УДК 517.5

В. А. Плотников, В. М. Савченко (Одес. ун-т)

ОБ УСРЕДНЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРИ ОТСУТСТВИИ СРЕДНЕГО ПРАВОЙ ЧАСТИ

We consider the problem of application of the averaging method to the asymptotic approximation of solutions of differential inclusions of standard form in the case where the average of the right-hand side does not exist.

Розглянуто застосування методу усереднення для побудови асимптотичної апроксимації розв'язків диференціальних включень стандартного вигляду при умові, що середнє правої частини не існує.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \varepsilon X(t,x), \qquad x(0) = x^0, \quad t \in [0, L\varepsilon^{-1}], \tag{1}$$

где $X(t,x)$: $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ — многозначное отображение, $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ — пространство непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $L > 0$ константа.

В методе усреднения [1] в соответствие включению (1) ставится следующее усредненное включение:

$$\dot{\zeta} \in \overline{X}(\zeta), \qquad \zeta(0) = x^0, \quad t \in [0, L\varepsilon^{-1}],$$

где

$$\overline{X}(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t,x)\,dt, \tag{2}$$

интеграл в (2) понимается в смысле Аумана. Однако этот предел существует не во всех случаях. Пусть существуют такие многозначные отображения $X^-(x)$, $X^+(x)$, что для любого $\eta > 0$ можно указать такое $T^0 > 0$, что при $T > T^0$ справедливы оценки

$$\begin{gathered} X^-(x) \subset \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(t,x)\,dt + S_\eta(0), \\ \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(t,x)\,dt \subset X^+(x) + S_\eta(0). \end{gathered} \tag{3}$$

Поставим в соответствие включению (1) следующие включения:

$$\dot{x}^- \in \varepsilon X^-(x^-), \qquad x^-(0) = x^0, \quad t \in [0, L\varepsilon^{-1}], \tag{4}$$

$$\dot{x}^+ \in \varepsilon X^+(x^+), \qquad x^+(0) = x^0, \quad t \in [0, L\varepsilon^{-1}]. \tag{5}$$

Теорема. *Пусть многозначное отображение* $X(t,x)$ *определено в* $Q = \{t \ge 0, x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ *и выполняются следующие условия:*

1) *многозначное отображение* $X(t,x)$ *непрерывно по* x, *измеримо по* t, *существуют суммируемые функции* $M(t)$, $\lambda(t)$ *и константы* M_0 *и* λ_0 *такие, что*

$$X(t,x) \subset S_{M(t)}(0), \qquad h(X(t,x'), X(t,x'')) \le \lambda(t)\,\|x' - x''\|$$

и для любого конечного интервала $[t_1, t_2]$ *выполняются неравенства*

$$\int_{t_1}^{t_2} M(t)\,dt \le M_0(t_1-t_2), \qquad \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\,dt \le \lambda_0(t_1-t_2);$$

2) *многозначные отображения* $X^-(x)$, $X^+(x)$ — *выпуклые компакты, удовлетворяющие условию Липшица по* x *с константой* λ_0 *и ограниченные константой* M_0; *равномерно относительно* $x \in D$ *выполняется условие* (3);

3) *для всех* $x^0 \in D' \subset D$ *решения включений* (4) *и* (5) *лежат вместе с некоторой* ρ-*окрестностью в* D;

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon^0 > 0$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедливы следующие утверждения:*

1. *Для любого решения* $x^-(t)$ *включения* (4) *существует решение* $x(t)$ *включения* (1) *такое, что* $\| x^-(t) - x(t) \| < \eta$;

2. *Для любого решения* $x(t)$ *включения* (1) *существует решение* $x^+(t)$ *включения* (5) *такое, что* $\| x(t) - x^+(t) \| < \eta$.

Доказательство. Сначала докажем утверждение 1. Пусть $\zeta(t)$ — некоторое решение включения (4). Рассмотрим следующую функцию:

$$\zeta'(t) = \zeta'(t_i) + \varepsilon u_i(t - t_i), \tag{6}$$

$$\zeta'(0) = x^0, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad t_i = \frac{Li}{m\varepsilon}, \quad i = \overline{0, m},$$

где

$$\left\| \frac{L}{m\varepsilon} u_i - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{u}(t)\,dt \right\| = \min_{u \in X^-(\zeta'(t_i))} \left\| \frac{L}{m\varepsilon} u - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{u}(t)\,dt \right\|, \tag{7}$$

$$\zeta(t) = \zeta(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^{t} \overline{u}(\tau)\,d\tau, \qquad \zeta(0) = x^0, \quad \overline{u}(t) \in X^-(\zeta(t)). \tag{8}$$

Так как в (7) минимизируемая функция строго выпукла, а множество $X^-(\zeta(t_i))$ компактно и выпукло, существует единственный вектор u_i.

Пусть $\sigma_i = \| \zeta(t_i) - \zeta'(t_i) \|$, тогда

$$\| \zeta(t) - \zeta'(t_i) \| \le \| \zeta(t) - \zeta(t_i) + \zeta(t_i) - \zeta'(t_i) \| \le$$
$$\le \sigma_i + \varepsilon M(t - t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}]; \tag{9}$$

$$h(X^-(\zeta(t)), X^-(\zeta'(t_i))) \le \lambda [\sigma_i + \varepsilon M(t - t_i)], \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{10}$$

Из (7)–(10) следует

$$\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overline{u}(\tau)\,d\tau - \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_i\,d\tau \right\| \le h\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} X^-(\zeta(\tau))\,d\tau, \int_{t_i}^{t_{i+1}} X^-(\zeta'(t_i))\,d\tau \right) \le$$

$$\le \int_{t_i}^{t_{i+1}} h\big(X^-(\zeta(\tau)),\ X^-(\zeta'(t_i))\big)\,d\tau \le \lambda \left[\sigma_i(t_{i+1} - t_i) + \frac{\varepsilon M(t_{i+1} - t_i)^2}{2} \right].$$

Учитывая (6), (8), получаем следующую оценку:

$$\sigma_{i+1} \le \sigma_i + \lambda \left[\sigma_i \frac{L}{m} + \frac{ML^2}{m^2} \right] = \frac{\lambda M L^2}{m^2} + \left(1 + \frac{\lambda L}{m} \right) \sigma_i,$$

$$\sigma_{i+1} \le \frac{LM}{m}\left[\left(1+\frac{\lambda L}{m}\right)^{i+1}-1\right] \le \frac{LM}{m}(e^{\lambda L}-1),$$

$$\|\zeta(t)-\zeta(t_i)\| = \varepsilon\left\|\int_{t_i}^{t}\overline{u}(\tau)\,d\tau\right\| \le \frac{ML}{m}, \quad \|\zeta'(t)-\zeta'(t_i)\| \le \frac{ML}{m}.$$

Таким образом,

$$\|\zeta(t)-\zeta'(t)\| \le \frac{ML}{m}+\frac{ML}{m}+\frac{ML}{m}(e^{\lambda L}-1) = \frac{ML}{m}(e^{\lambda L}+1). \tag{11}$$

Рассмотрим функцию

$$x'(t) = x'(t_i)+\varepsilon\int_{t_i}^{t_{i+1}}u^1(\tau)\,d\tau, \tag{12}$$

$$x'(0)=x^0, \quad u^1(t)\in X(t,\zeta'(t_i)), \quad t\in[t_i,t_{i+1}].$$

Из условия 2 данной теоремы следует, что для любого $\eta_1>0$ существует ε^0 такое, что для $\varepsilon\in(0,\varepsilon^0]$

$$X^-(\zeta'(t_i)) \subset \frac{\varepsilon m}{L}\int_{t_i}^{t_{i+1}}X(\tau,\zeta'(t_i))\,d\tau+S_{\eta_1}(0), \tag{13}$$

и существует измеримая вектор-функция $u'(t)$ такая, что

$$\left\|\frac{\varepsilon m}{L}\int_{t_i}^{t_{i+1}}[u'(\tau)-u_i]\,d\tau\right\| \le \eta_1.$$

Тогда из (12), (13) имеем $\|x'(t_i)-\zeta'(t_i)\| \le L\eta_1$. Так как

$$\|x'(t)-x'(t_i)\| \le \frac{ML}{m},$$

то получаем следующие неравенства:

$$\|x'(t)-\zeta'(t)\| \le \frac{2ML}{m}+L\eta_1, \tag{14}$$

$$h(X(t,x'(t)),X(t,\zeta'(t_i))) \le \frac{\lambda ML}{m}+\lambda L\eta_1 = \lambda L\left(\frac{M}{m}+\eta_1\right). \tag{15}$$

Из неравенства (15) и способа выбора вектор-функции $u'(t)$ вытекает

$$\rho(\dot{x}'(t)),\varepsilon X(t,x'(t)) \le \varepsilon\lambda L\left(\frac{M}{m}+\eta_1\right).$$

Тогда согласно теореме А. Ф. Филиппова [2] существует решение $x(t)$ включения (1) такое, что

$$\|x(t)-x'(t)\| \le \varepsilon\lambda L\left(\frac{M}{m}+\eta_1\right)\int_0^t e^{\varepsilon\lambda\tau}\,d\tau \le L\left(\frac{M}{m}+\eta_1\right)(e^{\lambda L}-1). \tag{16}$$

Из неравенств (16), (14), (11) следует

$$\|\zeta(t)-x(t)\| \le (e^{\lambda L}+1)\frac{2ML}{\eta}+L\eta_1 e^{\lambda L}.$$

Выбирая $m>2ML(e^{\lambda L}+1)/\eta$ и $\eta_1<\eta/2Le^{\lambda L}$, получаем $\|\zeta(t)-x(t)\|\le\eta$, т. е. доказано утверждение 1 теоремы. Утверждение 2 доказывается аналогично.

Замечания. **1.** Если $R(t)$, $R^+(t)$, $R^-(t)$ — сечение пучков решений включений (1), (4) и (5) соответственно, то

$$R^-(t) \subset R(t) + S_\eta(0), \qquad R(t) \subset R^+(t) + S_\eta(0). \tag{17}$$

2. В качестве $X^-(x)$ и $X^+(x)$ можно использовать верхний и нижний предел (в топологическом смысле [3]):

$$\overline{X^-}(x) = \varliminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t,x)\,dt,$$

$$\overline{X^+}(x) = \varlimsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t,x)\,dt.$$

Множества $\overline{X^-}(x)$ и $\overline{X^+}(x)$ являются соответственно максимальным и минимальным по включению из множеств $X^-(x)$ и $X^+(x)$, т. е. для любых $X^-(x)$ и $X^+(x)$ выполняются включения $X^-(x) \subset \overline{X^-}(x)$, $\overline{X^+}(x) \subset X^+(x)$.

3. Если существует среднее

$$X^0(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t,x)\,dt,$$

то $\overline{X^-}(x) = \overline{X^+}(x) = X^0(x)$, и из доказанной выше теоремы следует первая теорема Н. Н. Боголюбова для дифференциальных включений [1].

Пример. Рассмотрим следующее дифференциальное включение:

$$\dot{x} \in S_{r(t)}(0), \qquad x(0) = x^0;$$

$$r(t) = 2 + 0{,}5\sqrt{2}\sin\left(\ln(t+1)\right)$$

$S_r(a)$ — шар радиуса r с центром в точке a, $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$.

Так как

$$\frac{1}{T}\int_0^T S_{r(t)}(0)\,dt = S_1(0)\left[2 + \frac{(T+1)\sqrt{2}}{4T}\left(\sin(\ln(T+1)) - \cos(\ln(T+1))\right) + \frac{\sqrt{2}}{4T}\right],$$

то среднее $\overline{X(x)}$ в данном случае не существует. Отсюда $\overline{X^-}(x) = S_{1,5}(0)$ и $\overline{X^+}(x) = S_{2,5}(0)$, а включения (4), (5) имеют вид

$$\dot{x}^- \in \varepsilon S_{1,5}(0), \qquad x^-(0) = x^0, \quad t \in [0, L\varepsilon^{-1}];$$

$$\dot{x}^+ \in \varepsilon S_{2,5}(0), \qquad x^+(0) = x^0, \quad t \in [0, L\varepsilon^{-1}].$$

Очевидно,

$$R(t) = x^0 + \varepsilon S_1(0)\left(2t + \frac{(t+1)\sqrt{2}}{4T}\left(\sin(\ln(t+1)) - \cos(\ln(t+1))\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\right),$$

$$R^-(t) = x^0 + \varepsilon t S_{1,5}(0), \qquad R^+(t) = x^0 + \varepsilon t S_{2,5}(0),$$

и при $\varepsilon < 4\eta/(2+\sqrt{2})$ выполнены оценки (17).

1. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев: Лыбидь, 1992. – 188 с.
2. *Филиппов А. Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. математика, механика. – 1967. – № 3. – С. 16–26.
3. *Куратовский К.* Топология. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.

Получено 11. 05. 95