УДК 517.9

В. Д. Кошманенко (Ін-т математики НАН України, Київ),
Ш. Ота (Ін-т дизайну, Фукуока, Японія)

ПРО ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ СИНГУЛЯРНИХ ОПЕРАТОРІВ

For a linear operator S in a Hilbert space $\mathcal{H}$, the mutual relations between the following properties are investigated: (1) S is singular (= nowhere closable); (2) the set $\ker S$ is dense in $\mathcal{H}$; (3) $\mathfrak{D}(S) \cap \mathfrak{R}(S) = \{0\}$.

Для лінійного оператора S в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ досліджується взаємозв'язок між наступними властивостями: 1) S є сингулярним (= ніде не замикальним); 2) множина $\ker S$ є щільною в $\mathcal{H}$; 3) $\mathfrak{D}(S) \cap \mathfrak{R}(S) = \{0\}$.

1. Вступ. Поняття сингулярного оператора (сингулярної квадратичної форми) введене в роботах [1–9]. За аналогією з розкладом міри на абсолютно неперервну та сингулярну частини відносно міри Лебега можна спробувати ввести розклад довільного лінійного оператора (квадратичної форми) в гільбертовому просторі на максимальну регулярну частину та її доповнення — сингулярну частину. У випадку, коли це вдається зробити, сингулярна компонента є ніде незамикальною і такий розклад єдиний. Крім того, можна дати внутрішнє визначення сингулярності оператора та квадратичної форми [8, 10].

В теорії збурень сингулярні об'єкти природно пов'язані з так званими нуль-потенціалами або точковими взаємодіями, які використовують у фізичних моделях (див. [11–13] та цитовану там літературу). Добре відома модель електрона Кроніга – Пенні у кристалічній гратці, де вивчається оператор Шредінгера з δ-потенціалом типу $-\Delta + \lambda\delta$. Вперше математичні підвалини для розв'язання такого типу проблем запропонували Ф. А. Березін і Л. Д. Фаддєєв [14]. З того часу одержано чимало результатів у цьому напрямі (див. цитовану літературу в [11]).

Дослідження сингулярних квадратичних форм і операторів у зв'язку з їх застосуваннями до теорії збурень можна знайти в [2, 3, 5–10, 15–19].

Ми досліджуємо тільки сингулярні оператори, а не форми.

У цій роботі всі оператори припускаються лінійними. Позначатимемо через $\mathfrak{D}(T)$ і $\mathfrak{R}(T)$ область визначення та відповідно область значень оператора T.

***Означення* 1.** *Щільно визначений оператор $T \neq 0$, що діє з гільбертового простору $\mathcal{K}$ у гільбертів простір $\mathcal{H}$, називається сингулярним, якщо для будь-якого елемента $\xi \in \mathfrak{D}(T)$ існує послідовність $\{\xi_n\}$ в $\mathfrak{D}(T)$ така, що $\xi_n \to \xi$ в $\mathcal{K}$ і $T\xi_n \to 0$ в $\mathcal{H}$, коли $n \to \infty$.*

Зауваження. **1.** Еквівалентно, оператор $T\colon \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ є сингулярним, якщо для кожного $\eta \in \mathfrak{R}(T)$ існує послідовність $\{\xi_n\}$ в $\mathfrak{D}(T)$ така, що $\xi_n \to 0$ в $\mathcal{K}$ і $T\xi_n \to \eta$ в $\mathcal{H}$, *коли* $n \to \infty$.

2. Якщо множина $\ker T \overset{\text{def}}{=} \{\varphi \in \mathfrak{D}(T) \mid T\varphi = 0\}$ щільна в $\mathcal{K}$, то T є сингулярним.

Ми досліджуємо сингулярні оператори в одному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком (f, g), що є лінійним відносно f та спряжено лінійним відносно g.

***Означення* 2.** *Сингулярний щільно визначений оператор $S\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ належить до класу $\mathfrak{S}(A)$, якщо існують самоспряжені оператори $A \geq 1$ і B в $\mathcal{H}$ такі, що S припускає факторизацію $S = B \cdot A$.*

Далі вважатимемо, що оператор A фіксований, а B — параметр для опису множини $\mathfrak{S}(A)$.

Зазначимо, що кожний $S \in \mathfrak{S}(A)$ можна вважати сингулярним оператором у парі гільбертових просторів у розумінні означення 1. Дійсно, можна покласти $\mathcal{K} = \mathfrak{D}(A)$ зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{K}} \overset{\text{def}}{=} (A\cdot, A\cdot)$. Навпаки, за деяких природних умов сингулярний (у розумінні означення 1) оператор $T\colon \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ можна розглядати як деякий оператор з класу $\mathfrak{S}(A)$. Дійсно, припустимо, що $\mathcal{K}$ є щільним в $\mathcal{H}$, а норми в $\mathcal{H}$ і $\mathcal{K}$ задовольняють умову $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} \le \|\cdot\|_{\mathcal{K}}$. Нехай A позначає канонічний ізометричний ізоморфізм з $\mathcal{K}$ в $\mathcal{H}$. Припустимо також, що $\overline{A}\cdot T$ є самоспряженим як оператор з $\mathcal{K}$ у спряжений простір $\mathcal{K}'$, де $\overline{A}$ позначає замикання A з $\mathcal{H}$ в $\mathcal{K}'$. Тоді $T \equiv S \in \mathfrak{S}(A)$, якщо покласти $B = T\cdot A^{-1}$.

Наведемо типовий приклад такого оператора з класу $\mathfrak{S}(A)$.

***Приклад* 1.** Нехай у гільбертовому просторі $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^1, dx)$ задано оператор A як оператор множення:

$$(Af)(x) = (1+x^2)f(x), \quad f \in \mathcal{H}.$$

Функція $g(x) = (1+x^2)^{-1}$ визначає самоспряжений оператор B рангу один виразом $Bf = (f, g)g$, $f \in \mathfrak{D}(B) \equiv \mathcal{H}$. Покладемо $S = B\cdot A$. Зрозуміло, що S належить до $\mathfrak{S}(A)$. Крім того, множина $\ker S$ є щільною в $\mathcal{H}$ і $\mathfrak{R}(S) \cap \mathfrak{D}(S) = \{0\}$. Дійсно, останнє співвідношення виконується, тому що $g \notin \mathfrak{D}(A) \equiv \mathfrak{D}(S)$, і множина $\ker S$ є щільною в $\mathcal{H}$, оскільки вона містить всі функції Шварца φ, що задовольняють умову $\tilde{\varphi}(0) = 0$, де $\tilde{\varphi}$ позначає перетворення Фур'є φ.

Наступне твердження узагальнює наведений вище приклад.

Твердження 1. *Нехай у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ самоспряжений оператор A задовольняє умову $A \ge 1$ і $B = B^*$ — оператор скінченного рангу в $\mathcal{H}$. Тоді $S = B\cdot A$ належить до класу $\mathfrak{S}(A)$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\mathfrak{R}(B) \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}. \tag{1}$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли $B = P_{\mathcal{N}}$ — ортогональний проектор на скінченновимірну лінійну підмножину $\mathcal{N}$ в $\mathcal{H}$. Покажемо, що

$$P_{\mathcal{N}}\cdot A \in \mathfrak{S}(A) \Leftrightarrow \mathcal{N} \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}. \tag{2}$$

З правої частини (2) випливає, що множина $\ker(P_{\mathcal{N}} A)$ збігається з $A^{-1}\mathcal{M}$, $\mathcal{M} := \mathcal{N}^{\perp}$, і, таким чином, є щільною в $\mathcal{H}$. Дійсно,

$$\{0\} = (\psi, A^{-1}\mathcal{M}) = (A^{-1}\psi, \mathcal{M})$$

означає, що $A^{-1}\psi \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathcal{N}$ і, крім того, $\psi = 0$. Навпаки, нехай $P_{\mathcal{N}} A \in \mathfrak{S}(A)$. Тоді для деякого $\eta = P_{\mathcal{N}} A\xi$ в $\mathcal{N} \cap \mathfrak{D}(A)$ згідно з зауваженням 1 існує послідовність $\{\xi_n\} \in \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(S)$ така, що $\xi_n \to 0$ і $P_{\mathcal{N}} A\xi_n \to \eta$. Отже,

$$(P_{\mathcal{N}} A\xi_n, \eta) = (A\xi_n, P_{\mathcal{N}} A\xi) = (\xi_n, AP_{\mathcal{N}} A\xi) \to 0$$

і

$$\| P_{\mathcal{N}} A\xi_n - \eta \| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Записуючи останнє співвідношення мовою форм:

$$\| P_{\mathcal{N}} A\xi_n \|^2 + \| \eta \|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(P_{\mathcal{N}} \cdot A\xi_n, \eta) \to 0,$$

одержуємо, що $\eta = 0$. Отже, для $B = P_{\mathcal{N}}$ (2) доведено.

Очевидно, для довільного оператора скінченного рангу B в $\mathcal{H}$ умова (1) еквівалентна правій частині (2), якщо покласти $\mathcal{N} = \mathcal{R}(B)$. Крім того, з (1) випливає, що множина $\ker S$ щільна в $\mathcal{H}$; тобто згідно з зауваженням 2 співвідношення (1) гарантує, що $S = B \cdot A \in \mathfrak{S}(A)$. Остаточно, оскільки $\dim \mathcal{N} < \infty$, збіжність $BA\xi_n$ еквівалентна збіжності $A\xi_n$. Звідси випливає, що умови $S \in \mathfrak{S}(A)$ і $P_{\mathcal{N}} \cdot A \in \mathfrak{S}(A)$ також еквівалентні між собою. Отже, $\mathcal{N} \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}$. Справедливе таке твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай $A = A^* \geq 1$ і $B = B^*$ — оператор скінченного рангу в $\mathcal{H}$. Якщо $S = B \cdot A$, то наступні умови еквівалентні між собою:*

1) *$S = B \cdot A$ належить до класу $\mathfrak{S}(A)$;*
2) *$\ker S$ щільна в $\mathcal{H}$;*
3) *$\mathcal{R}(S) \cap \mathfrak{D}(S) = \{0\}$.*

2. Опис класу $\mathfrak{S}(A)$. Нехай S — щільно визначений лінійний оператор у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ такий, що $S = B \cdot A$, де $A \geq 1$ і $B = B^*$. Припустимо, що B є обмеженим. Таким чином,

$$\mathfrak{D}(S) = \mathfrak{D}(A), \qquad \mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(B) \tag{3}$$

$$\ker S = A^{-1}(\mathcal{R}(B)^{\perp}), \tag{4}$$

оскільки $\ker B = \mathcal{R}(B)^{\perp}$.

***Означення* 3.** *Сингулярний оператор S в $\mathcal{H}$ має дві характеристичні властивості, якщо:*

1) *$\ker S$ щільне в $\mathcal{H}$ (перша характеристична властивість);*
2) *$\mathcal{R}(S) \cap \mathfrak{D}(S) = \{0\}$ (друга характеристична властивість).*

Дослідимо тепер зв'язок між характеристичними властивостями та умовою $S \in \mathfrak{S}(A)$.

Теорема 1. *Нехай $S = B \cdot A$ — оператор, що діє в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$; $A \geq 1$ і B — самоспряжені оператори в $\mathcal{H}$. Припустимо, що B є обмеженим і додатним та його область значень замкнена.*

Тоді наступні умови еквівалентні між собою:

1) *S належить до класу $\mathfrak{S}(A)$;*
2) *$\ker S$ щільна в $\mathcal{H}$;*
3) *$\mathcal{R}(S) \cap \mathfrak{D}(S) = \{0\}$.*

Доведення. Доведення проведемо у такій послідовності; (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). Припустимо спочатку, що виконується умова (1). Виберемо деякий вектор $\eta \in \mathcal{R}(S) \cap \mathfrak{D}(S)$. Тоді $\eta = S\xi$ для деякого $\xi \in \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(S)$. Згідно з зауваженням 1 існує послідовність $\{\xi_n\}$ в $\mathfrak{D}(S)$ така, що $\xi_n \to 0$ і $S\xi_n \to S\xi = \eta$. Оскільки

$$(S\xi_n, A\xi) = (BA\xi_n, A\xi) = (A\xi_n, BA\xi) = (\xi_n, A\eta),$$

то $(S\xi_n, A\xi) \to 0$, коли $\eta \to \infty$. З іншого боку, $(S\xi_n, A\xi) \to (\eta, A\xi) = (BA\eta, A\xi)$, тобто $(BA\eta, A\xi) = 0$. І тому що B додатний, $A\xi \in \ker B$. Таким чином, $\eta = S\xi = 0$, і отже, умова (3) виконується.

Припустимо тепер, що умова (3) виконується незалежно від умови (1). Візьмемо φ з $(\ker S)^{\perp}$. За рівністю (4) і припущенням, що $\mathcal{R}(B)$ є замкненою, випливає, що $A^{-1}\varphi$ належить до $\mathfrak{R}(B)$. Таким чином, $A^{-1}\varphi \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{R}(B) \equiv \equiv \mathfrak{D}(S) \cap \mathfrak{R}(S)$. Тому $A^{-1}\varphi = 0$ і $\varphi = 0$. Отже, множина $\ker S$ щільна в $\mathcal{H}$

Імплікацію (2) $\Rightarrow$ (1) встановлено.

Зауваження 3. Теорема 1 має місце і без виконання умови $B \geq 0$. Фактично, якщо B і $B^{-1} | \mathfrak{R}(B)$ обмежені, то (2) з $\mathcal{N} = \mathfrak{R}(B)$ також має місце, не зважаючи на те що розмірність підпростору $\mathcal{N}$ довільна.

Розглянемо випадок теореми 1 з можливо не обмеженим оператором B. Тоді $\mathfrak{D}(S) \subseteq \mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{R}(S) = \mathfrak{R}(B)$, і тому (4) виконується, оскільки B самоспряжений.

Твердження 2. *Нехай в* $\mathcal{H}$ *задано оператор* $S = B \cdot A$, *де* $A = A^* \geq 1$ *і* $B = B^* \geq 0$. *Якщо* S *належить до класу* $\mathfrak{S}(A)$, *то* $\mathfrak{R}(S) \cap \mathfrak{D}(S) = \{0\}$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 1 з незначною зміною: $\mathfrak{D}(S) \subseteq \subseteq \mathfrak{D}(A)$. Фактично, імплікація (1) $\Rightarrow$ (3) доведена в теоремі 1 без припущення, що B обмежений і $\mathfrak{R}(B)$ замкнена.

Таким чином, сингулярний оператор $S = B \cdot A$ з $A = A^* \geq 1$ і $B = B^* \geq 0$ завжди має другу характеристичну властивість.

Твердження 3. *Нехай в* $\mathcal{H}$ *задано оператор* $S = B \cdot A$, *де* $A = A^* \geq 1$ *і* $B = B^* \geq 0$. *Припустимо, що* $\mathfrak{R}(B)$ *замкнена. Якщо* $\mathfrak{R}(S) \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}$, *то множина* $\ker S$ *є щільною в* $\mathcal{H}$ *і* $S \in \mathfrak{S}(A)$.

Доведення. Розглянемо довільний $\varphi \in (\ker S)^{\perp}$. Оскільки множина $\ker S$ збігається з $A^{-1}(\ker B)$, то $(A^{-1}\varphi, \eta) = (\varphi, A^{-1}\eta) = 0$ для будь-якого $\eta \in \in \mathfrak{R}(B)^{\perp}$. Таким чином,

$$A^{-1}\varphi \in \overline{\mathfrak{R}(B)} \cap \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{R}(S) \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\},$$

Отже, $\varphi = 0$.

Замкненість $\mathfrak{R}(B)$ означає, що звуження B на підпростір $(\ker B)^{\perp}$ має обернений зворотний . У випадку, коли цього не припущено, справедливе наступне твердження.

Твердження 4. *Нехай в* $\mathcal{H}$ *задано оператор* $S = B \cdot A$, *де* $A = A^* \geq 1$ *і* $B = B^* \geq 0$. *Якщо*

$$\overline{\mathfrak{R}(S)} \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}, \tag{5}$$

то множина $\ker S$ *є щільною в* $\mathcal{H}$ *і* $S \in \mathfrak{S}(A)$.

Доведення. За доведенням твердження 3 $A^{-1}\varphi \in \overline{\mathfrak{R}(B)} \cap \mathfrak{D}(A)$. Останнє твердження випливає з рівності $\overline{\mathfrak{R}(B)} = \overline{\mathfrak{R}(S)}$.

***Наслідок* 2.** *Нехай задано* $S = B \cdot A$, *де* $A = A^* \geq 1$ *і* $B = B^* \geq 0$. *Якщо* S *задовольняє умову* (5), *то оператор* S *є сингулярним і має першу характеристичну властивість.*

Доведення. Перша характеристична властивість згідно з ([1], додаток) еквівалентна умові (5).

У наступному пункті наведено аналогічні результати в припущенні, що замкненість $\mathfrak{R}(B)$ має місце по відношенню до сильнішої топології, ніж в $\mathcal{H}$.

3. Належність S до класу $\mathfrak{S}(A)$. Розглянемо оператор $S = B \cdot A$ в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ у випадку, коли $A \geq 1$ — самоспряжений оператор в $\mathcal{H}$ і B — самоспряжений (можливо необмежений) оператор в $\mathcal{H}$ такий, що його область значень $\mathfrak{R}(B)$ співпадає з $\mathfrak{R}(S)$ і, взагалі кажучи, не замкнена.

Як зазначалося в п. 2, співвідношення (5) — достатня умова для $S \in \mathfrak{S}(A)$.

Мета цього пункту полягає в тому, щоб знайти додаткові умови, коли з

$$\mathcal{R}(S) \cap \mathcal{D}(A) = \{0\} \tag{6}$$

випливає (5).

Введемо деякі позначення. Для додатного числа l область $\mathcal{D}(A^l)$ оператора A^l оснащена скалярним добутком

$$(\xi, \eta)_{2l} \overset{\text{def}}{=} (A^l\xi, A^l\eta), \tag{7}$$

стає повним гільбертовим простором, який ми позначаємо через $\mathcal{H}_{2l}$. Зрозуміло, що оператор A^l з $\mathcal{H}_{2l}$ в $\mathcal{H}$ є унітарним.

Нехай існує число p, $0 < p < 1$, таке, що область значень $\mathcal{R}(S)$ належить $\mathcal{D}(A^p)$ і утворює замкнений підпростір в $\mathcal{H}_{2p}$. Покладемо $\mathcal{R}_0 \overset{\text{def}}{=} A^p\mathcal{R}(S)$. Тоді $\mathcal{R}_0$ — замкнений підпростір $\mathcal{H}$, оскільки A^p — унітарний оператор з $\mathcal{H}_{2p}$ до $\mathcal{H}$. Тепер ми можемо сформулювати головний результат роботи.

Теорема 2. *Нехай $S = B \cdot A$ — оператор, що діє в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$; B і A — самоспряжені оператори в $\mathcal{H}$; $\mathcal{R}(S) \cap \mathcal{D}(A) = \{0\}$ і для деякого числа p, $0 < p < 1$, область значень $\mathcal{R}(S)$ належить $\mathcal{D}(A^p)$ і замкнена в $\mathcal{H}_{2p}$. Припустимо, що*

$$P_0\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}_0, \tag{8}$$

де P_0 означає ортогональне проектування $\mathcal{H}$ на $\mathcal{R}_0$.

Тоді виконується співвідношення (5) *і множина* $\ker S$ *щільна в $\mathcal{H}$, а отже, S належить класу $\mathfrak{S}(A)$.*

Нагадаємо деякі відомі факти відносно оснащеного гільбертового простору [20, 21].

Нехай A — самоспряжений оператор в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, що задовольняє умову $A \geq 1$. Введемо шкалу гільбертових просторів, пов'язану з A:

$$\{\mathcal{H}_l\}_{l \in \mathbb{R}} = \{\ldots \supset \mathcal{H}_{-l} \supset \ldots \supset \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} \supset \ldots \supset \mathcal{H}_l \supset \ldots\},$$

де $\mathcal{H}_l \equiv \mathcal{D}(A^{l/2})$ — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\xi, \eta)_l \overset{\text{def}}{=} (A^{l/2}\xi, A^{l/2}\eta)$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}_l$, а $\mathcal{H}_{-l}$ — замикання $\mathcal{H}$ в нормі $\|\varphi\|_{-l} \overset{\text{def}}{=} \|A^{-l/2}\varphi\|$, $\varphi \in \mathcal{H}$. За побудовою для кожного $l > 0$

$$\|\cdot\|_{-l} \leq \|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_l$$

і кожна трійка $\{\mathcal{H}_{-l}, \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H}, \mathcal{H}_l\}$ утворює оснащений гільбертів простір $\mathcal{H}_{-l} \supset \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_l$. Це означає, зокрема, що $\mathcal{H}_l$ і $\mathcal{H}_{-l}$ взаємно спряжені. Ясно, що відображення $A^{l/2}$: $\mathcal{H}_l \to \mathcal{H}_0$ унітарне, а відображення $A^{l/2}$: $\mathcal{D}(A^{l/2}) \to \mathcal{H}_{-l}$, як оператор з $\mathcal{H}_0$ до $\mathcal{H}_{-l}$, ізометричне, і ми пишемо $\overline{A^{l/2}}$ для його замикання, яке є, очевидно, унітарним. Якщо значення $l > 0$ не суттєве, то ми будемо позначати введену вище трійку $\{\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H}, \mathcal{H}_+\}$ і записувати $D_{0,+}$: $\mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_0$ і $D_{-,0}$: $\mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_-$ для $A^{l/2}$ і $\overline{A^{l/2}}$ відповідно. Покладемо

$$D \overset{\text{def}}{=} D_{-,0} \cdot D_{0,+}: \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-, \qquad I \overset{\text{def}}{=} D^{-1}: \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_+.$$

Ясно, що канонічні ізоморфізми D і I унітарні. Позначаємо $[\cdot, \cdot]_{-,+}$ для так званого дуального скалярного добутку між $\mathcal{H}_-$ і $\mathcal{H}_+$. Нехай $(\cdot,\cdot)_+$ і $(\cdot,\cdot)_-$ позначають скалярні добутки в $\mathcal{H}_+$ і $\mathcal{H}_-$ відповідно. Тоді відомо [20, 21], що

$$[\omega,\varphi]_{-,+} = (\omega, D\varphi)_- = (I\omega,\varphi)_+, \quad \omega\in\mathcal{H}_-, \quad \varphi\in\mathcal{H}_+,$$

і

$$[f,\varphi]_{-,+} = (f,\varphi), \quad f\in\mathcal{H}_0, \quad \varphi\in\mathcal{H}_+. \tag{9}$$

Лема 1. *Нехай трійка* $\{\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_+\}$ *— оснащений гільбертів простір,* $\mathcal{H}_+ = \mathcal{L}\oplus\mathcal{R}$, $\mathcal{R}\neq\{0\}$, *— деякий ортогональний розклад простору* $\mathcal{H}_+$. *Припустимо, що*

$$\mathcal{R}_0 \equiv D_{0,+}\mathcal{R} = P_0\mathcal{R}, \tag{10}$$

де P_0 *означає ортогональне проектування в* $\mathcal{H}_0$ *на* $\mathcal{R}_0$. *Тоді* $\overline{\mathcal{R}}\cap\mathcal{H}_+ = \mathcal{R}$, *де* $\overline{\mathcal{R}}$ *— замикання* $\mathcal{R}$ *в* $\mathcal{H}_0$.

Доведення. Припустимо, що $\overline{\mathcal{R}}\cap\mathcal{H}_+\neq\mathcal{R}$. Тоді існує деякий відмінний від нульового вектор φ в $(\overline{\mathcal{R}}\setminus\mathcal{R})\cap\mathcal{H}_+$. У відповідності з припущенням (10) існує φ_+ в $\mathcal{R}$ такий, що $P_0\varphi_+ = P_0\varphi$. Покладемо $\varphi_-\equiv\varphi-\varphi_+$. Тоді $\varphi_-\in D_{0,+}\mathcal{L}$, $\varphi_-\in\overline{\mathcal{R}}\setminus\mathcal{R}$. Отже, існує послідовність $\{\varphi_n\}$ в $\mathcal{R}$ така, що $\varphi_n\to\varphi_-$ в $\mathcal{H}_0$. Визначимо послідовність $\{\psi_n\}$: $\psi_n \overset{\text{def}}{=} D_{0,+}\varphi_n$. Тоді внаслідок $D_{-,0} = \overline{D_{0,+}}$ і унітарності $D_{-,0}$ послідовність ψ_n збігається в $\mathcal{H}_-$ до $D_{-,0}\varphi_-$. Завдяки $\varphi_-\in\mathcal{H}_+$ з використанням (9) маємо

$$(\psi_n,\varphi_-) = [\psi_n,\varphi_-]_{-,+} \to [D_{-,0}\varphi_-,\varphi_-]_{-,+} = (D_{0,+}\varphi_-,\varphi_-).$$

Оскільки $D_{0,+}\mathcal{R}$ ортогональний до $D_{0,+}\mathcal{L}$ в $\mathcal{H}_0$ і $D_{0,+}$ строго додатний, $D_{0,+}\geq 1$, як оператор в $\mathcal{H}_0$, то $\varphi_- = 0$. Отже, $\varphi\in\mathcal{R}$. Суперечність. Таким чином, лему доведено.

Доведення *теореми* 2. Порівняємо (10) з (8). Як легко бачити з леми 1, $\overline{\mathcal{R}(S)}\cap\mathcal{H}_{2p} = \mathcal{R}(S)$. З іншого боку, $\mathfrak{D}(A)\subset\mathcal{H}_{2p}$ для будь-якого $0<p<1$. Отже, у відповідності з припущенням (2) маємо $\overline{\mathcal{R}(S)}\cap\mathfrak{D}(A) = \{0\}$; тобто (3) виконується. Тому за твердженням 4 множина $\ker S$ щільна в $\mathcal{H}$ і S належить класу $\mathfrak{S}(A)$.

4. Застосування. Спочатку наведемо деякий підготовчий матеріал з теорії сингулярних збурень. Для більш детальної інформації див. [10].

***Означення* 4.** *Пара самоспряжених операторів* A *та* $\tilde{A}$, $A\neq\tilde{A}$, *в просторі Гільберта* $\mathcal{H}$ *називається взаємно (один по відношенню до другого) сингулярно збуреною, якщо множина*

$$\mathfrak{D} \overset{\text{def}}{=} \{f\in\mathfrak{D}(A)\cap\mathfrak{D}(\tilde{A}) \mid Af = \tilde{A}f\} \tag{11}$$

щільна в $\mathcal{H}$. *Якщо, крім того,* A *і* $\tilde{A}$ *мають зворотні і* A^{-1} *обмежений, то пишемо* $A\in\mathcal{A}_s(A)$.

Нехай $\tilde{A}\in\mathcal{A}_s(A)$. Зрозуміло, що

$$\dot{A} \overset{\text{def}}{=} A\,|\,\mathfrak{D} = \tilde{A}\,|\,\mathfrak{D} \tag{12}$$

— замкнений симетричний оператор в $\mathcal{H}$. Таким чином, A і $\tilde{A}$ — різні самоспряжені розширення $\dot{A}$. У відповідності з теорією сингулярних збурень [5–7, 10, 16–18] кожний оператор $\tilde{A}\in\mathcal{A}_s(A)$ можна розглядати як збурення A

деякою сингулярною квадратичною формою γ. Крім того, при деяких умовах на γ існує взаємно однозначна відповідність між $\tilde{A}$ і γ.

Далі одержимо аналогічний результат із заміною квадратичної форми γ на оператор S; тобто покажемо, що кожний $\tilde{A} \in \mathcal{A}_s(A)$ — взаємно однозначно пов'язаний з деяким сингулярним оператором $S \in \mathfrak{S}(A)$.

Припускаємо, що $A \geq 1$. Нехай $\mathcal{H}_+ = \mathfrak{D}(A)$ зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_+ = (A\cdot, A\cdot)$ і $\mathcal{H}_-$ — поповнення $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ відносно скалярного добутку $(\cdot, \cdot)_- := (A^{-1}\cdot, A^{-1}\cdot)$. Тоді $\{\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_+\}$ утворює оснащений гільбертів простір і відображення $A: \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_0$ унітарне. Розглянемо деякий розклад $\mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \oplus \mathcal{N}_+$. Тоді $\mathcal{H}_0 = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{N}_0$, де $\mathcal{M}_0 = A\mathcal{M}_+$ і $\mathcal{N}_0 = A\mathcal{N}_+$. Наступне твердження [1] дає критерій для характеристичних властивостей оператора $S = B \cdot A$ у випадку, коли $\mathfrak{R}(B) = \mathcal{N}_0$.

Твердження 5. *Замкнений підпростір $\mathcal{M}_+$ в $\mathcal{H}_+ = \mathfrak{D}(A)$ є щільним в $\mathcal{H}_0$ тоді і тільки тоді, коли підпростір $\mathcal{N}_0 = A\mathcal{N}_+$ $(\mathcal{N}_+ = \mathcal{H}_+ \ominus \mathcal{M}_+)$ має нуль в перетині з $\mathcal{H}_+$.*

Тепер ми можемо довести важливий результат, що має деяке застосування.

Теорема 3. *Нехай $S = B \cdot A$ — сингулярний оператор з $\mathfrak{S}(A)$. Припустимо, що S має дві характеристичні властивості, а саме:*

$$\ker S \quad \textit{щільне в} \quad \mathcal{H}; \qquad \mathfrak{R}(S) \cap \mathfrak{D}(S) = \{0\}. \tag{13}$$

Тоді оператор $\tilde{A}$, заданий формулою

$$\tilde{A}^{-1} = A^{-1} + B_0^{-1} \cdot P_0, \tag{14}$$

де $B_0 := B \mid \mathcal{N}_0$, $\mathcal{N}_0 = (\ker B)^{\perp}$ і P_0 — ортогональний проектор на $\mathcal{N}_0$, належить класу $\mathcal{A}_s(A)$. Навпаки, кожний оператор $\tilde{A} \in \mathcal{A}_s(A)$ визначає різницею $\tilde{A}^{-1} - A^{-1}$ сингулярний оператор $S \in \mathfrak{S}(A)$, який має характеристичні властивості (13). *Рівняння* (14) *встановлює взаємно однозначну відповідність між $\tilde{A}$ і $S = B \cdot A$ з властивостями* (13).

Доведення. Нехай $S \in \mathfrak{S}(A)$ і припустимо, що S задовольняє (13). За означенням 2 $S = B \cdot A$, де B — самоспряжений оператор в $\mathcal{H}_0$. Тому замкнений підпростір $\mathcal{M}_0 := \ker B$ в $\mathcal{H}$ співпадає з $A\mathcal{M}_+$, де $\mathcal{M}_+ = \ker S$ — замкнений підпростір в $\mathcal{H}_+$. Покладемо $B_0 = B \mid \mathcal{N}_0$, де $\mathcal{N}_0 = \mathcal{M}_0^{\perp}$ в $\mathcal{H}_0$. Тоді це — самоспряжений оборотний оператор в $\mathcal{N}_0$. Тепер самоспряжений оператор $\tilde{A}^{-1}$ можна подати формулою (14). Покажемо, що $\tilde{A}^{-1}$ оборотний. Дійсно, $A^{-1}h = -B_0^{-1}P_0 h$ справедливе, тільки якщо $h = 0$, тому $\mathfrak{D}(A) = \mathcal{H}_+$ має нульовий перетин з $\mathfrak{D}(B_0) \subset \mathcal{N}_0$ завдяки умові, що множина $\ker S = \mathcal{M}_+$ щільна в $\mathcal{H}_0$ (див. твердження 5). Таким чином, $\tilde{A} := \left(\tilde{A}^{-1}\right)^{-1}$ належить $\mathcal{A}_s(A)$, оскільки $\tilde{A}$ і A співпадають на $\mathfrak{D} := \mathcal{M}_+$.

Навпаки, беручи $\tilde{A} \in \mathcal{A}_s(A)$, розглядаємо різницю $\tilde{A}^{-1} - A^{-1}$. За означенням 4 це — самоспряжений оператор в $\mathcal{H}_0$, який є нулем на $\mathcal{M}_0 := \mathfrak{D}$ (див. (11)). За означенням множина $\mathfrak{D}$ є максимальною, на ній A і $\tilde{A}$ збігаються. Тому для оператора $B_0^{-1} := \left(\tilde{A}^{-1} - A^{-1}\right) \Big| \mathcal{N}_0$ $\left(\mathcal{N}_0 = \mathcal{M}_0^{\perp}\right)$ його нуль-множина порожня. Таким чином, ми можемо визначити $B_0 := \left(B_0^{-1}\right)^{-1}$, а також $B := 0 \oplus B_0$, де нуль позначає ортогональну компоненту, відповідну підпростору

$\mathcal{M}_0$. Ми стверджуємо, що оператор $S = B \cdot A$ належить класу $\mathfrak{S}(A)$ і має дві характеристичні властивості. Дійсно, за побудовою область значень $\mathcal{R}(B)$ міститься в $\mathcal{N}_0$ і має нульовий перетин з $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_+$, оскільки $\mathcal{D} = \mathcal{M}_+$ щільне в $\mathcal{H}_0$ (див. твердження 12). Ясно, що $\ker S = \mathcal{D}$, тому $A\mathcal{D} = \mathcal{M}_0$. Отже, обидві рівності з (13) виконуються, і $\tilde{A}$ припускає зображення (14).

Тепер ми розширимо проведену побудову на випадок, коли незбурений оператор A в $\mathcal{H}$ замінено на самоспряжений оператор L зі щілиною в спектрі. Припускаємо, що L необмежений, але L^{-1} існує і обмежений. Крім того, без втрати загальності, можна припустити, що інтервал $(-1, 1)$ належить множині регулярних точок L, тобто абсолютне значення L задовольняє умову $|L| \geq 1$.

Введемо оснащений гільбертів простір, асоційований з L: $\{\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H}, \mathcal{H}_+\}$, де $\mathcal{H}_+ = \mathcal{D}(L)$ з нормою $\|\cdot\|_+ = \|L\cdot\|$, а $\mathcal{H}_-$ — поповнення $\mathcal{H}$ за нормою $\|\cdot\|_- = \|L^{-1}\cdot\|$. Покладемо $A = D_{0,+} : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_0$, де $D_{0,+}$ означає канонічний ізоморфізм (див. п. 3). Ясно, що A збігається з абсолютною величиною $|L|$ в $\mathcal{H}_0$, оскільки $\|\cdot\|_+ = \|L\cdot\| = \||L|\|$ внаслідок полярного розкладу $L = U\cdot|L|$ [4], де U — унітарний оператор в $\mathcal{H}$.

Означення 5. *Нехай L і $\tilde{L}$ — самоспряжені оператори в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Будемо говорити, що L і $\tilde{L}$ є взаємно сингулярно збуреними, якщо в $\mathcal{H}$ існує щільно визначений замкнений симетричний оператор $\dot{L}$ такий, що і L і $\tilde{L}$ є його різними самоспряженими розширеннями. Якщо, крім того, $|L| \geq 1$ і $\tilde{L}$ має зворотний, то $\tilde{L} \in \mathcal{A}_s(L)$.*

Розглянемо сингулярний оператор $S \in \mathfrak{S}(A)$, $A = |L|$, як збурення L.

Поставимо питання: коли формальне рівняння $(L+S)f = h$ має розв'язок f для даного h?

Дамо розв'язок цієї проблеми подібно до теореми 3, тобто побудуємо сингулярно збурений оператор $\tilde{L}$, що відповідає парі L, S, за формулою типу (14) і одержимо розв'язок f у вигляді $\tilde{L}^{-1}h$.

Припустимо, що оператор S задовольняє обидві умови (13). Позначимо $\mathcal{M}_+ = \ker S$. Це замкнений підпростір в $\mathcal{H}_+$, щільний у $\mathcal{H}$ Отже, ми можемо ввести розклад $\mathcal{H} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{N}_0$, де $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_+$ і $\mathcal{N}_0 = (\mathcal{M}_0)^\perp$.

Зрозуміло, що звуження $\dot{L} := L \mid \mathcal{M}_+$ — замкнений симетричний оператор в $\mathcal{H}$ і його дефектний підпростір $\mathcal{N}_{0,L} := \ker(\dot{L})^*$ є рівним $U\mathcal{N}_0$. Введемо оператор $B_{0,L} := U\cdot B_0 \cdot U^*$ в $\mathcal{N}_{0,L}$, де $B_0 := B \mid \mathcal{N}_0$ (нагадаємо, що $S = B\cdot A$).

Теорема 4. *Нехай L — самоспряжений оператор в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ з $|L| = A \geq 1$. Тоді кожний оператор $\tilde{L} \in \mathcal{A}_s(L)$ визначає різницею $\tilde{L}^{-1} - L^{-1}$ сингулярний оператор $S \in \mathfrak{S}(A)$, який має дві характеристичні властивості* (13).

Навпаки, якщо $S = B\cdot A$ з $A = |L|$ в $\mathfrak{S}(A)$ задовольняє (13), *то $\tilde{L}$, заданий у вигляді*

$$\tilde{L}^{-1} = L^{-1} + B_{0,L}^{-1}\cdot P_{0,L}, \tag{15}$$

де $P_{0,L}$ позначає ортогональне проектування на підпростір $\mathcal{N}_{0,L} := L(\mathcal{D})^\perp$, належить до $\mathcal{A}_s(L)$. Рівняння (15) *встановлює взаємно однозначну відповідність між $\tilde{L}$ і $s \in \mathfrak{S}(A)$.*

Доведення. Доведення, по суті, таке ж саме, як і доведення теореми 3.

Згідно з теоремою 4 формальній сумі $L+S$ відповідає коректно визначений оператор $\tilde{L}$, який за побудовою (15) є оборотним. Отже, рівняння $\tilde{L}f=h$ має розв'язок для $h \in \mathcal{R}(\tilde{L})$.

Зауваження 4. Підкреслимо, що наведена вище побудова $\tilde{L}$ справедлива для L з будь-якою щілиною (a, b) в спектрі. Перетворенням $L \to L' := \lambda(L+(b-a)/2)$, $\lambda > 0$, ми можемо завжди перейти до випадку, коли $|L'| \geq 1$. Більш того, ми можемо побудувати $\mathcal{H}_+$ як поповнення $\mathcal{D}(L)$ за будь-якою нормою, еквівалентною до $\|L \cdot\|$.

Приклад 2 *(векторне рівняння з сингулярним збуренням).* Нехай $\mathcal{H}=L^2(\Omega, \mathbb{C}^n)$, $n \geq 1$, і $\Omega=(0, 2\pi)\times(0, \pi)$. Розглянемо диференціальний вираз

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

з областю визначення $\mathcal{D}(L_0)$, яка містить у собі всі функції $\varphi(t, x) \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^n)$ з періодичними граничними умовами

$$\begin{gathered}\varphi(0, x) - \varphi(2\pi, x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(0, x) - \frac{\partial}{\partial x}\varphi(2\pi, x) = 0, \quad x \in [0, \pi], \\ \varphi(t, 0) = \varphi(t, \pi) = 0, \quad t \in [0, 2\pi].\end{gathered} \tag{16}$$

Відомо, що L_0 — істотно самоспряжений оператор; якщо L' позначає замикання L_0, то спектр $\sigma(L')=\{m^2-l^2 \mid m \in \mathbb{N},\ l \in \mathbb{Z}\}$. Візьмемо довільну регулярну точку $\alpha \notin \sigma(L')$ і додатне число λ такі, що оператор $L := \lambda(L'-\alpha\mathbf{1})$ задовольняє умову $|L| \geq 1$, де $\mathbf{1}$ — тотожне перетворення. Введемо $\mathcal{H}_+$ як замикання $\mathcal{D}(L_0)$ відносно скалярного добутку $(\varphi, \psi)_+ := (L\varphi, L\psi)$. Розглянемо сингулярне збурення L в формі $S=B\cdot A$, де $A := D_{0,+} \equiv |L|$ і B побудовано таким чином:

$$B\varphi := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j(\varphi, \eta_j)\eta_j, \quad 0 \neq \lambda_j \in \mathbf{R}, \quad \varphi \in \mathcal{H}, \tag{17}$$

де $\{\eta_j\}_{j=1}^N$ — набір ортонормованих векторів в $\mathcal{H}$, які є лінійно незалежними відносно $\mathcal{H}_+$. Остання умова означає, що для підпростору $\mathcal{N}_0$, який є лінійною оболонкою $\{\eta_j\}$, виконується умова

$$\mathcal{N}_0 \cap \mathcal{H}_+ = \{0\}. \tag{18}$$

Це гарантує сингулярність S за твердженням 5. Визначимо $\mathcal{N}_{0,L} := L\mathcal{N}_+$, де $\mathcal{N}_+ = A^{-1}\mathcal{N}_0$, і розглянемо оператор $B_{0,L} := U \cdot B_0 \cdot U^*$, де B_0 є звуженням B на $\mathcal{N}_0$ і U взято з полярного розкладу $L = U\cdot|L|$.

Використовуючи теорему 4, одержуємо наступний результат.

Твердження 6. *Для введеного вище диференціального оператора L і будь-якого $S=B\cdot A$, де $A=|L|$, а B заданий* (17), *оператор $\tilde{L}$ з* (15) *належить класу $\mathcal{A}_s(L)$. Крім того, оператор $\tilde{L}'=\lambda^{-1}\tilde{L}+\alpha\mathbf{1}$ є сингулярно збуреним відносно L' у розумінні означення* 5.

Доведення. Зауважимо лише, що $\tilde{L}'$ і L' співпадають на множині $\ker S := D(\dot{L}) \equiv \mathcal{N}_+^\perp$ в $\mathcal{H}_+$.

Цей результат справедливий навіть у випадку, коли оператор B вигляду (17) має нескінченний ранг. У цьому разі умова (18) допускає деяке послаблення завдяки теоремі 2. А саме: справедливе наступне твердження.

Твердження 7. *Нехай* L *— визначений вище самоспряжений оператор і* B *— оператор вигляду* (17) *з нескінченним рангом* (*тобто з* $N = \infty$). *Припустимо, що оператор* $S := B \cdot A$ $(A \equiv |L|)$ *задовольняє умови теореми* 2. *Тоді оператор* $\tilde{L}$, *визначений згідно з* (15), *належить класу* $\mathcal{A}_s(L)$. *Крім того,* $\tilde{L}' := \lambda^{-1}\tilde{L} + \alpha\mathbf{1}$ *є сингулярно збуреним відносно* L' *у розумінні означення* 5.

Доведення. Множина $\ker S$ щільна в $\mathcal{H}$ за теоремою 2. Тому, за нашою побудовою, обидві пари $\tilde{L}', L'$ і $\tilde{L}, L$ збігаються на цій множині.

1. *Albeverio S., Karwowski W., Koshmanenko V.* Square power of singularly perturbed operators // Math. Nachr. – 1995. – **173**. – P. 5–24.
2. *Karwowski W., Koshmanenko V. D.* Additive regularization of the singular bilinear forms // Ukr. Math. Zh. – 1990. – **42**, № 9. – P. 1199–1204.
3. *Karwowski W., Koshmanenko V. D.* On definition of the singular bilinear forms and singular linear operators // Ibid. – 1993. – **45**, № 8. – P. 1084–1089.
4. *Kato T.* Theory of perturbation of linear operators. – New York etc.: Springer-Verlag, 1966.
5. *Koshmanenko V. D.* Perturbations of the self-adjoint operators by the singular bilinear forms // Ukr. Math. Zh. – 1989. – **41**, № 1. – P. 3–18.
6. *Koshmanenko V. D.* An operator representation for nonclosable quadratic forms and the scattering problem // Dokl. Acad. Nauk SSSR. – 1979. – **20**. – P. 294–297.
7. *Koshmanenko V. D.* Singular perturbations defined by forms. Applications of self-adjoint extensions in quantum physics // Lect. Notes. Phys. – 1987. – **324**. – P. 55–66.
8. *Ôta S.* On a singular part of an unbounded operator // Zeitschrift für Anal. Anwend. – 1987. – **7**. – P. 15–18.
9. *Simon B.* A canonical decomposition for quadratic forms with applications to monotone convergence theorems // J. Funct. Anal. – 1978. – **28**. – P. 377–385.
10. *Koshmanenko V. D.* Singular bilinear forms in perturbations theory of self-adjoint operators. – Kiev: Nauk. dumka, 1993. – 175 p.
11. *Albeverio S., Gesztesy F., Hφegh-Krohn R., Holden H.* Solvable models in quantum mechanics. – Berlin: Springer-Verlag, 1988. – 452 p.
12. *Albeverio S., Brasche J. F., Röckner M.* Dirichlet forms and generalized Schrödinger operators // Lect. Notes Phys. – 1989. – **345**. – P. 1–42.
13. *Albeverio S., Fenstad J. E., Hφegh-Krohn R., Karwowski W., Lindström T.* Schrödinger operators with potentials supported by null sets. – 1991. – 32 p. – (Preprint / SFB237; № 8).
14. *Berezin F. A., Faddeev L. D.* A remark an Schrödinger equation with a singular potential // Dokl. Acad. Nauk SSSR. – 1961. – **137**, № 2. – P. 1011–1014.
15. *Gorzelanczyk M.* Scattering theory for the singularly perturbed hamiltonians. – 1994. – 15 p. – (Preprint / SFB237).
16. *Karwowski W., Koshmanenko V. D.* Regular restrictions of singular quadratic forms // Funct. Anal. Appl. – 1995. – **29**, № 2. – P. 36–137.
17. *Koshmanenko V. D.* Towards the rank-one singular perturbations of the self-adjoint operators // Ukr. Math. Zh. – 1991. – **43**, № 11. – P. 1559–1566.
18. *Koshmanenko V. D.* Dense subspaces in the A-scale of Hilbert spaces. – 1993. – 22 p. – (Preprint / ITP UWr 835/93).
19. *Schmüdgen K.* On domain of power of closed symmetric operator // J. Operator Theory. – 1983. – **7**. – P. 53–75.
20. *Berezanskii Yu. M.* Expansion in eigenfunction of self-adjoint operators. – Providence: AMS, 1968.
21. *Berezanskii Yu. M.* Self-adjoint operators in spaces of function of infinitely many of variables. – Providence: AMS, 1986.

Одержано 07.09.95