УДК 517. 956. 223

Я. А. Ройтберг, А. В. Склярец (Чернигов. пед. ин-т)

ЗАДАЧА СОБОЛЕВА В ПОЛНОЙ ШКАЛЕ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ*

In a bounded domain $G \subset \mathbb{R}^n$, whose boundary is the union of manifolds of different dimensions, we study the Sobolev problem for a properly elliptic expression of order $2m$. The boundary conditions are given by linear differential expressions on manifolds of different dimensions. We study the Sobolev problem in the complete scale of Banach spaces. For this problem, we prove the theorem on a complete set of isomorphisms and indicate its applications.

В обмеженій області $G \subset \mathbb{R}^n$, межа якої є об'єднанням многовидів різних розмірностей, вивчається задача Соболева для правильно еліптичного виразу порядку $2m$. У цій задачі граничні умови задаються лінійними диференціальними виразами на многовидах різних розмірностей. Задачу Соболева вивчено в повній шкалі банахових просторів, для неї встановлено теорему про повний набір ізоморфізмів, вказано її застосування.

1. Введение. Задача Соболева в классах достаточно гладких функций изучена достаточно полно (см. [1–3] и приведенную там библиографию). В данной работе задача Соболева изучена в полной шкале банаховых пространств, для нее установлена теорема о полном наборе изоморфизмов. Введены и изучены системы Дирихле на i-мерном многообразии Γ, расположенном внутри области. В настоящей статье существенно используется теорема о полном наборе изоморфизмов для эллиптических граничных задачах в областях с гладкой $(n-1)$-мерной границей [4–8].

2. Постановка задачи. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\delta G = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_{\bar{k}}$ — ее граница; Γ_0 — $(n-1)$-мерное замкнутое многообразие без края, внешняя граница G, Γ_j — i_j-мерное многообразие без края, $0 \le i_j \le n-1$, $i'_j = n - i_j$ — коразмерность Γ_j, $j = 1, \ldots, \bar{k}$, $\Gamma_j \in C^\infty$, $j = 0, \ldots, \bar{k}$. В G рассматривается граничная задача

$$L(x, D)u = f \quad (\text{в } G;\ \operatorname{ord} L = 2m), \tag{1}$$

$$B_{j0}(x, D)u|_{\Gamma_0} = \varphi_{j0}, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \operatorname{ord} B_{j0} = q_{j0}, \tag{2}$$

$$B_{rk}(x, D)u|_{\Gamma_k} = \varphi_{rk}, \quad r = 1, \ldots, m_k,\ k = 1, \ldots, \bar{k}, \quad \operatorname{ord} B_{rk} = q_{rk}. \tag{3}$$

Всюду далее предполагается, что уравнение (1) правильно эллиптическое в $\overline{G}$, граничные условия (2) удовлетворяют на Γ_0 условию Лопатинского [6–8] и для каждого k выражения $\{B_{rk}\}$ образуют на Γ_k систему Дирихле (см. п. 6). Здесь и ниже коэффициенты всех дифференциальных выражений предполагаем, для простоты, бесконечно гладкими; предполагаем также, что $q_{rk} \le 2m - i'_k$, $k = 0, \ldots, \bar{k}$, $r = 1, \ldots, m_k$, $m_0 = m$. Для точной постановки задачи надо ввести функциональные пространства.

3. Функциональные пространства. Пусть $p, p' \in (1, \infty)$, $1/p + 1/p' = 1$. Через $H^{s,p}(G)$, $s \ge 0$, обозначим пространство бесселевых потенциалов (лиувиллевских классов), а через $H^{-s,p'}(G)$ — пространство, сопряженное $H^{s,p}(G)$ относительно расширения $(\cdot, \cdot)$ скалярного произведения в $L_2(G)$, $\|\cdot\|_{s,p}$ — норма в $H^{s,p}(G)$, $s \in \mathbb{R}$. Заметим, что поскольку при $s \ge 0$ пространство $H^{s,p}(G)$ — это пространство сужений на область G элементов из $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ с фактор-топологией $H^{s,p}(G) = H^{s,p}(\mathbb{R}^n) / H^{s,p}_{CG}(\mathbb{R}^n)$, где

* Работа частично поддержана грантами AMS, ISF, INTAS–95.

$$H^{s,p}_{CG}(\mathbb{R}^n) = \{ f \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} f \subset CG = \mathbb{R}^n \setminus G \},$$

а при $s \geq 0$ нет функций с носителями на $\Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_{\bar{k}}$, то

$$H^{s,p}(G) = H^{s,p}(C \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_{\bar{k}}), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Через $B^{s,p}(\Gamma_k)$, $s \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, \bar{k}$, обозначим пространства Бесова, $\langle\langle \cdot, \Gamma_k \rangle\rangle_{s,p}$ — норма в нем. Пространства $B^{s,p}(\Gamma_k)$ и $B^{-s,p'}(\Gamma_k)$ взаимно сопряжены относительно расширения $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_k}$ скалярного произведения в $L_2(\Gamma_k)$.

Пусть

$$s \in \mathbb{R}, \ s \neq j + i'_k / p, \ j = 0, \ldots, 2m - i'_k, \ k = 0, \ldots, \bar{k}.$$

Через $\tilde{H}^{s,p}(G)$ обозначим пополнение $C^\infty(\overline{G})$ по норме

$$||| u |||_{s,p} = \left(\| u \|^p_{s,p} + \sum_{j=1}^{m} \langle\langle D_\nu^{j-1} u, \Gamma_0 \rangle\rangle^p_{s-j+1/p', p} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\bar{k}} \sum_{|\alpha| \leq 2m - i'_k} \langle\langle D_y^\alpha u, \Gamma_k \rangle\rangle^p_{s-|\alpha|-i'_k/p, p} \right)^{1/p}. \tag{4}$$

Здесь $D_\nu = i \dfrac{\partial}{\partial \nu}$, ν — нормаль к Γ_0; $D_y^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_{i'_k}^{\alpha_k}$, $D_j = i \dfrac{\partial}{\partial y_j}$, $(y_1, \ldots, y_{i'_k})$ — ортогональный репер к Γ_k. Для исключенных значений s норма (4) и пространство $\tilde{H}^{s,p}(G)$ определяются с помощью комплексной интерполяции.

Подобное пространство введено в [4] и подробно изучено в [8] (см. также [5], гл. 3, п. 6; [6], I, гл. 2; [7], гл. II). Замыкание S отображения

$$u \to Su = \left(u|_{\overline{G}}, u|_{\Gamma_0}, \ldots, D_y^{2m-1} u|_{\Gamma_0}, \left\{ D_y^\alpha u|_{\Gamma_k}, |\alpha| \leq 2m - i'_k, \ k = 1, \ldots, \bar{k} \right\} \right),$$

$$u \in C^\infty(\overline{G}),$$

является изометрией между $H^{s,p}(G)$ и подпространством прямого произведения

$$F^{s,p} = H^{s,p}(G) \times \prod_{j=1}^{2m} B^{s-j+1-1/p, p}(\Gamma_0) \times \prod_{k=1}^{\bar{k}} \prod_{|\alpha| \leq 2m - i'_k} B^{s-|\alpha|-i'_k/p, p}(\Gamma_k). \tag{5}$$

При этом $S \tilde{H}^{s,p} = F^{s,p}$, если $s < 1/p$. Если $s > 1/p$, то

$$S \tilde{H}^{s,p} = \left(u_0, u_1, \ldots, u_{2m}, \left\{ u_{\alpha k} : |\alpha| \leq 2m - i'_k, \ k = 1, \ldots, \bar{k} \right\} : u_j = D_\nu^{j-1} u_0 |_{\Gamma_0} \right)$$

для всех j: $s - j + 1 - 1/p > 0$, $u_{\alpha k} = D_y^\alpha u_0 |_{\Gamma_0}$, если $s - |\alpha| - i'_k / p > 0$, остальные компоненты Su от u_0 не зависят (ср. с [6–8]).

Поэтому можно отождествить $u \in \tilde{H}^{s,p}$ с элементом $Su \in F^{s,p}$. Будем писать

$$u = \left(u_0, u_1, \ldots, u_{2m}, \left\{ u_{\alpha k} : |\alpha| \leq 2m - i'_k, \ k = 1, \ldots, \bar{k} \right\} \right) \in \tilde{H}^{s,p} \tag{6}$$

для каждого $u \in \tilde{H}^{s,p}$.

Теорема 1 (ср. с [4–8]). *Для каждого* $s \in \mathbb{R}$ *и* $p \in (1, \infty)$ *замыкание* $A = A^{s,p}$ *отображения*

$$u \to \left(Lu|_{\overline{G}}, B_1 u|_{\Gamma_0}, \ldots, B_m u|_{\Gamma_0}, \left\{ B_{rk} u|_{\Gamma_k},\ k = 1, \ldots, \overline{k},\ r = 1, \ldots, m_k \right\} \right),$$

$$u \in C^\infty(\overline{G}),$$

непрерывно действует в паре пространств

$$\tilde{H}^{s,p}(G) \to K^{s,p} := H^{s-2m,p}(G) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{2m} B^{s-q_{j0}-1/p,\,p}(\Gamma_0) \times \prod_{k=1}^{\overline{k}} \prod_{r=1}^{m_k} B^{s-q_{rk}-i'_k/p,\,p}(\Gamma_k). \tag{7}$$

Если $s_1 \le s$, $p_1 \le p$, *то оператор* A_{s_1,p_1} *является расширением по непрерывности оператора* $A_{s,p}$.

Элемент $u \in \tilde{H}^{s,p}$, для которого $A_{s,p} u = F = (f, \varphi_{10}, \ldots, \varphi_{m0}, \{\varphi_{rk}\}) \in K^{s,p}$, назовем обобщенным решением задачи (1)–(3).

4. Формулы для вычисления $A_{s,p} u = (Lu, B_1 u, \ldots, B_m u, \{B_{rk}\}) \in K^{s,p}$**.** Пусть $u \in C^\infty(\overline{G})$ — решение уравнения (1) (с $f \in C^\infty(\overline{G})$). Ясно, что тогда $(Lu, v) = (f, v)$, $v \in C^\infty(\overline{G})$. С помощью интегрирования по частям получим

$$(u_0, L^+ v) + \sum_{j=1}^{2m-1} \langle u_j,\ \Lambda_{2m-j+1}(x, D) v \rangle_{\Gamma_0} = (f, v), \quad v \in C^\infty(\overline{G}). \tag{8}$$

Здесь $u_0 = u|_{\overline{G}}$, $u_j = D_\nu^{j-1} u|_{\Gamma_0}$, $j = 1, \ldots, 2m$, $\Lambda_k(x, D)$ — дифференциальные выражения порядков $k-1$, образующие на Γ_0 систему Дирихле порядка $2m$. С помощью предельного перехода легко убедиться, что вектор (6) является обобщенным решением уравнения $Lu = F \in H^{s-2m,p}(G)$ в том и только в том случае, когда выполнены соотношения (8). Аналогично, если

$$B_j(x, D) = \sum_{k=1}^{m_j+1} B_{j,k}(x, D')\, D_\nu^{k-1},$$

где $B_{j,k}(x, D')$ — тангенциальные выражения на Γ_0 порядков $m_j - k + 1$, то $B_j(x, D) u|_{\Gamma_0} = \varphi_{j0} \in B^{s-j+1-1/p,\,p}(\Gamma_0)$ в том и только в том случае, когда

$$\sum_{k=1}^{m_j+1} B_{j,k}(x, D')\, u_k = \varphi_{j0}, \quad j = 1, \ldots m. \tag{9}$$

Подобным образом, если

$$B_{r,k}(x, D) = \sum_{|\alpha| \le q_{rk}} B_{rk\alpha}(t, y, D_t) D_y^\alpha,$$

где $B_{rk\alpha}(t, y, D_t)$ — тангенциальные выражения на Γ_k порядков $q_{rk} - |\alpha|$, а $x = (t, y)$, t — локальные координаты на Γ_k, а $\left(y_1, \ldots, y_{i'_k}\right)$ — локальные координаты в ортогональном сечении, то

$$B_{r,k}(x, D)u|_{\Gamma_k} = \varphi_{r,k} \in B^{s-q_{rk}-i'_k/p,\, p}(\Gamma_k)$$

в том и только в том случае, когда

$$\sum_{|\alpha| \le q_{rk}} B_{rk\alpha}(t, y, D_t)u_{\alpha k} = \varphi_{rk}, \quad r = 1, \ldots, m_k, \; k = 1, \ldots, \bar{k}. \tag{10}$$

Формулы (8)–(10) позволяют, следовательно, по вектору $u \in \tilde{H}^{s,p}$, определяемому (6), найти вектор $F = Au \in K^{s,p}$. Отметим, что f определяется первыми $2m+1$ компонентами вектора (6), $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ определяется компонентами $(u_1, \ldots, u_{2m})$, а φ_{rk}, $k = 1, \ldots, \bar{k}$, $r = 1, \ldots, q_{rk}$, определяются остальными компонентами вектора (6). Поэтому для нахождения первых $2m+1$ компонент обобщенного решения (6) можно воспользоваться результатами [6–8] по обобщенной разрешимости в $G \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_{\bar{k}}$ задачи (1), (2).

5. Теорема о полном наборе изоморфизмов для задачи (1), (2). Обозначим через $H^{s,p,(2m)}(G)$, $s \ne j + 1/p$ $(j = 0, \ldots, 2m-1)$, пополнение $C^\infty(\overline{G})$ по норме

$$|||u|||_{s,p,(2m)} = \left(\|u\|^p_{s,p} + \sum_{j=1}^{2m} \langle\langle D_\nu^{j-1}u; \Gamma_0 \rangle\rangle^p_{s-j+1-1/p,\, p} \right)^{1/p}. \tag{11}$$

Для исключенных s определим пространство $\tilde{H}^{s,p,(2m)}$ и норму (11) с помощью комплексной интерполяции. Тогда для каждых $s \in \mathbb{R}$, $p \in (1, \infty)$ замыкание $A' = (L, B_1, \ldots, B_m)$ отображения

$$u \longrightarrow \left(Lu|_{\overline{G}}, B_1u|_{\Gamma_0}, \ldots, B_mu|_{\Gamma_0} \right), \quad u \in C^\infty(\overline{G}),$$

непрерывно действует из всего $\tilde{H}^{s,p,(2m)}$ в

$$K'_{s,p} = H^{s-2m,p}(G) \prod_{j=1}^{m} B^{s-m_j-1/p,\, p}(\Gamma_0).$$

Оператор $A' = A'_{s,p}$ нетеров. Ядро $N(A')$ и коядро $N^*(A')$ конечномерны и не зависят от s и p и состоят из бесконечно гладких элементов [4–8]. Чтобы не вводить проекционных операторов, предположим, для простоты, что дефект задачи (1), (2) отсутствует: $N(A') = 0$, $N^*(A') = 0$. Тогда для каждого $s \in \mathbb{R}$ и $p \in (1, \infty)$ оператор $A' = A'_{s,p}$ устанавливает изоморфизм $\tilde{H}^{s,p,(2m)} \to K'_{s,p}$; при $s_1 \ge s$, $p_1 \ge p$ оператор $A'_{s,p}$ является расширением по непрерывности оператора A'_{s_1,p_1}. Если $(f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) = (f, \varphi) \in K'_{s,p}$, то $A'^{-1}(f, \varphi) = (u_0, u_1, \ldots, u_{2m}) \in \tilde{H}^{s,p,(2m)}$ дает первые $2m+1$ компонент обобщенного решения (6) задачи (1)–(3).

6. Системы Дирихле. Пусть $\Gamma \subset G$ — бесконечно гладкое i-мерное многообразие без края, $0 \le i \le n-1$, $i' = n-1$ — коразмерность Γ. Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и пусть

$$G_\varepsilon = \{x \in G : \operatorname{dist}(x, \Gamma) < \varepsilon\} \subset G.$$

Предположим, что в G_ε можно выбрать локальные координаты $x = (t, y) = (t_1, \ldots, t_i, y_1, \ldots, y_{i'})$ таким образом, что $t = (t, 0) \in \Gamma$ — локальные координаты на Γ, а $y=(y_1, \ldots, y_{i'})$ — координаты точек в ортогональном сечении области G_ε в i'-мерном шаре $\{ y \in \mathbb{R}^{i'} : |y| < \varepsilon\}$. Таким образом, $G_\varepsilon = \Gamma \times \times \{|y| < \varepsilon\}$. Пусть в G_ε мера $dx = dy\,dt$, где dy — мера Лебега в шаре $\{|y| < \varepsilon\}$, а dt — мера на Γ и $\int_\Gamma dt < \infty$.

Введем понятие системы Дирихле порядка r на i-мерном многообразии Γ. Примером такой системы является

$$\{ D_y^\alpha : |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{i'} \leq r-1 \}, \tag{12}$$

где все мультииндексы различны.

Определение. *Система линейных дифференциальных выражений на*

$$\{ T_\gamma : |\gamma| \leq r-1,\ \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{i'})\} \tag{13}$$

называется системой Дирихле порядка r, *если:* 1) *все мультииндексы* $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{i'})$ *различны;* 2) *для каждого выражения* T_γ *справедливо представление*

$$T_\gamma = \sum_{|\delta| \leq |\gamma|} \Lambda_{\gamma\delta}(t, y, D_i) D_y^\delta, \quad \delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{i'}), \tag{14}$$

где $\Lambda_{\gamma,\delta}$ — *линейные дифференциальные выражения порядков* $\leq |\gamma| - |\delta|$ *и*

$$\det \Lambda_{\gamma\delta}(t, y) \neq 0, \qquad |\gamma| = |\delta|. \tag{15}$$

Приведенное определение является естественным обобщением понятия системы Дирихле в смысле Ароншайна – Мильграма – Шехтера на $(n-1)$-мерном многообразии (см., например, [5], гл. 3, п. 6; [6], ч. II; [7], гл. 5).

Поскольку матрицы $\Lambda_{\gamma\delta}(t, y)$, $|\gamma| = |\delta|$ неособенные, то система (14) имеет, в определенном смысле, треугольную форму. Это позволяет последовательно выразить D_y^δ через T_γ:

$$D_y^\delta = \sum_{|\gamma| \leq |\delta|} \Lambda'_{\gamma\delta}(t, y, D_i) T_\gamma. \tag{16}$$

Здесь $\Lambda'_{\gamma\delta}$ — тангенциальные выражения порядков не выше $|\delta| - |\gamma|$, а $\det \Lambda'_{\gamma\delta} \neq 0$, $|\delta| = |\gamma|$. Из (14) и (16) следует, что каждая система Дирихле на Γ порядка r выражается через любую другую по формулам вида (14), (16).

Напомним, что в (3) выражения $\{B_{rk}(x, D) : r = 1, \ldots, m_k\}$ образуют системы Дирихле порядков $2m - i'_k + 1$, $k = 1, \ldots, \bar{k}$.

7. Исследование разрешимости задачи (1)–(3). Продолжим рассмотрение п. 5. Предположим, для простоты, что дефект задачи (1), (2) отсутствует.

7.1. Пусть вначале $s < 1/p$, $F \in K^{s,p}$. В этом случае $S\tilde{H}^{s,p} = F^{s,p}$ и все компоненты вектора (6) не зависят от u_0 (см. п. 3). Тогда $(f, \varphi) \in K'_{s,p}$ и $A'^{-1}(f, \varphi) = (u_0, u_1, \ldots, u_{2m})$ определяет первые $2m+1$ компонент вектора (6). Остальные компоненты найдем, решая систему (3) или (10). Из рассмотрений п. 6 следует, что решение $\{u_{\alpha k}\}$ существует, единственно и непрерывно зависит от $\{\varphi_{rk}\}$. Поэтому оператор $A = A_{s,p}$ осуществляет изоморфизм $\tilde{H}^{s,p} \to K^{s,p}$, $p \in (1, \infty)$, $s < 1/p$. При $s_1 < s$ оператор $A_{s_1,p}$ является расширением по непрерывности оператора $A_{s,p}$. Поэтому, если $u \in \tilde{H}^{s_1,p}$ и $Au \in K^{s,p}$, то $u \in \tilde{H}^{s,p}$, $s_1 < s < 1/p$, т. е. справедливо утверждение о глобальном повышении гладкости обобщенных решений задачи (1)–(3).

7.2. Пусть теперь $s > 2m - 1/p' = 2m - 1 + 1/p$. Тогда (см. п. 3) все компоненты вектора (6) определяются первой компонентой:

$$u_j = D_\nu^{j-1} u_0 \,|_{\Gamma_0} \quad (j = 1, \ldots, 2m),$$

$$D_\nu^\alpha u_0 \,|_{\Gamma_k} = u_{\alpha k}, \quad k = 1, \ldots, \bar{k}, \quad |\alpha| \le 2m - i'_k.$$

Поэтому, решая задачу (1), (2), находим, что $(u_0, u_1, \ldots, u_{2m}) = A'^{-1}(f, \varphi) \in \tilde{H}^{s,p,(2m)}$ и $u_0 \in H^{s,p}(G)$, а значит, элементы (f, φ) полностью определяют функцию u_0, и следовательно, правые части (3):

$$\varphi_{rk} = B_{rk} u_0 \,|_{\Gamma_k} = B_{rk}\Big(\big(A'^{-1}(f, \varphi)\,|_{\bar{G}}\big)\Big|_{\Gamma_k}\Big), \quad k = 1, \ldots, \bar{k}, \; r = 1, \ldots, m_k, \quad (17)$$

при которых задача (1)–(3) имеет решение $u \in \tilde{H}^{s,p}$; т. е. для разрешимости задачи (1)–(3) в $\tilde{H}^{s,p}$ с $F \in K^{s,p}$ необходимо и достаточно, чтобы правые части (3) определенным образом выражались через правые части (1), (2). Условия (17) — естественные условия согласования, необходимые и достаточные для разрешимости в $\tilde{H}^{s,p}$ задачи (1)–(3) с $F \in K^{s,p}$, $s > 2m - 1/p'$, $1 < p < \infty$.

Пусть $F \in K^{s,p}$, $s > 2m - 1/p'$. Тогда, конечно, $F \in K^{0,p}$ и из изложенного в п. 7.1 следует существование и единственное решение $u \in \tilde{H}^{0,p}$ задачи (1)–(3). Однако это решение не принадлежит $\tilde{H}^{s,p}$, если не выполнены условия согласования (17). Если же $u \in \tilde{H}^{s,p}$, $s > 2m - 1/p'$, решение задачи (1)–(3) и $F \in K^{s_1,p_1}$, $s_1 \ge s$, $p_1 \ge p$, то условия согласования выполнены, и следовательно, $u \in \tilde{H}^{s_1,p_1}$.

7.3. Пусть $F \in K^{s,p}$, $1/p \le s \le 2m - 1/p'$. Если $u \in \tilde{H}^{s,p}$ — решение задачи (1)–(3), то (см. п. 3)

$$u_j = D_\nu^{j-1} u_0 \,|_{\partial G}$$

для всех

$$j: \; s - j + 1 - 1/p > 0, \quad D_\nu^\alpha u_0 \,|_{\Gamma_k} = u_{\alpha k}, \quad s - |\alpha| - i'_k/p > 0.$$

Решив задачу (1), (2), найдем $u_0 = A'^{-1}(f, \varphi)\,|_{\bar{G}}$, поэтому для разрешимости в $\tilde{H}^{s,p}$ задачи (1)–(3) необходимо, чтобы выполнялись условия согласования

$$\varphi_{rk} = B_{rk} u_0 \,|_{\Gamma_k} = B_{rk}\Big(\big(A'^{-1}(f, \varphi)\,|_{\bar{G}}\big)\Big|_{\Gamma_k}\Big), \quad s - q_{rk} - i'_k/p > 0, \qquad (18)$$

Эти условия также и достаточные для разрешимости в $\tilde{H}^{s,p}$ задачи (1)–(3). Действительно, поскольку для каждого $k \in \{1, \ldots, \bar{k}\}$ выражения $\{B_{rk}: s - q_{rk} - i'_k/p > 0\}$ образуют систему Дирихле, отображение

$$\{u_{\alpha k}: s - |\alpha| - i'_k/p > 0\} \to \{\varphi_{rk}: s - q_{rk} - i'_k/p > 0\},$$

задаваемое условиями согласования (18), взаимно однозначно. Поэтому система (10) позволяет найти остальные компоненты вектора (8).

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $s \in \mathbb{R}$, $p \in (1, \infty)$, $F \in K^{s,p}$ *и дефект задачи* (1), (2) *отсутствует. Тогда для разрешимости в* $\tilde{H}^{s,p}$ *задачи* (1)–(3) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия согласования* (17), *если* $s > 2m - 1/p$; *условия согласования* (18) *при* $1/p \le s \le 2m - 1/p'$. *Если* $s < 1/p$, *то задача* (1)–(3) *всегда разрешима: оператор* $A_{s,p}$ *осуществляет изоморфизм* $\tilde{H}^{s,p} \to$ $\to K^{s,p}$.

В случае наличия дефекта у задачи (1), (2) $(N(A') \ne 0,\ N^*(A') = 0)$ оператор $A_{s,p}$ лишь нетеров. Вектор (f, φ) надо выбирать ортогональным к коядру задачи (1), (2), тогда задача (1), (2) имеет решение — единственное в фактор-пространстве $\tilde{H}^{s,p,(2m)}/N$. Это позволяет повторить рассуждения пп. 7.1–7.3 и в этом случае.

8. Рассмотрим в этом пункте, для простоты, задачу (1)–(3) с $k = 1$; $\Gamma_i = \Gamma$ — i-мерное замкнутое бесконечно гладкое многообразие, $i' = n - 1$ — коразмерность Γ. Пусть $s < 2m - i'/p$, $F \in K^{s,p}$. Тогда $f \in H^{s-2m,p}(G)$ может быть сосредоточенным на Γ.

Поставим следующий вопрос: нельзя ли к f прибавить такой элемент $f_0 \in$ $\in H^{s-2m,p}(G)$, сосредоточенный на Γ, чтобы для вектора $\tilde{F} = (f + f_0, \varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_m, \{\varphi_{r1}\}) \in K^{s,p}$ выполнялись условия согласования? Ниже будет дан положительный ответ на этот вопрос. Отметим, что $f + f_0$ совпадает с f внутри G: если $v \in C_0^\infty(G)$, то $(f + f_0, v) = (f, v)$. Для простоты, будем снова предполагать, что дефект задачи (1), (2) равен нулю. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма (ср. [6], III; [7], гл. 6). *Отличный от нуля элемент* $g \in H^{t,p}(G)$ *сосредоточен на* Γ *в том и только в том случае, когда* $t < -i'/p'$ *и существуют элементы* $w_\mu \in B^{s+|\mu|+i'/p',p}(\Gamma)$ $(|\mu| \le \chi_1 = [-t - i'/p']^-$, $[\tau]^-$ — *наибольшее целое, меньшее* τ) *такие, что*

$$g = \sum_{|\mu| \le \chi_1} D_y^\mu (w_\mu \times \delta(\Gamma)); \tag{19}$$

здесь по определению $\delta(\Gamma)$:

$$(g, v) = \sum_{|\mu| \le \chi_1} \left\langle w_\mu, D_y^\mu v \right\rangle_\Gamma, \quad v \in C^\infty(\overline{G}).$$

При этом существует постоянная $c > 0$ *такая, что*

$$c^{-1} \| g \|_{s,p} \le \sum_{|\mu| \le \chi_1} \langle\langle w_\mu, \Gamma \rangle\rangle_{s+|\mu|+i'/p',p} \le c \| g \|_{s,p}.$$

Пусть теперь $f_0 \in H^{s-2m,p}(G)$, $s < 2m - i'/p'$, сосредоточен на Γ. Тогда по лемме

$$f_0 = \sum_{|\mu| \le \chi} D_y^\mu (w_\mu \times \delta(\Gamma)), \quad \chi = [-s + 2m - i'/p']^-,$$

$$w_\mu \in B^{s-2m+|\mu|+i'/p',p}(\Gamma). \tag{20}$$

Обозначим через

$$R(w_\mu; x) \in \tilde{H}^{s,p,(2m)}(G), \ s < 2m - i'/p',$$

решение задачи

$$L(x, D)\, R(w_\mu; x) = D_y^\mu\big(w_\mu \times \delta(\Gamma)\big) \in H^{s-2m,\,p}(G),$$
$$B_j\, R(w_\mu; x)|_{\Gamma_0} = 0, \quad j = 1, \dots, m. \tag{21}$$

По теореме о локальном повышении гладкости [4–8] $R(w_\mu, x) \in C^\infty(\overline{G} \setminus \Gamma)$ и, кроме того,

$$D_y^\alpha R(w_\mu; x)|_\Gamma \in B^{s-|\alpha|+i'/p,\,p}(\Gamma), \quad |\alpha| < s - i'/p.$$

Итак, по вектору

$$w = \big(w_\mu\colon |\mu| \le \chi = [2m - s - i'/p]^-,\ w_\mu \in B^{s-2m+|\mu|+i'/p',\,p}(\Gamma)\big),$$

строим вектор $R = (R(w_\mu, x)\colon |\mu| \le \chi)$. По вектору R строим матрицу

$$V_{\alpha\mu} = D_y^\alpha R(w_\mu, x)|_\Gamma \in B^{s-|\alpha|+i'/p,\,p}(\Gamma), \quad |\mu| \le \chi, \quad \alpha\colon s - |\alpha| - i'/p > 0.$$

Оператор $P_{\alpha\mu}\colon w_\mu \to V_{\alpha\mu}$ непрерывно действует из $B^{s-2m+|\mu|+i'/p',\,p}(\Gamma)$ в $B^{s-|\alpha|+i'/p,\,p}(\Gamma)$. Поэтому отображение

$$P\colon w \to V = \left(V_\alpha = \sum_{|\mu| \le \chi} V_{\alpha\mu}\colon |\alpha| < s - i'/p\right)$$

непрерывно действует в паре пространств

$$\Pi_{|\mu| \le \chi} B^{s-2m+|\mu|+i'/p',\,p}(\Gamma) \to \Pi_{|\alpha| < s - i'_k/p} B^{s-|\alpha|+i'/p,\,p}(\Gamma). \tag{22}$$

Функция

$$u(x) = \sum_{|\mu| \le \chi} R(\mu, x)|_G \in H^{s,\,p}(G) \tag{23}$$

принадлежит $C^\infty(\overline{G} \setminus \Gamma)$ и удовлетворяет задаче

$$L(x, D)\, u = 0 \ (\text{в } G \setminus \Gamma), \quad B_j\, u|_{\Gamma_0} = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$
$$D_y^\alpha u|_{\Gamma_0} = V_\alpha, \quad |\alpha| < s - i'/p. \tag{24}$$

Поскольку задача (24) эллиптическая [1, 2] и каждое ее решение представляется в виде (23), множество значений отображения (21) дает все те значения

$$V \in \prod_{|\alpha| < s - i'/p} B^{s-|\alpha|+i'/p,\,p}(\Gamma),$$

для которых задача (24) разрешима; каждое решение задачи (24) порождается решением $u \in \tilde{H}^{s,\,p,\,(sm)}(G)$ задачи (21) с правой частью, сосредоточенной на Γ.

Рассмотрим теперь эллиптическую задачу (1)–(3) с

$$\bar{k} = 1, \quad F \in K^{s,\,p}, \quad s - 2m < i'/p', \quad \chi = [-s + 2m - i'/p']^-,$$

$\{B_{r\,1}\}$ — система Дирихле на Γ порядка $[s - i'/p]^- + 1$. Покажем, что к f можно прибавить одну и только одну функцию f_0 (21), сосредоточенную на Γ, для того чтобы задача (1)–(3) с $f + f_0$ вместо f имела одно и только одно решение $u \in \tilde{H}^{s,\,p}$.

Действительно, пусть $u' = (u_0, u_1, \ldots, u_{2m}) \in \tilde{H}^{s,p,(2m)}$ — решение задачи (1), (2). Тогда, положив $w = u - u'$, сведем задачу (1)–(3) к задаче

$$Lw = 0, \quad B_j u|_{\Gamma_0} = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$B_{r1} w|_{\Gamma} = \varphi_{r1} - B_{r1} u' = \varphi'_{r1} \in B^{s-q_1+i'/p,p}(\Gamma), \quad r = 1, \ldots, m_1.$$

Поскольку выражения $\{B_{rk}(x, D)\}$ образуют систему Дирихле, последняя задача эквивалентна задаче вида (24) мы получаем искомое утверждение. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если* $1/p < s < 2m - i'/p$, *то можно к правой части* f *в* (1) *прибавить такую функцию* f_0, *сосредоточенную на* Γ, *чтобы условия согласования автоматически выполнялись и задача* (1)–(3) *с* $f + f_0$ *вместо* f *была однозначно разрешимой в* $\tilde{H}^{s,p}$.

Аналогичное утверждение справедливо и тогда, когда задача (1), (2) лишь нетерова. В этом случае задача (1)–(3) также нетерова.

Приведем пример С. Л. Соболева [1, с. 114]. В области $G = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < |x| < 1\}$ рассматривается задача

$$\Delta^2 u = 0 \ (\text{в } G), \quad u|_{|X|=1} = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{|X|} = 0, \quad u(0) = 1,$$

Δ — оператор Лапласа. Функция $u = (1 - |x|^2)$ является единственным решением из $H^{2,2}(G)$ рассматриваемой задачи, при этом $u \notin H^{3,2}(G)$. Легко проверить, что в $G \cup \{0\}$ имеем $\Delta^2 u = 4\pi\delta \in H^{-3/2-\varepsilon,2}(G)$, здесь δ — мера Дирака, сосредоточенная в точке 0, $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым. Поэтому $u \in H^{5/2-\varepsilon,2}(G)$. Для того чтобы получить более гладкое решение, надо потребовать, чтобы выполнялись условия согласования $u(0) = 0$. Тогда $u \equiv 0$.

Результаты [2] также согласуются с приведенными в этом пункте утверждениями.

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Изд-во Ленингр. ун-та, 1950. – 255 с.
2. *Стернин Б. Ю.* Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1966. – **15**. – С. 346–382
3. *Стернин Б. Ю.* Относительная эллиптическая теория и проблема С. Л. Соболева // Докл. АН СССР. – 1976. – **230**, № 2. – С. 287–290.
4. *Ройтберг Я. А.* Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений // Там же. – 1964. – **157**, № 4. – С. 798–801.
5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
6. *Ройтберг Я. А.* Эллиптические граничные задачи в обобщенных функциях, I–IV. – Чернигов: Чернигов. пед. ин-т; I. – 1990. – 75 с.; II. – 1990. – 84 с.; III. – 1991. – 125 с.; IV . – 1991. – 131 с.
7. *Roithberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. – (to appear).
8. *Ройтберг Я. А.* О значениях на границе области обобщенных решений эллиптических уравнений // Мат. сб. – 1971. – **86** (128), № 2 (10). – С. 246–267.

Получено 26.12.95