УДК 519.21

А. В. Свіщук, А. Г. Бурдейний (Ін-т математики НАН України, Київ)

СТІЙКІСТЬ НАПІВМАРКОВСЬКИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИСТЕМ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ У ФІНАНСОВІЙ МАТЕМАТИЦІ

We study the problem of stability of semi-Markov evolutionary systems and its application in financial mathematics.

Вивчається стійкість напівмарковських еволюційних систем та її застосування у фінансовій математиці.

1. Вступ. У даній роботі досліджуються дві моделі напівмарковських випадкових еволюцій (НМВЕ), а саме:

а) дифузійний процес у напівмарковському середовищі, що описується стохастичним диференціальним рівнянням (СДР) із напівмарковськими перемиканнями і є неперервною НМВЕ;

б) марковський процес у напівмарковському середовищі, що описується СДР із стрибками та напівмарковськими перемиканнями і є розривною НМВЕ.

Вивчаються задачі існування, єдиності та стійкості розв'язків даних моделей.

Отримані результати застосовуються до проблем фінансової математики, а саме, до вивчення стійкості динаміки вартості акцій, що мають напівмарковські мінливість та зростання.

Стійкість диференціальних рівнянь із випадковими збуреннями розглядалась у роботах [1 – 5]. Стійкість стохастичних диференціальних рівнянь вивчалась в [6 – 8]. Стійкість напівмарковських еволюційних систем (НЕС) в умовах усереднення та дифузійної апроксимації вивчалась у роботі [2]. Граничні теореми для СДР з напівмарковськими перемиканнями вивчались у роботах [8, 9]. Хедж опціонів з напівмарковською мінливістю вивчався у роботі [10].

У роботі [11] викладено огляд проблем та методів стохастичних моделей фінансової математики.

2. Постановка задачі та позначення. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — ймовірнісний простір, $(X, \mathcal{X})$ — вимірний фазовий простір напівмарковського процесу $x(t)$ [12, 13], що побудований за процесом марковського відновлення $(x_n; \theta_n; n \geq 0)$, де $(x_n, n \geq 0)$ є ланцюгом Маркова, $x_n \in X$, $\forall\, n \geq 0$, з перехідними ймовірностями

$$P(x, A) := \mathcal{P}\{\omega\colon\ x_{n+1} \in A / x_n = x\}, \quad A \in \mathfrak{X}, \quad x \in X, \tag{1}$$

а $(\theta_n, n \geq 0)$ — час перебування $x(t)$ в станах з функціями розподілу

$$G_x(t) := \mathcal{P}\{\omega\colon\ \theta_{n+1} \leq t / x_n = x\}, \quad t \in R_+, \quad x \in X, \tag{2}$$

$\nu(t) := \max\{n\colon\ \tau_n \leq t\}$ — лічильний процес, $\tau_n := \sum_{k=1}^{n} \theta_k$, $x(t) := x_{\nu(t)}$.

Розглянемо також вимірні функції $a(t, z, x)$ та $b(t, z, x)$ на $R_+ \times R \times X$ і вінерів процес $w(t)$, що не залежить від напівмарковського процесу $x(t)$.

Першою моделлю нашого дослідження буде дифузійний процес у напівмарковському середовищі $x(t)$. Такий процес описується стохастичним диференціальним рівнянням

$$d\eta(t) = a(t, \eta(t), x(t))\, dt + b(t, \eta(t), x(t))\, dw(t) \tag{3}$$

з функціями переносу $a(t, z, x)$, дифузії $b(t, z, x)$ та напівмарковськими перемиканнями $x(t)$.

Для моделі (3) досліджуються умови існування та єдиності розв'язку, а також стійкість нульового розв'язку.

Другою моделлю нашого дослідження буде марковський процес у напівмарковському середовищі $x(t)$, що описується СДР із стрибками:

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(\tau, \xi(t), x(\tau))\, d\tau + \int_0^t b(\tau, \xi(\tau), x(\tau))\, dw(\tau) +$$

$$+ \int_0^t \int_R f(\tau, \xi(\tau), x(\tau), u)\, \nu(d\tau, du), \tag{4}$$

з функціями переносу $a(t, z, x)$, дифузії $b(t, z, x)$ та напівмарковськими перемиканнями $x(t)$ з величиною стрибків $f(t, z, x, u)$.

Для моделі (4) також досліджуються умови існування та єдиності розв'язку, стійкість нульового розв'язку.

Як відомо [11], неперервна динаміка вартості S_t акцій описується лінійним СДР:

$$dS_t = aS_t dt + bS_t dw(t) \tag{5}$$

із сталими коефіцієнтами росту a та мінливості b.

Якщо врахувати стрибкоподібну динаміку вартості S_t акцій, то, як відомо [11], S_t описується наступним СДР із стрибками:

$$dS_t = aS_t dt + bS_t dw(t) + \int_R \gamma(t, u)\, \nu(dt, du), \tag{6}$$

де a і b визначені в (5), а γ та ν — деякі „хороші" функція та міра відповідно.

Нас цікавить випадок, коли коефіцієнти росту a, мінливості b та функція стрибків γ залежать від напівмарковського процесу $x(t)$. Тобто СДР, що відповідають (5) та (6), матимуть вигляд

$$dS_t = a(x(t))\, S_t dt + b(x(t))\, S_t dw_t, \tag{7}$$

$$dS_t = a(x(t))\, S_t dt + b(x(t))\, S_t dw_t + \int_R \gamma(x(t), u)\, \nu(dt, du). \tag{8}$$

Динаміка вартості акцій в (7) та (8) відповідає тому випадку, коли на ринку цінних паперів окрім стохастичності за рахунок $w(t)$ наявний вплив випадкового середовища, що моделюється напівмарковським процесом $x(t)$. Наявність додаткової незалежної стохастичності (бо $x(t)$ не залежить від $w(t)$) призводить до того, що ринок цінних паперів є неповним, тобто з неповною інформацією щодо розподілу динаміки вартості акцій та прогнозу їх еволюції. Саме це і спонукає до вивчення моделей динаміки вартості акцій (7) та (8).

3. Існування та єдиність розв'язку НЕС. 3.1. Нехай задано НЕС (3). Визначимо наступні об'єкти:

$\rho(A)$ — стаціонарна міра вкладеного ланцюга Маркова $(x_n;\ n \geq 0)$,

$$m_i(x) := \int_0^\infty t^i\, G_x(dt), \quad m := \int_X \rho(dx)\, m_1(x),$$

$$\pi(dx) := \frac{\rho(x)\, m_1(x)}{m}$$

— стаціонарна міра напівмарковського процесу $x(t)$, $\forall\, A \in \mathfrak{X}$, $x \in X$, функція $G_x(t)$ визначена в (2), $i = 1, 2$.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови:*

1) *напівмарковський процес* $x(t)$ *є ергодичним із стаціонарною мірою* $\pi(A)$ *в* (8), $A \in \mathfrak{X}$;

2) *функції* $a(t, z, x)$ *і* $b(t, z, x)$ *визначені при* $t \in [0, T]$, $z \in \mathbb{R}$, $x \in X$, *та вимірні за сукупністю змінних;*

3) *існує вимірна та обмежена функція* $K(x)\colon X \to \mathbb{R}_+$ *та константа* N *такі, що при* $t \in [0, T]$, $z, y \in \mathbb{R}$, $x \in X$ *виконуються нерівності*

$$\begin{gathered}
\int\limits_X K^2(x)\,\pi(dx) = K^2 < +\infty, \\
|a(t, z, x) - a(t, y, x)| \le K(x)|z - y|, \\
|b(t, z, x) - b(t, y, x)| \le N|z - y|, \\
|a(t, z, x)|^2 \le K^2(x)(1 + |z|^2), \\
|b(t, z, x)|^2 \le N^2(1 + |z|^2);
\end{gathered} \tag{9}$$

4) $\eta(0)$ *не залежить ні від* $w(t)$, *ні від* $x(t)$, *та* $M\eta^2(0) < +\infty$,

то існує розв'язок рівняння (3), *що задовольняє умови:*

A) $\eta(t)$ *з рівною одиниці ймовірністю неперервний і* $\eta(t) = \eta(0)$ *при* $t = 0$;

B) $\sup\limits_{0 \le t \le T} M\eta^2(t) < +\infty$;

C) *якщо* $\eta_1(t)$ *та* $\eta_2(t)$ — *два розв'язки рівняння* (3), *що задовольняють умови* A) – B), *то*

$$\mathcal{P}\left\{\omega\colon \sup_{0 \le t \le T} |\eta_1(t) - \eta_2(t)| = 0\right\} = 1. \tag{10}$$

Доведення. Єдиність. Нехай

$$\eta_i(t) = \eta(0) + \int\limits_0^t a(s, \eta_i(s), x(s))\,ds + $$

$$+ \int\limits_0^t b(s, \eta_i(s), x(s))\,dw(s), \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

Відмітимо, що з умови 1 та (9) теореми 1 випливає, що [14]

$$M\left|\frac{1}{T}\int\limits_0^T K^2(x(s))\,ds - \int\limits_X K^2(x)\,\pi(dx)\right| \le \varepsilon_T,$$

тобто

$$\left|\int\limits_0^T K^2(x(s))\,ds - T\int\limits_X K^2(x)\,\pi(dx)\right| \le T \cdot \varepsilon_T \quad \text{м. с.,} \tag{12}$$

де $\varepsilon_T \to 0$, коли $T \to +\infty$.

З (11) маємо

$$M[\eta_1(t) - \eta_2(t)]^2 = M\left[\int\limits_0^t (a(s, \eta_1(s), x(s)) - a(s, \eta_2(s), x(s)))\,ds + \right.$$

$$+ \left.\int_0^t (b(s, \eta_1(s), x(s)) - b(s, \eta_2(s), x(s)))\, dw(s)\right]^2 \le$$

$$\le 2M\left[\int_0^t (a(s, \eta_1(s), x(s)) - a(s, \eta_2(s), x(s)))\, ds\right]^2 +$$

$$+ 2M\left[\int_0^t (b(s, \eta_1(s), x(s)) - b(s, \eta_2(s), x(s)))\, dw(s)\right]^2 \le$$

$$\le 2M\left[\left(\int_0^t K^2(x(s))\, ds\right)\left(\int_0^t (\eta_1(s) - \eta_2(s))^2 ds\right) +\right.$$

$$\left. + 2N^2 \int_0^t M|\eta_1(s) - \eta_2(s)|^2\, ds\right]. \tag{13}$$

Знайдемо оцінку першого доданка у правій частині нерівності (13), використовуючи нерівності (12) і (9):

$$2M\left[\left(\int_0^t K^2(x(s))\, ds\right)\left(\int_0^t (\eta_1(s) - \eta_2(s))^2\, ds\right)\right] =$$

$$= 2M\left[\left(\int_0^t K^2(x(s))\, ds - T\int_X K^2(x)\,\pi(dx)\right)\left(\int_0^t (\eta_1(s) - \eta_2(s))^2 ds\right)^2\right] +$$

$$+ 2M\left[T\int_X K^2(x)\,\pi(dx)\left(\int_0^t (\eta_1(s) - \eta_2(s))^2 ds\right)\right] \le$$

$$\le 2T\varepsilon_T \int_0^t M|\eta_1(s) - \eta_2(s)|^2\, ds + 2TK^2 \int_0^t M|\eta_1(s) - \eta_2(s)|^2\, ds =$$

$$= 2T(\varepsilon_T + K^2)\int_0^t M|\eta_1(s) - \eta_2(s)|^2\, ds =$$

$$= L_1 \int_0^t M|\eta_1(s) - \eta_2(s)|^2\, ds. \tag{14}$$

Таким чином, виходячи з (11) – (14), ми встановили, що

$$M|\eta_1(t) - \eta_2(t)|^2 \le L\int_0^t M|\eta_1(s) - \eta_2(s)|^2\, ds, \tag{15}$$

де константа $L = 2(N^2 + T(\varepsilon_T + K^2)) = L_1 + 2N^2$, L_1 визначена в (14).

Застосовуючи лему Гронуолла – Беллмана до нерівності (15), маємо

$$M|\eta_1(t) - \eta_2(t)| = 0.$$

Значить, для будь-якого $t \in [0, T]$

$$\mathcal{P}\{\eta_1(t) = \eta_2(t)\} = 1.$$

Звідси випливає, що для будь-якої зліченної підмножини N маємо

$$\mathcal{P}\left\{\sup_{t\in N}|\eta_1(t)-\eta_2(t)|=0\right\} = 1, \quad N\subset[0,T].$$

Якщо N скрізь щільна на $[0,T]$, то з неперервності $\eta_1(t)$ та $\eta_2(t)$ (яку ми покажемо пізніше) з рівною одиниці ймовірністю випливає

$$\mathcal{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|\eta_1(t)-\eta_2(t)|=0\right\} = \mathcal{P}\left\{\sup_{t\in N}|\eta_1(t)-\eta_2(t)|=0\right\} = 1.$$

Єдиність розв'язку доведено.

Доведемо існування розв'язку, що має властивості А) – В). Нехай $\eta_0(t):=$ $:=\eta(0)$ та

$$\eta_n(t) = \eta_0 + \int_0^t a(s,\eta_{n-1}(s),x(s))\,ds + \int_0^t b(s,\eta_{n-1}(s),x(s))\,dw(s). \tag{16}$$

За допомогою оцінок (12) – (15) одержуємо

$$M[\eta_{n+1}(t)-\eta_n(t)]^2 = M\left[\int_0^t (a(s,\eta_n(s),x(s)) - a(s,\eta_{n-1}(s),x(s)))\,ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^t (b(s,\eta_n(s),x(s)) - b(s,\eta_{n-1}(s),x(s)))\,dw(s)\right]^2 \le$$

$$\le L\int_0^t M|\eta_n(s)-\eta_{n-1}(s)|^2\,ds, \tag{17}$$

де L визначена в (15).

Ітерації нерівності (17) призводять до наступної оцінки:

$$M|\eta_{n+1}(t)-\eta_n(t)|^2 \le L\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}M|\eta_1(s)-\eta_0(s)|^2\,ds. \tag{18}$$

Але з (16), коли $n=1$, та з (9) та (12) маємо

$$M|\eta_1(s)-\eta_0(s)|^2 \le 2M\left[\int_0^t a(s,\eta(0),x(s))\,ds\right]^2 +$$

$$+ 2M\left[\int_0^t b(s,\eta(0),x(s))\,dw(s)\right]^2 \le$$

$$\le 2TM\int_0^t K^2(x(s))(1+|\eta(0)|^2)\,ds + 2N^2\int_0^t M(1+|\eta(0)|^2)\,ds =$$

$$= 2TM\left(\int_0^t K^2(x(s))\,ds - T\int_X K^2(x)\,\pi(dx)\right)(1+|\eta(0)|^2)\,ds +$$

$$+ 2TK^2TM(1+\eta(0)^2) + 2N^2TM(1+|\eta(0)|^2) \le$$

$$\le (2T^2\varepsilon_T + 2T^2K^2 + 2N^2T)M(1+|\eta(0)|^2).$$

Таким чином,

$$M|\eta_1(s) - \eta_0(s)|^2 \le D(1 + M|\eta(0)|^2), \tag{19}$$

де $D = 2T^2\varepsilon_T + 2T^2K^2 + 2N^2T$.

З нерівностей (18) та (19) знаходимо, що існує константа C, залежна від константи D, така, що

$$M|\eta_{n+1}(t) - \eta_n(t)|^2 \le C\frac{(LT)^n}{n!}. \tag{20}$$

Відмітимо, що

$$\sup_{0\le t\le T} |\eta_{n+1}(t) - \eta_n(t)| \le \int_0^T |a(s, \eta_n(s), x(s)) - a(s, \eta_{n-1}(s), x(s))|\, ds +$$

$$+ \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t (b(s, \eta_{n+1}(s), x(s)) - b(s, \eta_n(s), x(s)))\, dw(s)\right|, \tag{21}$$

$$M \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t (b(s, \eta_{n+1}(s), x(s)) - b(s, \eta_n(s), x(s)))\, dw(s)\right|^2 \le$$

$$\le 4\int_0^T (b(s, \eta_{n+1}(s), x(s)) - b(s, \eta_n(s), x(s)))^2\, ds. \tag{22}$$

З нерівностей (12)–(14), (21), (22) отримуємо

$$M \sup_{0\le t\le T} |\eta_{n+1}(t) - \eta_n(t)|^2 \le$$

$$\le 2M\left(\int_0^T |a(s, \eta_n(s), x(s)) - a(s, \eta_{n-1}(s), x(s))|\, ds\right)^2 +$$

$$+ 2M\left(\sup_{0\le t\le T}\int_0^t (b(s, \eta_{n+1}(s), x(s)) - b(s, \eta_n(s), x(s)))\, dw(s)\right)^2 \le$$

$$\le 2T(\varepsilon_T + K^2)\int_0^t M|\eta_n(s) - \eta_{n-1}(s)|^2\, ds + 8N^2\int_0^T M|\eta_n(s) - \eta_{n-1}(s)|^2\, ds \le$$

$$\le (2T(\varepsilon_T + K^2) + 8N^2)\int_0^T M|\eta_n(s) - \eta_{n-1}(s)|^2\, ds. \tag{23}$$

Використовуючи оцінки (18)–(20), з (23) маємо

$$M \sup_{0\le t\le T} |\eta_{n+1}(t) - \eta_n(t)|^2 \le \frac{C_1 L^{n-1} T^{n-1}}{(n-1)!},$$

де L визначена в (15), а

$$C_1 := (2T(\varepsilon_T + K^2) + 8N^2),$$

константи K^2 та N^2 визначені в (9), а ε_T — в (12).

Із збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}\left\{ \sup_{0\le t\le T} |\eta_{n+1}(t)-\eta_n(t)| > \frac{1}{n^2}\right\} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_1 L^{n-1}T^{n-1}}{(n-1)!} n^4$$

випливає з рівною одиниці ймовірністю рівномірна збіжність ряду

$$\eta_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [\eta_{n+1}(t)-\eta_n(t)].$$

Оскільки сума цього ряду є з $P=1$ рівномірною границею $\eta_n(t)$, то $\eta_n(t)$ збігається до деякого процесу $\eta(t)$. Переходячи до границі в рівності (16), коли $n\to+\infty$, переконуємось, що $\eta(t)$ є розв'язком рівняння (3); при цьому $\eta(t)$ вимірне відносно σ-алгебри $\mathcal{F}_t := \sigma\{\eta(0), w(s), x(s); s\le t\}$.

Неперервність $\eta(t)$ випливає з того, що $\eta(t)$ є з рівною 1 ймовірністю рівномірною границею неперервних процесів. Тому А) доведено.

Далі, з (16) та (9) маємо

$$M\eta_n^2(t) \le 3\left\{ M\eta^2(0) + M\left[\int_0^t a(s,\eta_{n-1}(s),x(s))\,ds\right]^2 + \right.$$

$$\left. + M\left[\int_0^t b(s,\eta_{n-1}(s),x(s))\,dw(s)\right]^2\right\} \le 3M\eta^2(0) +$$

$$+ 3(2T^2\varepsilon_T + 2T^2K^2)\int_0^t M(1+|\eta_{n-1}(s)|^2)\,ds + 6N^2T\int_0^t M(1+|\eta_{n-1}(s)|^2)\,ds \le$$

$$\le 3M\eta^2(0) + 3D\left(1+\int_0^t M\eta_{n-1}^2(s)\,ds\right) =$$

$$= 3M\eta^2(0) + 3D + 3D\int_0^t M\eta_{n-1}^2(s)\,ds, \tag{24}$$

де константа D визначена в (19).

Застосовуючи оцінку (24) послідовно до $\eta_{n-1}(s)$, $\eta_{n-2}(s)$, $\ldots$, одержуємо

$$M\eta_n^2(t) \le 3D + 3M\eta^2(0) + 3M\eta^2(0)\,3DT + (3D)^2\int_0^t (t-s)M\eta_{n-2}^2(s)\,ds \le$$

$$\le 3D + 3M\eta^2(0) + 9DTM\eta^2(0) + 3M\eta^2(0)\frac{(3DT)^2}{2} + \ldots \le$$

$$\le 3D + 3M\eta^2(0)\,e^{3DT}. \tag{25}$$

Переходячи до границі в (25) при $n\to\infty$, маємо

$$\sup_{0\le t\le T} M\eta^2(t) \le 3D + 3M\eta^2(0)\,e^{3DT},$$

де константа D визначена в (19), і властивість В) доведено.

Теорему 1 повністю доведено.

Нехай задано НЕС (4), в якій $\nu(dt, du)$ — стохастична міра на σ-алгебрі борелевих множин простору $[0, \infty) \times \mathbb{R}$, що набуває цілих числових значень, не залежних на множинах з $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, що не перетинаються, і така, що для кожної множини вигляду $[t_1, t_2] \times A$, $A \in \mathbb{R}$, випадкова величина $\nu([t_1, t_2] \times A)$ розподілена за законом Пуассона з параметром $\int_{t_1}^{t_2} \Pi(t, A)\, dt$, де $\Pi(t, A)$ — детермінована міра на $\mathbb{R}$, яка по t є вимірною функцією для будь-якого $A \in \mathbb{R}$. Міра $\nu(dt, du)$ не залежить ні від $w(t)$, ні від $x(t)$, ні від ξ_0.

Відмітимо, що процес

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(\tau, \xi(\tau), \chi(\tau), u)\, \lambda(d\tau, du) := I_t(f) \tag{26}$$

є $\mathcal{F}_t$-мартингалом, де $\lambda(t, A) := \nu(t, A) - \int_0^t \Pi(\tau, A)\, d\tau$, причому $M I_t(f) = 0$ та

$$M(I_t(f))^2 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} M|f|^2\, \Pi(\tau, du)\, d\tau. \tag{27}$$

Теорема 2. *Якщо виконуються наступні умови:*

1) *напівмарковський процес* $x(t)$ *є ергодичним із стаціонарною мірою* $\pi(A)$ *в* (8), $A \in \mathfrak{X}$;

2) *функції* $a(t, z, x)$, $b(t, z, x)$ *та* $f(t, z, x, u)$ *визначені при* $t \in [0, T]$, $z \in \mathbb{R}$, $x \in X$, $u \in \mathbb{R}$, *та вимірні по сукупності змінних;*

3) *існує вимірна та обмежена функція* $K(x)\colon X \to \mathbb{R}_+$ *та константа* N *такі, що при* $t \in [0, T]$, $z \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $x \in X$, $u \in \mathbb{R}$, *справедливі нерівності*

$$\int_X K^2(x)\, \pi(dx) = K^2 < +\infty,$$

$$\begin{gathered}
|a(t, z, x) - a(t, y, x)|^2 \le K^2(x)|z - y|^2, \\
|b(t, z, x) - b(t, y, x)|^2 + \int_{\mathbb{R}} |f(t, z, x, u) - f(t, y, x, u)|^2\, \Pi(t, du) \le \\
\le N^2 |z - y|^2, \\
|a(t, z, x)|^2 \le K^2(x)(1 + |z|^2), \\
|b(t, z, x)|^2 + \int_{\mathbb{R}} |f(t, z, x, u)|^2\, \Pi(t, du) \le N^2(1 + |z|^2);
\end{gathered} \tag{28}$$

4) $\xi(0)$ *не залежить ні від* $w(t)$, *ні від* $x(t)$, *та* $M\xi^2(0) < +\infty$,

то існує розв'язок $\xi(t)$ *рівняння* (4), *обмежений з імовірністю* 1 *і такий, що не має розривів* 2 *роду. Більш того,* $M\xi^2(t) < +\infty$ *для всіх* $t \in [0, T]$, *та будь-які два розв'язки рівняння* (4) *з імовірністю* 1 *співпадають у всіх точках* t, *що є точками неперервності обох процесів. Процес* $\xi(t)$ *в* (4) *неперервний за ймовірністю.*

Доведення. Єдиність та існування розв'язку рівняння (4) доводиться методом, аналогічним методу доведення теореми 1 з використанням властивостей (27) інтегралу $I_t(f)$ в (26), нерівностей (28), умов 1 – 4 та нерівностей (13)–

– (25). (Див. також монографію [15] (§2, гл. 3).)

4. Узагальнення формули Іто для НЕС. Нехай $x(t)$ є напівмарковським процесом, $\gamma(t) := t - \tau_{\nu(t)}$. Позначимо через

$$y(t) := (x(t), \gamma(t)) \tag{29}$$

випадковий процес на просторі $X \times \mathbb{R}_+$. Відомо [2], що процес $y(t)$ є марковським з інфінітезимальним оператором

$$Qh(t, x) = \frac{d}{dt} h(t, x) + \frac{g_x(t)}{\overline{G}_x(t)} [Ph(0, x) - h(t, x)], \tag{30}$$

де $\overline{G}_x(t) = 1 - G_x(t)$, $g_x(t) = dG_x(t)/dt$, P — інтегральний оператор, породжений ядром $P(x, A)$ в (1), $G_x(t)$ визначена в (2), $h(t, x) \in C^1(R_+ \times X)$.

Теорема 3. *Нехай $a(t, z, x)$, $b(t, z, x)$, $f(t, z, x, u)$ задовольняють умови теореми 2 та рівномірно по $t \in [0, T]$ і z, x виконано*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(\tau, z, x, u) - f(t, z, x, u)| \Pi(\tau, du) \to 0,$$

коли $t - \tau \to 0$, функція $F(t, z, y)$ має неперервну похідну по t, неперервну похідну другого порядку по z, неперервна по $y, z \in \mathbb{R}$, $y := (x, t) \in X \times \mathbb{R}_+$.

Тоді з імовірністю 1 для будь-якого $t \in [0, T]$ справедлива формула

$$\begin{aligned} F(t, \xi(t), y(t)) - F(0, z(x, 0)) = \int_0^t F_t'(\tau, \xi(\tau), y(\tau))\, d\tau \; + \\ + \int_0^t \left\{ \frac{\partial F}{\partial z}(\tau, \xi(\tau), y(\tau))\, a(\tau, \xi(\tau), x(\tau))\, d\tau \; + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(\tau, \xi(\tau), y(\tau))\, b(\tau, \xi(\tau), x(\tau)) \right\} d\tau \; + \\ + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial z}(\tau, \xi(\tau), y(\tau))\, b(\tau, \xi(\tau), x(\tau))\, dw(\tau) \; + \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [F(\tau, \xi(\tau)) + f(\tau, \xi(\tau), x(\tau), u), y(\tau)) - F(\tau, \xi(\tau), y(\tau))]\, \nu(d\tau, du) \; + \\ + \int_0^t QF(\tau, \xi(\tau), y(\tau))\, d\tau + \mu(t), \end{aligned} \tag{31}$$

де $\mu(t)$ — супермартингал з характеристикою $\langle \mu \rangle = \int_0^t [QF^2 - 2FQF]\, d\tau$, оператор Q діє на третій аргумент функції F і визначений в (31), а процес $y(t)$ — в (29), процес $\xi(t)$ — в (4).

Доведення. Зауважимо, що процес $(\xi(t), y(t))$, де $\xi(t)$ визначений в (4), а $y(t)$ — в (29), є марковським процесом з інфінітезимальним оператором $L + Q$, де Q визначений в (30), а

$$Lh(z, x) = a(t, z, x) \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{1}{2} b^2(t, z, x) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} +$$

$$+\int_{\mathbb{R}} [h(z+f(t,z,x,u),x)-h(z,x)]\,\nu(t,du). \tag{32}$$

Тому формула (31) випливає з формули Іто для дифузійного процесу $\xi(t)$ з твірним оператором L в (32) та з того, що $y(t)$ є процесом Маркова з породжуючим оператором Q.

***Приклад* 1.** Знайдемо розв'язок лінійної НЕС

$$d\xi(t) = \xi(t)\left(a(x(t))\,dt + b(x(t))\,dw(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(x(t),u)\,\nu(dt,du)\right). \tag{33}$$

Якщо покласти $\eta(t)=\log|\xi(t)|$, то на основі формули (31) (тут $F(t,z,y)\equiv \equiv F(z)\equiv \log|z|$)

$$d\eta(t) = \frac{1}{\xi}a(x)\xi\,dt - \frac{1}{2}\frac{1}{\xi^2}b(x)\xi^2\,dt + \frac{1}{\xi}b(x)\xi\,dw +$$

$$+\int_{\mathbb{R}} [\ln|\xi+\xi\gamma(x(t),u)|-\ln|\xi|]\,\nu(dt,du),$$

або

$$d\eta = \left(a(x)-\frac{b^2(x)}{2}\right)dt + b(x)\,dw +$$

$$+\int_{\mathbb{R}} \ln|1+\gamma(x(t),u)|\,\nu(dt,du),$$

звідки

$$\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t \left(a(x_s)-\frac{b^2(x_s)}{2}\right)ds + \int_0^t b(x_s)\,dw(s) +$$

$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \ln|1+\gamma(x(t),u)|\,\nu(dt,du),$$

$$|\xi(t)| = |\xi(0)|\exp\left\{\int_0^t \left(a(x(s))-\frac{b^2(x(s))}{2}\right)ds + \int_0^t b(x(s))\,dw(s) +\right.$$

$$\left.+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \ln|1+\gamma(x(s),u)|\,\nu(ds,du)\right\}. \tag{34}$$

5. Стійкість розв'язків НЕС. Розглянемо рівняння (4). Припустимо, що

$$a(t,0,x)\equiv b(t,0,x)\equiv \int_{\mathbb{R}} f(\tau,0,x,u)\,\Pi(t,du) \equiv 0.$$

Тоді рівняння (4) має за початковою умовою $\xi(0)=0$ єдиний розв'язок $\xi(t)\equiv 0$. Наприклад, це стосується лінійного рівняння (33) з розв'язком (34).

Означення 1. *Розв'язок* $\xi(t)\equiv 0$ *НЕС* (4) *називається стійким, якщо* $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0$:

$$\mathcal{P}\left\{\sup_{t\in[0,+\infty)} |\xi(t)|>\varepsilon/\xi(0),\ x(0)=x\right\} < \varepsilon$$

при $|\xi(0)|<\delta$, $\forall\, x\in X$.

***Приклад* 2.** Стійкість лінійної НЕС.

Розглянемо лінійне рівняння (33). Його розв'язок має вигляд (34), тобто

$$|\xi(t)| = |\xi(0)| \exp\left\{ t \left[\frac{1}{t} \int_0^t \left(a(x(s)) - \frac{b^2(x(s))}{2} \right) ds + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{t} \int_0^t b(x(s))\, dw(s) + \frac{1}{t} \zeta(t) \right] \right\}, \tag{35}$$

де

$$\zeta(t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma(x(s), u))\, \nu(ds, du). \tag{36}$$

Відмітимо, що

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\int_0^t b(x(s))\, dw(s)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{\int_0^t [b(x(s)) - b]\, dw(s)}{t} + \lim_{t \to \infty} b \frac{w(t) - w(0)}{t} = 0, \tag{37}$$

де $b := \int_X b(x)\, \pi(dx)$ (див. 1), 3), (9)).

Далі $\zeta(t)$ в (36) є процесом з незалежними приростами. Якщо міра Π однорідна, тобто $\Pi(t, A) = \Pi(A)$, то

$$\frac{\zeta(t)}{t} = \frac{\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\ln(1 + \gamma(x(s), u)) - \ln(1 + \hat{\gamma}(u)))\, \nu(ds, du)}{t} +$$

$$+ \frac{t \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \hat{\gamma}(u))\, \nu(dt, du)}{t} \underset{t \to \infty}{\to} \int_X \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \hat{\gamma}(x, u))\, \Pi(du)\, \pi(dx), \tag{38}$$

бо

$$M \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \hat{\gamma}(u))\, \nu(dt, du) = \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \hat{\gamma}(u))\, \Pi(du)$$

в однорідному випадку.

Далі,

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left(a(x(s)) - \frac{b^2(x(s))}{2} \right) ds \underset{t \to \infty}{\to} \frac{1}{t} \int_X \left(a(x) - \frac{b^2(x)}{2} \right) \pi(dx). \tag{39}$$

Таким чином, якщо напівмарковський процес $x(t)$ є ергодичним із стаціонарною мірою $\pi(A)$, $A \in \mathfrak{X}$, та міра $\Pi(t, A)$ є однорідною, то необхідною і достатньою умовою стійкості розв'язку (35) рівняння (33) є умова

$$\int_X \left(a(x) - \frac{b^2(x)}{2} \right) \pi(dx) + \int_X \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma(x, u)\, \Pi(du)\, \pi(dx) < 0. \tag{40}$$

Аналогічно в неоднорідному випадку при умові, що

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln^2(1 + \gamma(x(s), u))\, \Pi(t, du)\, dt = 0,$$

умова стійкості залишається, як і в (40), якщо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\ln(1+\gamma(x(s),u))\,\Pi(t,du)\,dt \;=\; d \;\le\; +\infty.$$

Коли $d=0$, то стрибки не впливають на стійкість, а коли $d=\infty$, то стрибки роблять розв'язок рівняння (33) нестійким для довільних функцій $a(x)$ та $b(x)$, $x\in X$.

Теорема 4. *Припустимо, що*:

1) *напівмарковський процес $x(t)$ є ергодичним із стаціонарною мірою $\pi(A)$, $A\in\mathfrak{X}$;*

2) *коефіцієнти a та b і функція f рівняння* (4) *задовольняють умови теореми* 2;

3) *існує двічі неперервно диференційовна по z та один раз диференційовна по t функція $\hat V(t,z)$, обмежена разом із своїми похідними, додатно визначена в сенсі Ляпунова і така, що задовольняє умову*

$$\frac{\partial\hat V(t,z)}{\partial t} \;+\; \hat L\hat V(t,z) \;\le\; 0, \tag{41}$$

де

$$\hat L\hat V(t,z) \;=\; \hat a(t,z)\frac{\partial\hat V}{\partial z}(t,z) \;+\; \frac{1}{2}\hat b^2(t,z)\frac{\partial^2\hat V}{\partial z}(t,z) \;+$$

$$+\;\int_{\mathbb{R}}[\hat V(t,z+f(t,z,x,u)) - \hat V(t,z)]\,\Pi(t,du)\,\pi(dx) \;\le\; 0, \tag{42}$$

$$\hat a(t,z) \;:=\; \int_X a(t,z,x)\,\pi(dx), \quad \hat b^2(t,z) \;:=\; \int_X b^2(t,z,x)\,\pi(dx). \tag{43}$$

Тоді розв'язок $\xi(t)\equiv 0$ рівняння (4) *стійкий.*

Доведення. Розглянемо функцію $V(t,\xi(t),y(t))$. Застосовуючи теорему 3 до функції $F\equiv V(t,z,y)$, маємо

$$V(t,\xi(t),y(t)) \;=\; V(0,z,y) \;+\; \int_0^t\left(\frac{\partial V}{\partial\tau}+L_1V+QV\right)d\tau \;+\; m(t), \tag{44}$$

де

$$m(t) \;:=\; \int_0^t\frac{\partial V}{\partial\tau}\,b(\tau,\xi(\tau),x(\tau))\,dw(\tau) \;+\; \mu(t) \;+$$

$$+\;\int_0^t\int_{\mathbb{R}}[V(\tau,\xi(\tau)+f(\tau,\xi(\tau),x(\tau),u),y) - V(\tau,\xi(\tau),y)]\,\lambda(d\tau,du), \tag{45}$$

$$\lambda(t,A) \;:=\; \nu(t,A) - \int_0^t\Pi(\tau,A)\,d\tau,$$

$$L_1V \;:=\; a\frac{\partial V}{\partial z} \;+\; \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \;+$$

$$+\;\int_{\mathbb{R}}[V(\tau,\xi(\tau)+f(\tau,\xi(\tau),x(\tau),u),y(\tau)) - V(\tau,\xi(\tau),y(\tau))]\,\Pi(d\tau,du).$$

Оскільки $x(t)$ — ергодичний процес, то [14]

$$\left| \int_0^t L_1 \hat{V}(\tau, \xi(\tau))\, d\tau - \int_0^t \hat{L}\hat{V}(\tau, \xi(\tau))\, d\tau \right| \leq \varepsilon_t \quad \text{м. с.,} \tag{46}$$

$$\left| \int_0^t V(\tau, \xi(\tau), y(\tau))\, d\tau - \int_0^t \hat{V}(\tau, \xi(\tau))\, d\tau \right| \leq \delta_t \quad \text{м. с.,}$$

$$\hat{V}(\tau, z) := \int_X V(\tau, z, y)\, \pi(dy), \quad \delta_t \to 0, \quad \varepsilon_t \to 0, \quad \text{коли} \quad t \to +\infty.$$

Тому з (46) маємо оцінку для другого доданку в (44) з урахуванням (41):

$$\int_0^t \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} + L_1 V + QV \right) d\tau = \int_0^t \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial \tau} + \hat{L}\hat{V} \right) d\tau + \int_0^t \frac{\partial (V - \hat{V})}{\partial \tau}\, d\tau + \int_0^t L_1 (V - \hat{V})\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t Q(V - \hat{V})\, d\tau + \int_0^t Q\hat{V}\, d\tau + \left| \int_0^t (L_1 \hat{V} - \hat{L}\hat{V})\, d\tau \right| \leq \rho_t \quad \text{м. с.,} \tag{47}$$

$$\rho_t := \rho_t(\varepsilon_t, \delta_t) \underset{t \to \infty}{\to} 0, \quad Q\hat{V} = 0.$$

З умови (41) теореми 4, (44) – (47) та невід'ємності V випливає, що справедливі нерівності

$$\begin{gathered} 0 \leq V \leq (V(0, z, y) + \rho_t) + m(t), \\ m(t) \geq -(V(0, z, y) + \rho_t), \end{gathered} \tag{48}$$

де $m(t)$ визначений в (45).

Відмітимо, що з властивостей $w(t)$ та $\lambda(t, A)$ випливає, що $m(t)$ в (45) є супермартингалом як сума трьох супермартингалів в (45).

Оскільки $M m(t) = 0$ та $m(t) \geq -(V(0, z, y) + \rho_t)$, то з нерівності Колмогорова – Дуба для супермартингалів маємо

$$\mathcal{P}\left\{ \sup_{t \in [0, T]} |m(t)| > A \right\} \leq \frac{V(0, z, y) + \rho_T}{A}.$$

Таким чином, нерівність

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} V(t, \xi(t), y(t)) \leq (V(0, z, y) + \rho_T) + \frac{\varepsilon}{2}$$

виконується з імовірністю не меншою, ніж $1 - \dfrac{2(V(0, z, y) + \rho_T)}{\varepsilon}$.

Оскільки за умовою теореми V — додатно визначена за Ляпуновим, то

$$V(t, z, x) \geq v(z, x) \geq \varepsilon_1,$$

коли $|t| > \varepsilon_1$. Тому ймовірність $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |\xi(t)| < \varepsilon$ не менша $\delta := 1 - \dfrac{2(V(0, z, y) + \rho_T)}{\varepsilon}$, якщо тільки $|\varepsilon| < \delta_1$, ε_1 та δ можуть бути вибрані як завгодно малими вибором ε та δ_1.

Теорему 4 доведено.

6. Теорема про стійкість НЕС за першим наближенням. Нехай процес $\xi(t)$ задовольняє рівняння (4), для якого

$$a(t,z,x) = a(t,x)z + \tilde{a}(t,z,x),$$
$$b(t,z,x) = b(t,x)z + \tilde{b}(t,z,x), \tag{49}$$
$$f(t,z,x,u) = f(t,x,u)z + \tilde{f}(t,z,x,u).$$

Припустимо, що функції $a(t,x)$, $b(t,x)$ та $\int_0^t f(t,x,u)\,\Pi(t,du)$ обмежені і неперервні, а функції $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ і $\tilde{f}$ задовольняють умову:

для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ та обмежена вимірна функція $l(x)$ такі, що

$$|\tilde{a}(t,z,x)| \le \varepsilon\, l(x)\,|z|,$$
$$|\tilde{b}(t,z,x)| \le \varepsilon\, l(x)\,|z|, \tag{50}$$
$$\left|\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t,z,x,u)\,\Pi(t,du)\right| \le \varepsilon\, l(x)\,|z|,$$

коли $|z| < \delta$.

Наступна теорема дозволяє говорити про стійкість рівняння (4) за стійкістю лінійного рівняння

$$d\xi(t) = a(t,x(t))\,\xi(t)\,dt + b(t,x(t))\,\xi(t)\,dw(t) +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} f(t,x(t),u)\,\xi(t)\,\nu(dt,du), \tag{51}$$

де функції a, b, f визначені в (49).

Теорема 5. *Якщо виконується умова* (50), *процес* $x(t)$ *— ергодичний, то в деякому околі точки* $z = 0$ *існує додатно визначена за Ляпуновим і неперервно диференційовна функція* $\hat{V}(t,z)$, *що задовольняє при деякому* $\gamma > 0$ *нерівність*

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} + \hat{L}_0 \hat{V} \le -\gamma |z|^2, \tag{52}$$

де

$$\hat{L}_0 \hat{V} = \hat{a}(t)\, z \frac{\partial \hat{V}}{\partial z} + \frac{1}{2}\hat{b}^2(t)\, z^2 \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial z^2} +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} [\hat{V}(t, z + f(t,x,u)\,z) - \hat{V}(t,z)]\,\Pi(t,du)\,\pi(dx),$$
$$\hat{a}(t) := \int_X a(t,x)\,\pi(dx), \quad \hat{b}^2(t) := \int_X b^2(t,x)\,\pi(dx).$$

Тоді розв'язок $\xi(t) \equiv 0$ *рівняння* (4) *стійкий.*

Доведення аналогічне доведенню теореми 3 з урахуванням умови (50) та того, що оператор $\hat{L}$ в (42) має вигляд $\hat{L} = \hat{L}_0 + R$, де $|R| \le c\varepsilon |z|^2$. Якщо ε таке, що $c\varepsilon \le \gamma/2$, то з умови (52) випливає

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} + \hat{L}\hat{V} = \frac{\partial \hat{V}}{\partial t} + \hat{L}_0 \hat{V} + R \le -\frac{\gamma}{2}|z|^2 < 0.$$

7. Застосування теорем про стійкість у фінансовій математиці. Розглянемо неперервну модель (7) динаміки вартості акцій

$$dS_t = a(x(t))\,S_t\,dt + b(x(t))\,S_t\,dw(t) \tag{53}$$

з обмеженими коефіцієнтами зростання $a(x)$ та мінливості $b(x)$; $x(t)$ — ергодичний напівмарковський процес.

Для такої моделі умови теореми 1 виконано, тому існує єдиний розв'язок S_t рівняння (53).

З (34) випливає, що рівняння (53) має розв'язок

$$S_t = S_0 \exp\left\{ \int_0^t \left(a(x(s)) - \frac{b^2(x(s))}{2} \right) ds + \int_0^t b(x(s))\,dw(s) \right\}. \tag{54}$$

Тому з прикладу 2, (35) – (40) при $\gamma \equiv 0$ маємо, що необхідною і достатньою умовою стійкості вартості S_t акцій в неперервній моделі (53) є умова (див. (54)):

$$\int_X \left(a(x) - \frac{b^2(x)}{2} \right) \pi(dx) < 0. \tag{55}$$

Якщо $a(x)$ та $b(x)$ не залежать від x, то ця умова спрощується:

$$a - \frac{b^2}{2} < 0.$$

Розглянемо стрибкоподібну модель (8) динаміки вартості акцій. Розв'язком рівняння (8) буде функція вартості

$$S_t = S_0 \exp\left\{ \int_0^t \left(a(x(s)) - \frac{b^2(x(s))}{2} \right) ds + \int_0^t b(x(s))\,dw(s) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma(x(s), u))\,\nu(ds, du) \right\}.$$

Необхідною і достатньою умовою стійкості динаміки вартості S_t акцій в однорідному випадку міри Π є умова

$$\int_X \left(a(x(s)) - \frac{b^2(x(s))}{2} \right) \pi(dx) + \int_X \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma(x, u))\,\Pi(du)\,\pi(dx) < 0. \tag{56}$$

Відмітимо, що коли a, b та γ не залежать від x, то умова стійкості (56) є такою:

$$\left(a - \frac{b^2}{2} \right) + \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma(u))\,\Pi(du) < 0.$$

В неоднорідному випадку (коли Π — неоднорідна міра) стійкість вартості акцій визначається константою d (див. приклад 2):

$$d := \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma(x(s), u))\,\Pi(t, du)\,dt < +\infty. \tag{57}$$

Коли $d = 0$, *то стрибки вартості акцій не впливають на стійкість, а коли* $d = +\infty$, *то стрибки роблять вартість акцій нестійкою для будь-яких функцій* $a(x)$ *та* $b(x)$, $x \in X$.

Тому на ринку цінних паперів з інфляційними катаклізмами слід дотримуватись умови (57), щоб коливання вартості акцій не були великими та не залежали від стрибків.

1. *Хасьминський Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
2. *Swishchuk A. V.* Stability of semi-Markov evolutionary stochastic systems in avereging and diffusion approximation schemes // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1994. – С. 255–269.
3. *Кушнер Г.* Стохастическая устойчивость и управление. – М: Мир, 1969. – 200 с.
4. *Koroliuk V. S.* Stability of autonomous dynamical systems with rapid Markov switchings //Укр. мат. журн. – 1991. – **33**, № 12. – С. 1176–1181.
5. *Blankenship G., Papanicolaou G.* Stability and control of stochastic systems with wide-band noise disturbance. 1 // SIAM J. App. Math. – 1978. – **34**, № 3. – P. 437–476.
6. *Pinsky M.* Stochastic stability and the Dirichlet problem // Appl. Math. – 1974. – **27**. – P. 311–350.
7. *Arnold L.* Stochastic differential equations: theory and applications. – Munich, 1973. – 227 p.
8. *Свищук А. В.* Предельные теоремы для стохастических дифференциальных уравнений с полумарковскими переключениями // Аналитические методы в вероятностных задачах. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1988. – С. 82–90.
9. *Swishchuk A. V.* Limit theorems for stochastic differential equations with semi-Markov switchings // Proc. Int. School "Evolut. Stoch. Syst.: Theory and Appl.", Ukraine, 3–14 May 1992. – P. 331–347. – ISBN 90-6764-161-8.
10. *Swishchuk A. V.* Hedging of options with mean-square criterion and semi-Markov rotatility // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 7. – С. 976–983.
11. *Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В.* К теории расчетов опционов европейского и американского типов. 1. Дискретное время. 2. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – **39**, вып. 1. – С. 23–130.
12. *Гихман И. И., Дороговцев А. Я.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 6. – С. 3–21.
13. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Полумарковские случайные эволюции. – Киев: Наук. думка, 1992. – 256 с.
14. *Korolyuk V. S., Swishchuk A. V.* Evolution of systems in random media. – Boca Raton: CRC Press. USA, 1995. – 356 p.
15. *Скороход А. В.* Исследование по теории случайных процессов. – Киев: Университет, 1961. – 180 с.

Одержано 21.12.95