varphi + \omega) - B(\varphi)]\,h\}$$

и, “разделив” на $h$, получим для матриц $A$ и $P$ уравнение

$$\frac{\partial f(\varphi+\omega)}{\partial\varphi} A + B(\varphi + \omega + Ah)P = \int\limits_0^1 \frac{\partial X\big(f(\varphi) + tB(\varphi)h\big)}{\partial x}\, dt\, B(\varphi) - \\ - \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{\partial f(\varphi + \omega + Ah)}{\partial\varphi} - \frac{\partial f(\varphi+\omega)}{\partial\varphi} \right] dt\, A\ + \right. \\ \left. + [B(\varphi + \omega + Ah) - B(\varphi + \omega)]\,h + [B(\varphi + \omega) - B(\varphi)] \right\}. \tag{10}$$

Согласно предположению (5) при фиксированном $M > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(M) \ge 0$, что

$$\det\left[ \frac{\partial f(\varphi+\omega)}{\partial\varphi}, B\big(\varphi + \omega + Ah\big) \right] \ne 0 \tag{11}$$

для всех $(\varphi, h)$ из области (9) и произвольной матрицы $A$, удовлетворяющей условию

$$\| A \| \le M, \tag{12}$$

где норма матрицы $A$ согласована с нормой вектора $h$.

Поэтому уравнение (10) разрешимо в виде

$$A = L_1(\varphi, Ah)\, Q(\varphi, h, A), \quad P = L_2(\varphi, Ah)\, Q(\varphi, h, A) \tag{13}$$

для всех $(\varphi, h)$ из области (9) и $A$ из области (12), где $Q = Q(\varphi, h, A)$ — матричная функция, определяемая правой частью уравнения (10); $L_1(\varphi, Ah)$ и $L_2(\varphi, Ah)$ — блоки матрицы, обратной к матрице $\left[\dfrac{\partial f(\varphi+\omega)}{\partial\varphi}, B(\varphi+\omega+Ah)\right]$.

Для матрицы $Q$ имеем представление

$$Q = B(\varphi+\omega) - B(\varphi) + \frac{\partial X(f(\varphi))}{\partial x} B(\varphi) + Q_1(\varphi, h, A), \tag{14}$$

где $Q_1 = Q_1(\varphi, h, A)$ — матрица, определенная в области $\| h \| \le \delta$, $\| A \| \le M$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $(r-1)$ раз непрерывно дифференцируемая по всем своим переменным и удовлетворяющая условию

$$Q_1(\varphi, 0, A) = 0. \tag{15}$$

Свойства, аналогичные свойствам матрицы $Q$, имеют матрицы $L_1 = L_1(\varphi, A h)$ и $L_2 = L_2(\varphi, A h)$; при этом $L_1(\varphi, 0)$ и $L_2(\varphi, 0)$ являются блоками матрицы, обратной к матрице $\left[\dfrac{\partial f(\varphi+\omega)}{\partial\varphi}, B(\varphi+\omega+Ah)\right]$.

Обозначим через $C^r_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu)$ пространство функций переменного $(\varphi, h)$, определенных в области $\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu$, $\mathcal{K}_\mu = \{h\colon \| h \| \le \mu\}$, имеющих в указанной области непрерывные частные производные до $r$-го порядка включительно и таких, что их $r$-е производные удовлетворяют по $(\varphi, h)$ условию Липшица.

Определим в пространстве $C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu)$ подмножество $C(M, K)$ матричных функций $A = A(\varphi, h)$, удовлетворяющих условиям

$$\| A(\varphi, h) \| \le M, \ \| A(\varphi', h') - A(\varphi, h) \| \le K(\| \varphi' - \varphi \| + \| h' - h \|)$$

для произвольных $(\varphi, h), (\varphi', h')$ из $\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu$.

Покажем, что первое из уравнений (13) имеет при соответствующем выборе постоянных $M, K$ и $\mu$ решение в $C(M, K)$. Для этого определим на множестве $C(M, K)$ оператор $S\colon A \to SA = L_1(\varphi, Ah)\, Q(\varphi, h, A)$. При $r \ge 2$ этот оператор переводит $C(M, K)$ в подмножество пространства $C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu)$. Более того, для $SA = (SA)(\varphi, h)$ справедливы оценки

$$\| (SA)(\varphi, h) \| \le C_1(1 + \mu + \mu M^2),$$
$$\| (SA)(\varphi', h') - (SA)(\varphi, h) \| \le C_2(1 + \mu MK + M^2)(\| \varphi' - \varphi \| + \| h' - h \|) \tag{16}$$

для произвольных $(\varphi, h), (\varphi', h')$ из $\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu$, где $C_1$ и $C_2$ — положительные постоянные, не зависящие от $M, K$ и $\mu < \delta / M$. Подходящим выбором достаточно больших $M$ и $K$ и достаточно малого $\mu$ можно достичь того, что из неравенств (16) следует принадлежность $SA$ множеству $C(M, K)$.

Для пары матричных функций $A = A(\varphi, h)$ и $A_1 = A_1(\varphi, h)$ из множества $C(M, K)$ имеем оценку $\| SA - SA_1 \| \le \mu C_3(1 + M) \| A - A_1 \|$, где постоянная $C_3$ не зависит от $M, K$ и $\mu$. Из этой оценки при достаточно малом $\mu$ следует, что $S$ является оператором сжатия на $C(M, K)$. Отсюда, согласно принципу сжатых отображений, вытекает существование во множестве $C(M, K)$ единственного решения уравнения $A = SA$.

Последнее уравнение совпадает с первым из уравнений (13) и его решение определяет в $C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu)$ при достаточно малом $\mu$ единственную матрицу $A = A(\varphi, h)$ правой части системы (8). Теорема о неявной функции обеспечивает теперь принадлежность матрицы $A(\varphi, h)$ пространству $C_{\mathrm{Lip}}^{r-1}(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu)$.

Второе из уравнений (13) определяет по найденной матрице $A = A(\varphi, h)$ значение матрицы $P = P(\varphi, h)$ правой части системы (8), принадлежащее также пространству $C_{\mathrm{Lip}}^{r-1}(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu)$.

Итак, динамическая система (1) в малой окрестности многообразия $M$ приводится к виду (8) с матрицами $A$ и $P$ из $C_{\mathrm{Lip}}^{r-1}(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu)$.

Задача состоит в том, чтобы указать условия, при которых существует замена переменных $\varphi \to \psi$, преобразующая систему уравнений (8) к квазипериодической системе

$$\psi(n+1) - \psi(n) = \omega,$$
$$h(n+1) - h(n) = R\,(\psi(n), h(n))h(n). \tag{17}$$

Основной результат решения этой задачи заключается в следующем.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены приведенные выше условия и матрица* $P(\varphi, 0)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\| E + P(\varphi, 0) \| \le d < 1. \tag{18}$$

*Тогда можно указать такое* $\mu > 0$ *и матрицу* $U(\psi, h)$, *принадлежащую пространству* $C_{\mathrm{Lip}}^{r-2}(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu)$, $2 \le r < \infty$, *что замена переменных*

$$\varphi = \psi + U(\psi, h)h \tag{19}$$

*приводит систему уравнений* (8) *к виду* (17) *с матрицей*

$$R(\psi, h) = P(\psi + U(\psi, h)h, h). \tag{20}$$

Переходя к доказательству теоремы, определим искомое преобразование $\varphi \to \psi$ согласно замене переменных

$$\psi = \varphi + V(\varphi, h)h, \tag{21}$$

где $V = V(\varphi, h)$ — матричная функция из $C(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu)$.

В соответствии с уравнениями (8), (17) и заменой (21) для определения матрицы $V$ имеем соотношение

$$V(\varphi(n) + \omega + A(\varphi(n), h(n))h(n), P_1(\varphi(n), h(n))h(n)) \times P_1(\varphi(n), h(n))h(n) -$$
$$- V(\varphi(n), h(n))h(n) + A(\varphi(n), h(n))h(n) = 0,$$

из которого следует, что $V = V(\varphi, h)$ удовлетворяет уравнению

$$V(\varphi, h) = V(\varphi + \omega + A(\varphi, h)h, P_1(\varphi, h)h)P_1(\varphi, h) + A(\varphi, h), \tag{22}$$

где $P_1(\varphi, h) = E + P(\varphi, h)$. Положим

$$\varphi_1(\varphi, h) = \varphi + \omega + A(\varphi, h)h, \; h_1(\varphi, h) = P_1(\varphi, h)h \tag{23}$$

и перепишем (22) в виде

$$V(\varphi, h) = V(\varphi_1(\varphi, h), h_1(\varphi, h))P_1(\varphi, h) + A(\varphi, h). \tag{24}$$

Из условия (18) при достаточно малом $\mu$ следует

$$\| P_1(\varphi, h) \| \le d_1 < 1 \tag{25}$$

для всех $(\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu$. Это приводит для последовательных приближений к решению уравнения (24)

$$
\begin{aligned}
&V_1(\varphi, h) = A(\varphi, h),\\
&V_2(\varphi, h) = V_1(\varphi_1(\varphi, h), h_1(\varphi, h))P_1(\varphi, h) + A(\varphi, h), \qquad (26)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&V_{i+1}(\varphi, h) = V_i(\varphi_1(\varphi, h), h_1(\varphi, h))P_1(\varphi, h) + A(\varphi, h),\ i = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}
$$

и оценке

$$
\| V_1(\varphi, h) \| = \| A(\varphi, h) \| \le \max_{\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu} \| A(\varphi, h) \| = M_1,
$$

$$
\| V_2(\varphi, h) \| \le M_1(1 + d_1), \ldots, \| V_{i+1}(\varphi, h) \| \le M_1 \sum_{\nu=0}^{i} d^\nu,
$$

в силу которой последовательность (26) сходится равномерно по $(\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu$ и ее предельная функция $V(\varphi, h) = \lim_{i\to\infty} V_i(\varphi, h)$ является решением уравнения (22), принадлежащим пространству $C(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu)$.

Выясним вопрос о гладкости функции $V$. Для этого рассмотрим функцию $W = W(\varphi, h, \mu) = V(\varphi, \mu h)$ для $(\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu$ и достаточно малого $\mu > 0$. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$
W(\varphi, h, \mu) = W(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu)P_1(\varphi, \mu h) + A(\varphi, \mu h) \qquad (27)
$$

и является пределом последовательных приближений

$$
\begin{aligned}
&W_1(\varphi, h, \mu) = A(\varphi, \mu h),\\
&W_2(\varphi, h, \mu) = W_1(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu)P_1(\varphi, \mu h) + A(\varphi, \mu h),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad (28)\\
&W_{i+1}(\varphi, h, \mu) = W_i(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu)P_1(\varphi, \mu h) + A(\varphi, \mu h),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\quad i = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Дифференцируя выражения (28), для производных получаем равенства

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial W_1(\varphi, h, \mu)}{\partial \varphi_\nu} = \frac{\partial A(\varphi, \mu h)}{\partial \varphi_\nu},\ \frac{\partial W_1(\varphi, h, \mu)}{\partial h_\nu} = \mu \frac{\partial A(\varphi, \mu h)}{\partial (\mu h)_\nu}, \ldots,\\
&\frac{\partial W_{i+1}(\varphi, h, \mu)}{\partial \varphi_\nu} = \left[ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial W_i\left(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu\right)}{\partial \varphi_{1j}} \frac{\partial \varphi_{1,j}(\varphi, \mu h)}{\partial \varphi_\nu} + \right.\\
&\qquad \left. + \sum_{j=1}^{q-m} \frac{\partial W_i\left(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu\right)}{\partial h_{1j}} \frac{\partial h_{1,j}(\varphi, \mu h)}{\partial \varphi_\nu} \right] P_1(\varphi, \mu h) +\\
&\qquad + W_i(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu) \frac{\partial P_1(\varphi, \mu h)}{\partial \varphi_\nu} + \frac{\partial A(\varphi, \mu h)}{\partial \varphi_\nu}, \ldots, \qquad (29)\\
&\frac{\partial W_{i+1}(\varphi, h, \mu)}{\partial h_\nu} = \mu \left[ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial W_i\left(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu\right)}{\partial \varphi_{1j}} \frac{\partial \varphi_{1,j}(\varphi, \mu h)}{\partial (\mu h)_\nu} + \right.\\
&\qquad \left. + \sum_{j=1}^{q-m} \frac{\partial W_i\left(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu\right)}{\partial h_{1j}} \frac{\partial h_{1,j}(\varphi, \mu h)}{\partial \varphi (\mu h)_\nu} \right] P_1(\varphi, \mu h) +\\
&\qquad + \mu W_i(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu) \frac{\partial P_1(\varphi, \mu h)}{\partial (\mu h)_\nu} + \frac{\partial A(\varphi, \mu h)}{\partial (\mu h)_\nu}, \ldots,
\end{aligned}
$$

в которых $\varphi_{1j}$ и $h_{1j}$ — $j$-е координаты векторов $\varphi_1(\varphi, \mu\, h)$ и $h_1(\varphi, \mu\, h)$.

При $\mu = 0$ равенства (29) принимают вид

$$\frac{\partial W_1(\varphi, h, 0)}{\partial \varphi_\nu} = \frac{\partial A(\varphi, 0)}{\partial \varphi_\nu}, \quad \frac{\partial W_1(\varphi, h, 0)}{\partial h_\nu} = 0, \ldots,$$

$$\frac{\partial W_{i+1}(\varphi, h, 0)}{\partial \varphi_\nu} = \frac{\partial W_i(\varphi + \omega, h, 0)}{\partial \varphi_\nu} P_1(\varphi, 0) + \tag{30}$$

$$+ W_1(\varphi + \omega, h, 0)\frac{\partial P_1(\varphi, 0)}{\partial \varphi_\nu} + \frac{\partial A(\varphi, 0)}{\partial \varphi_\nu}, \quad \frac{\partial W_{i+1}(\varphi, h, 0)}{\partial h_\nu} = 0, \ldots$$

и приводят к оценке

$$\max_{\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu} \left\| W'_{i+1} \right\| \le d_1 \max_{\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu} \left\| W'_i \right\| + M_1, \ i = 1, 2, \ldots, \tag{31}$$

где $W'_i$ — матрицы производных от итерации $W_i$, $M_1$ — некоторая положительная постоянная.

Из (31) следует оценка

$$\max_{\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu} \left\| W'_{i+1} \right\| \le M_1 / (1 - d_1), \ i = 1, 2, \ldots \tag{32}$$

При $\mu \ne 0$ формулы (29) имеют вид матричных равенств

$$W'_{i+1}(\varphi, h, \mu) = W'_i(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu)\, P_2(\varphi, h, \mu) +$$

$$+ W_i(\varphi_1(\varphi, \mu h), h_1(\varphi, \mu h), \mu)\, P'_1(\varphi, h, \mu) + A'_1(\varphi, h, \mu), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

в которых $W'_0$ и $W_0$ — нулевые матрицы, $W'_i$ — матрица прозводных от итерации $W_i$, $P'_1$, $A'_1$ и $P_2$ — матричные функции переменных $\varphi, h, \mu$, непрерывно зависящие от этих переменных при $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $h \in \mathcal{K}_1$, $\mu \in I = [0, \mu_0]$, $\mu_0$ — достаточно малое положительное число.

Формулы (30) являются частным случаем формул (33) и совпадают с ними при $\mu = 0$. Поэтому для матриц $P_2$, $P'_1$ и $A'_1$ при $\mu = 0$ получаем выражения

$$P_2(\varphi, h, 0) = \operatorname{diag}\{P_1(\varphi, 0), \ldots, P_1(\varphi, 0), 0, \ldots, 0)\},$$

$$P'_1(\varphi, h, 0) = \left\{\frac{\partial P_1(\varphi, 0)}{\partial \varphi_1}, \ldots, \frac{\partial P_1(\varphi, 0)}{\partial \varphi_m}, 0, \ldots, 0\right\},$$

$$A'(\varphi, h, 0) = \left\{\frac{\partial A(\varphi, 0)}{\partial \varphi_1}, \ldots, \frac{\partial A(\varphi, 0)}{\partial \varphi_m}, 0, \ldots, 0\right\}.$$

Из первого из этих выражений следует оценка

$$\| P_2(\varphi, h, 0) \| = \| P_1(\varphi, 0) \| \le d_1, \tag{34}$$

которая гарантирует для нормы матрицы $P_2(\varphi, h, \mu)$ оценку

$$\| P_2(\varphi, h, \mu) \| \le d_1(\mu), \tag{35}$$

где $d_1(\mu) \to d_1$ при $\mu \to 0$.

Выбором достаточно малого $\mu_0$ достигается неравенство

$$d_1(\mu) \le d_2 < 1 \tag{36}$$

для всех $\mu \in I_0$. Из соотношений (33), (35), (36) вытекает оценка

$$\max_{\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu} \left\| W'_{i+1}(\varphi, h, \mu) \right\| \le d_2 \max_{\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu} \left\| W'_i(\varphi, h, \mu) \right\| + M_2, \ i = 0, 1, \ldots,$$

благодаря которой

$$\max_{\mathcal{T}_m\times\mathcal{K}_\mu}\left\|W_{i+1}(\varphi, h, \mu)\right\| \le M_2/(1-d_2), \tag{37}$$

где $M_2$ — некоторая положительная постоянная.

Неравенство (37) означает, что

$$\max_{\nu, j}\left[\left\|\frac{\partial W_i(\varphi, h, \mu)}{\partial\varphi_\nu}\right\|, \left\|\frac{\partial W_i(\varphi, h, \mu)}{\partial h_j}\right\|\right] \le M_2/(1-d_2)$$

для всех $i = 1, 2, \ldots$ .Но тогда

$$\max_{\nu, j}\left[\left\|\frac{\partial V_i(\varphi, h)}{\partial\varphi_\nu}\right\|, \left\|\frac{\partial V_i(\varphi, h)}{\partial h_j}\right\|\right] \le M_2/\mu_0(1-d_2).$$

Следовательно, последовательность первых производных приближений (26) равномерно ограничена. Аналогичным образом устанавливается равномерная ограниченность последовательности любых производных приближений (26) до порядка $(r-1)$ включительно. Этого достаточно для принадлежности функции $V = V(\varphi, h)$ пространству $C^{r-2}_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m\times\mathcal{K}_\mu)$.

Для завершения доказательства теоремы остается разрешить соотношение (21) относительно $\varphi$ в виде

$$\varphi = \psi + V(\psi, h)h \tag{38}$$

с метрической функцией $U = U(\psi, h)$ из пространства $C^{r-2}_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m\times\mathcal{K}_\mu)$. Подставляя (38) в (21), для матрицы $U$ находим уравнение

$$U = -V(\psi + Uh, h). \tag{39}$$

Уравнение (39) имеет вид первого из уравнений (13). Поэтому рассуждения, приведенные при доказательстве разрешимости первого из уравнений (13), остаются в силе и при рассмотрении уравнения (39). Из этого следует разрешимость в пространстве $C^{r-2}_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m\times\mathcal{K}_\mu)$ уравнения (39), а с ним и к разрешимости в виде (38) уравнения (21).

Остается в матрице $P(\varphi, h)$, определяющей правую часть второго из уравнений системы (8), заменить $\varphi$ его значением (38), чтобы получить для $R$ выражение (20) и завершить доказательство теоремы.

Доказанная теорема позволяет охарактеризовать поведение траекторий дискретной динамической системы (1), начинающихся в малой окрестности многообразия $M$, следующим образом.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда можно указать достаточно малое положительное* $\delta$ *такое, что для каждого* $y_0$, *удовлетворяющего неравенству* $\rho(y_0, M) = \inf_{x\in M}\|y_0 - x\| \le \delta$, *найдутся значения* $\varphi_0$ *и* $\psi_0$ *из* $T_m$ *такие, что*

$$\|x(n, y_0) - f(\omega n + \psi_0)\| \le K_1 d_3^n \|y_0 - f(\varphi_0)\| \tag{40}$$

*для всех* $n = 0, 1, \ldots$ *и некоторых положительных* $K_1$ *и* $d_3$, *где* $d_3 = d_3(\delta) \to$ $\to d_2$ *при* $\delta\to 0$, $\|\psi_0 - \varphi_0\| \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 4 [1].

Из теоремы 2 вытекают следующие ниже утверждения.

**Следствие 1.** *При выполнении условий теоремы* 1 *квазипериодическое решение* $x = x(n, f(\varphi)) = f(\omega n + \varphi)$ *системы* (1) *устойчиво по Ляпунову для* *произвольного* $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1 [1].

**Следствие 2.** *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и* $(k, \omega) \neq 0 \bmod 2\pi$ *для каждого целочисленного* $k = (k_1, \ldots, k_m) \neq 0$. *Тогда для любой непрерывной в окрестности* $M$ *функции* $F = F(x)$ *и любого решения* $x = x(n, y_0)$ *системы* (1), *у которой* $\rho(y_0, M) \leq \delta$, *справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} F\big(x(\varphi, y_0)\big) = F_0 = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F\big(f(\varphi)\big)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_m. \tag{41}$$

Переходя к доказательству равенства (41), представим функцию $F$ в виде суммы $F(x) = P(x, \varepsilon) + R(x, \varepsilon)$, где $P(x, \varepsilon)$ — полином, аппроксимирующий $F$ в окрестности $M$ с точностью до произвольно фиксированного $\varepsilon > 0$, $|R(x, \varepsilon)| \leq \varepsilon$, $x \in U_\delta(M)$. Это приводит к оценке

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{\nu=0}^{n-1} \Big[F\big(x(\nu, y_0)\big) - P\big(x(\nu, y_0), \varepsilon\big)\Big] \right| \leq \varepsilon \tag{42}$$

для любого $n = 1, 2, \ldots$ . Из неравенства (40) получаем оценку

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{\nu=0}^{n-1} \Big[F\big(x(\nu, y_0)\big) + P\big(f(\omega\nu + \psi_0)\big)\Big] \right| \leq \frac{K(\varepsilon) K_1}{n} \times$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{n-1} d_3^{\nu} \left\| y_0 - f(\varphi_0) \right\| \leq \frac{1}{n} K_2(\varepsilon) / (1 - d_3), \tag{43}$$

где $K(\varepsilon)$ — постоянная Липшица полинома $P$, рассматриваемого для $x \in U_\delta(M)$. Представим функцию $P(f(\varphi), \varepsilon)$ в виде суммы $P(f(\varphi), \varepsilon) = Q(\varphi, \varepsilon) + R_1(\varphi, \varepsilon)$, где $Q(\varphi, \varepsilon)$ — тригонометрический полином, аппроксимирующий $P(f(\varphi), \varepsilon)$ с точностью до $\varepsilon$, $|R_1(\varphi, \varepsilon)| \leq \varepsilon$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Это приводит к оценке

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{\nu=0}^{n-1} \Big[P\big(f(\omega\nu + \psi_0)\big) - Q\big(\omega\nu + \psi_0, \varepsilon\big)\Big] \right| \leq \varepsilon \tag{44}$$

для любого $n = 1, 2, \ldots$ . По определению $Q(\varphi, \varepsilon) = \sum_{|k| \leq N} Q_k e^{i(k, \varphi)}$, где $N = N(\varepsilon)$ — достаточно большое целое, $Q_k = Q_k(\varepsilon)$ — коэфициенты Фурье функции $Q(\varphi, \varepsilon)$. Поэтому имеем равенство

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} Q(\omega\nu + \psi_0, \varepsilon) = Q_0 + \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{1 \leq |k| \leq N} Q_k e^{i(k,\omega)\nu} e^{i(k,\psi_0)} =$$

$$= Q_0 + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq |k| \leq N} Q_k \left[ \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{i(k,\omega)\nu} \right] e^{i(k,\psi_0)}$$

и оценку

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} Q(\omega\nu + \psi_0, \varepsilon) - Q_0 \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{1 \leq |k| \leq N} \left| Q_k \right| \left| \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{i(k,\omega)\nu} \right| \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq |k| \leq N} \frac{1}{n} \left| \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{i(k,\omega)\nu} \right| \sum_{1 \leq |k| \leq N} \left| Q_k \right| \leq M(\varepsilon) \max_{1 \leq |k| \leq N} \frac{1}{n} \left| \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{i(k,\omega)\nu} \right|, \tag{45}$$

где $M(\varepsilon) = \sum_{1\le|k|\le N} |Q_k|$. Для последней суммы неравенства (46) верна оценка

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{i(k,\omega)\nu}\right| = \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}\cos\nu(k,\omega)\right)^2 + \left(\sum_{\nu=0}^{n-1}\sin\nu(k,\omega)\right)^2\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\cos^2\frac{(n-1)(k,\omega)}{2}\sin^2\frac{n(k,\omega)}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{(k,\omega)}{2} + \right.$$

$$\left. + \sin^2\frac{(n-1)(k,\omega)}{2}\sin^2\frac{n(k,\omega)}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{(k,\omega)}{2}\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{n}\left|\sin\frac{n(k,\omega)}{2}\right|\left|\operatorname{cosec}\frac{(k,\omega)}{2}\right| \le \frac{1}{n}\left|\operatorname{cosec}\frac{(k,\omega)}{2}\right|,$$

$$(k,\omega) \ne 0 \bmod 2\pi,$$

благодаря которой

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} Q(\omega\nu + \psi_0, \varepsilon) - Q_0\right| \le \frac{1}{n} M(\varepsilon) \max_{1\le|k|\le N}\left|\operatorname{cosec}\frac{(k,\omega)}{2}\right|. \tag{46}$$

Имеем также неравенство

$$|F_0 - Q_0| \le |F_0 - P_0| + |P_0 - Q_0| \le 2\varepsilon \tag{47}$$

для средних значений $F_0, Q_0, P_0$ функций $F(f(\varphi)), Q(\varphi, \varepsilon), F(f(\varphi), \varepsilon)$.

Из неравенств (42) — (47) следует оценка

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} F(x(\nu, y_0)) - F_0\right| \le \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[F(x(\nu, y_0)) - P(x(\nu, y_0), \varepsilon)\right]\right| +$$

$$+ \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[P(x(\nu, y_0), \varepsilon) - P(f(\omega\nu + \psi_0), \varepsilon)\right]\right| +$$

$$+ \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[P(f(\omega\nu + \psi_0), \varepsilon) - Q(\omega\nu + \psi_0, \varepsilon)\right]\right| +$$

$$+ \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=0}^{n-1} Q(\omega\nu + \psi_0, \varepsilon) - Q_0\right| + |Q_0 - F_0| \le \varepsilon + \frac{1}{n}K_2(\varepsilon)/(1 - d_3) +$$

$$+ \varepsilon + \frac{1}{n}M(\varepsilon)\max_{1\le|k|\le N}\left|\operatorname{cosec}\frac{(k,\omega)}{2}\right| + 2\varepsilon \le 4\varepsilon + \frac{1}{n}M_1(\varepsilon), \tag{48}$$

где $M_1(\varepsilon) = K_2(\varepsilon)/(1 - d_3) + M(\varepsilon)\max_{1\le|k|\le N}\left|\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(k,\omega)\right|$.

Выберем $n = n(\varepsilon)$ настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $M_1(\varepsilon)/n \le \varepsilon$ для всех $n \ge n_0$. Тогда оценке (48) можно придать вид неравенства

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} F(x(\nu, y_0)) - F_0\right| \le S\varepsilon,\ n \ge n_0,$$

обеспечивающего предельное соотношение (41).

При обсуждении вопроса о грубости ситуации с поведением решений системы (1) в окрестности многообразия $M$ рассмотрим возмущенную систему уравнений

$$x(n+1) - x(n) = X(x(n)) + \varepsilon Y(x(n)), \tag{49}$$

где $Y = Y(x)$ — $r$ раз непрерывно дифференцируемая функция $x$ в $E^q$, $\varepsilon$ — малый положительный параметр. При замене переменных (7) эта система уравнений в окрестности $M$ преобразуется в систему

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = \omega + \varepsilon a(\varphi(n)) + A(\varphi(n), h(n), \varepsilon)\, h(n),$$
$$h(n+1) - h(n) = P(\varphi(n), h(n), \varepsilon)\, h(n) + \varepsilon C(\varphi(n)), \tag{50}$$

где $a = a(\varphi)$, $A = A(\varphi, h, \varepsilon)$, $P = P(\varphi, h, \varepsilon)$ и $C = C(\varphi)$ — функции из пространства $C^{r-1}_{\mathrm{Lip}}\left(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu\right)$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, целые относительно $\varepsilon$.

Применяя к системе (50) теорию возмущения инвариантного тороидального многообразия дискретной динамической системы [3 – 5] и технику преобразования системы (8) к виду (17), приведенную выше, получаем следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда можно указать достаточно малые положительные значения* $\mu$ *и* $\varepsilon_0$, *функцию* $u(\varphi, \varepsilon)$ *и матрицу* $U(\varphi, h, \varepsilon)$, *принадлежащие пространству* $C^{r-2}_{\mathrm{Lip}}\left(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu\right)$ *для любого* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ *и удовлетворяющие условию*

$$\lim_{\varepsilon \to \infty}\left(\left\| u(\varphi, \varepsilon)\right\|_{r-1,\,\mathrm{Lip}} + \left\| U(\varphi, h, \varepsilon) - U(\varphi, h)\right\|_{r-2,\,\mathrm{Lip}}\right) = 0,$$

*такие, что замена переменных* $\varphi = \psi + U(\psi, z, \varepsilon)$, $h = u(\varphi, \varepsilon) + z$ *приводит систему уравнений* (49) *к системе*

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = \omega + \mathcal{F}(\psi(n), \varepsilon),$$
$$z(n+1) - z(n) = R\,(\psi(n), z(n), \varepsilon)\, z(n),$$

*в которой функции* $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\psi, \varepsilon) = \varepsilon a(\psi) + A(\psi, u(\psi, \varepsilon), \varepsilon)$ *и* $R = R(\psi, z, \varepsilon)$ *принадлежат пространству* $C^{r-2}_{\mathrm{Lip}}\left(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu\right)$ *для каждого* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ *и непрерывны по* $\varepsilon$ *вместе со своими производными по* $\psi$, $z$ *до порядка* $(r-2)$ *включительно при* $(\psi, z, \varepsilon) \in \mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu \times I_0$, $I_0 = [0, \varepsilon_0]$.

Как и в [1], для функции $u = u(\varphi, h) \in C^r_{\mathrm{Lip}}\left(\mathcal{T}_m \times \mathcal{K}_\mu\right)$ посредством $\|\cdot\|_{r,\,\mathrm{Lip}}$ обозначена величина $\|u\|_{r,\,\mathrm{Lip}} = \|u\|_r + K_r$, где $\|u\|_r = \max\limits_{0 \le \rho \le r}\left\|D^\rho u\right\|$, $D^\rho$ — произвольная производная функции $u$ по $(\varphi, h)$ порядка $\rho$, $K_r$ — постоянная Липшица $r$-х производных функции $u$.


1. *Самойленко А. М.* Исследование динамической системы в окрестности квазипериодической траектории. – Киев, 1990. – 43 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики. 90.35).
2. *Самойленко А. М.* Динамические системы в $\mathcal{T}_m \times E^n$ // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1283 – 1298.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1984. – 212 с.
4. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
5. *Неймарк Ю. И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1972. – 471 с.


Получено 23. 10. 92