УДК 513.88 + 517.984

М. М. Маламуд, канд. физ.-мат. наук (Донец. политехн. ин-т)

О ФОРМУЛЕ ОБОБЩЕННЫХ РЕЗОЛЬВЕНТ НЕПЛОТНО ЗАДАННОГО ЭРМИТОВА ОПЕРАТОРА

Вводятся и изучаются функция Вейля и запретный линеал, соответствующие заданному пространству граничных значений неплотно заданного эрмитова оператора. Запретный линеал охарактеризован в терминах предельных значений функции Вейля. Получен аналог формулы М. Г. Крейна для резольвент и найдена ее связь с пространством граничных значений.

Вводяться та вивчаються функція Вейля та заборонений лінеал, відповідні до заданого простору граничних значень нещільно заданого ермітова оператора. Заборонений лінеал охарактеризовано у термінах граничних значень функції Вейля. Одержано аналог формули М. Г. Крейна для резольвент та знайдено її зв'язок з простором граничних значень.

Настоящая работа является подробным изложением статьи [1]. Здесь с позиции пространства граничных значений (ПГЗ) — абстрактного варианта второй формулы Грина — изучаются некоторые вопросы расширения эрмитова оператора A с неплотной областью определения $D(A)$. Вводятся и исследуются функция Вейля $M(\lambda)$ и характеристическая функция $C(\lambda)$, соответствующие заданному ПГЗ. Показано, что функция Вейля является Q-функцией оператора A; найдена связь между угловым предельным значением $M(i\infty)$ функции Вейля на бесконечности и запретным линеалом V_Γ. Получен аналог формулы М. Г. Крейна для резольвент и дано его приложение к проблеме моментов.

Будем придерживаться следующих обозначений: $\mathfrak{H}$, $\mathcal{H}$ — сепарабельные гильбертовы пространства; $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ ($\mathfrak{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$) — множество ограниченных (замкнутых) линейных операторов из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$; если $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, то $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2] = [\mathcal{H}]$, $\mathfrak{C}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \mathfrak{C}(\mathcal{H})$; $\tilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{H})$ — совокупность замкнутых линейных отношений в $\mathcal{H}$, причем $\mathfrak{C}(\mathcal{H}) \subset \tilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{H})$ при отождествлении оператора с его графиком; $\mathcal{D}(T)$ и $\mathfrak{R}(T)$ — области определения и значений отношения $T \in \tilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{H})$, $T(f) = \{g \in \mathcal{H}; \{f, g\} \in T\}$ и, в частности, $T(0) = \{g \in \mathcal{H}; \{0, g\} \in T\}$; $T^{-1} = \{\{f, g\} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}; \{f, g\} \in T\}$; $\alpha T = \{\{f, \alpha g\}; \{f, g\} \in T\}$; $\rho(T)$ и $\sigma(T)$ — резольвентное множество и спектр отношения $T \in \tilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{H})$; $\hat{\rho}(A)$ — поле регулярности оператора A; $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$ — точечный, непрерывный и остаточный спектры отношения T; A — эрмитов оператор в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}_\lambda = (A - \lambda)\mathcal{D}(A)$, $\mathfrak{N}_\lambda \doteq \mathfrak{M}^\perp_{\bar{\lambda}}$, $n_\pm(A) = \dim \mathfrak{N}_{\pm i}$; $E_{\tilde{A}(\lambda)}$ — разложение единицы отношения $\tilde{A} = \tilde{A}^* \in \tilde{\mathfrak{C}}(\mathfrak{H})$, т. е. разложение единицы его операторной части $\tilde{A}' \in \tilde{\mathfrak{C}}(\mathfrak{H})$; P_L — ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на подпространство L; $\mathbb{C}_+(\mathbb{C}_-)$ – открытая верхняя (нижняя) полуплоскость, $T \upharpoonright L$ — сужение оператора T на линеал L.

1. Предварительные сведения. Напомним кратко основные положения теории расширений неплотно заданного эрмитова оператора A в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{H}_0 \doteq \overline{\mathcal{D}(A)}$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{H}_0^\perp$, P_0 — ортопроектор на $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{M}_\lambda \doteq (A - \lambda)\, \mathcal{D}(A)$, $\mathfrak{N}_\lambda \doteq \mathfrak{M}^\perp_{\bar{\lambda}}$ — дефектное подпространство. Для оператора A, действующего из $\mathfrak{H}_0$ в $\mathfrak{H}$ ($A \in \mathfrak{C}(\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H})$), корректно определен сопряженный оператор $A^* \in \mathfrak{C}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_0)$. Ясно, что $\overline{\mathcal{D}(A^*)} = \mathfrak{H}$, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$, $\mathfrak{N}_\lambda \subset \mathcal{D}(A^*)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и верны равенства

$$A^* f_A = P_0 A f_A \quad \forall f_A \in \mathcal{D}(A), A^* f_\lambda = \lambda P_0 f_\lambda \quad \forall f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda. \tag{1}$$

Утверждение 1. *Если* $\mathfrak{N} = \mathfrak{H}_0^\perp$, *то* $\mathfrak{M}_\lambda \cap \mathfrak{N} = \{0\}$ *при* $\lambda = \alpha + i\beta \neq \bar{\lambda}$.

Доказательство. Если $f_A \in \mathcal{D}(A)$, $(A-\lambda)f_A = n \in \mathfrak{N}$, то

$$0 = (n, f_A) = = \mathrm{Im}((A-\lambda)f_A, f_A) = -\mathrm{Im}(\lambda f_A, f_A) = -\mathrm{Im}\,\lambda \,\| f_A \|^2 \Rightarrow f_A = 0.$$

Утверждение 2 [2]. *Линеалы* $\mathcal{D}(A)$ *и* $\mathfrak{N}_\lambda$ *линейно независимы.*

Доказательство. Если $f_A + f_\lambda = 0$ при некоторых $f_A \in \mathcal{D}(A)$, $f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$, то $Af_A + \lambda f_\lambda = n \in \mathfrak{N}$. Отсюда $(A-\lambda)f_A = n$ и, следовательно, $f_A = n = 0$. Но тогда $f_\lambda = 0$.

Следующее предложение — обобщение известной формулы Неймана [3] на случай $\overline{\mathcal{D}(A)} \neq \mathfrak{H}$.

Предложение 1 [4–6]. *Пусть* $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{H}$. *Тогда*

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) + \mathfrak{N}_\lambda + \mathfrak{N}_{\bar\lambda}. \tag{2}$$

Кроме того, для каждой пары векторов $f \in \mathcal{D}(A^*)$, $n \in \mathfrak{N}$ *справедливо единственное разложение*

$$f = f_A + f_\lambda + f_{\bar\lambda}, \quad A^*f + n = Af_A + \lambda f_\lambda + \bar\lambda f_{\bar\lambda}, \tag{3}$$

в котором $f_A \in \mathcal{D}(A)$, $f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$, $f_{\bar\lambda} \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$.

Доказательство (ср. с[3]). Так как $\mathfrak{H} = (A-\lambda)\mathcal{D}(A) \oplus \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ $(\lambda \neq \bar\lambda)$, то $\forall \{f, n\} \in \mathcal{D}(A^*) \times \mathfrak{N}$ существуют $f_A \in \mathcal{D}(A)$ и $f_{\bar\lambda} \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ такие, что

$$A^*f - \lambda f + n = (A-\lambda)f_A + (\bar\lambda - \lambda)f_\lambda. \tag{4}$$

Применяя к (4) проектор P_0 и учитывая (1), получаем равенство $A^*(f - f_A - f_{\bar\lambda}) = \lambda P_0(f - f_A - f_{\bar\lambda})$, означающее, что $f_\lambda \doteq f - f_A - f_{\bar\lambda} \in \mathfrak{N}_\lambda$. Отсюда вытекает первое из равенств (3), а с учетом (4) — и второе.

Допуская отсутствие единственности в (3), приходим к равенствам

$$f'_A + f'_\lambda + f'_{\bar\lambda} = 0,\ Af'_A + \lambda f'_\lambda + \bar\lambda f'_{\bar\lambda} = 0,\ f'_A \in \mathcal{D}(A), f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda. \tag{5}$$

Умножая первое из них на λ и вычитая из второго, имеем $(A-\lambda)f'_A + (\bar\lambda - \lambda)f'_{\bar\lambda} = = 0$. Так как $\mathfrak{M}_\lambda \perp \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$, то $f'_A = f'_{\bar\lambda} = 0$. Но тогда из (5) следует $f'_\lambda = 0$.

Следствие 1 [2]. *Соотношение* $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{H}$ *эквивалентно линейной независимости линеалов* $\mathcal{D}(A)$, $\mathfrak{N}_\lambda$, $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ *в разложении* (2).

Причину неединственности разложения (2) раскрывает следующее предложение.

Предложение 2 [4]. *Векторы* $f_\lambda \in \mathfrak{N}$, $-f_{\bar\lambda} \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ *сравнимы по модулю* $\mathcal{D}(A)$ *(т. е.* $f_\lambda + f_{\bar\lambda} \in \mathcal{D}(A)$*), если и только если существует (единственный) вектор* $n \in \mathfrak{N}$ *такой, что*

$$f_\lambda = P_{\mathfrak{N}_\lambda} n,\ f_{\bar\lambda} = -P_{\mathfrak{N}_{\bar\lambda}} n,\ n \in \mathfrak{N} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0. \tag{6}$$

В этом случае $\|f_\lambda\| = \|f_{\bar\lambda}\|$ *и* $n = (\lambda - \bar\lambda)\left(Af_A + \lambda f_\lambda + \bar\lambda f_{\bar\lambda}\right)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть f_λ и $-f_{\bar\lambda}$ сравнимы по модулю $\mathcal{D}(A)$, т. е. существует вектор $f_A \in \mathcal{D}(A)$ такой, что

$$f_A + f_\lambda + f_{\bar\lambda} = 0,\ f_A \in \mathcal{D}(A);\ f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda;\ f_{\bar\lambda} \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}. \tag{7}$$

Применяя к (7) оператор A^* и учитывая (1), имеем $l \doteq Af_A + \lambda f_\lambda + \bar\lambda f_{\bar\lambda} \in \mathfrak{N}$.

Отсюда и из (7) находим

$$l=(A-\bar{\lambda})f_A+(\lambda-\bar{\lambda})f_\lambda=(A-\lambda)f_A+(\lambda-\bar{\lambda})f_{\bar{\lambda}}. \tag{8}$$

Полагая в (8) $n \doteq l/(\lambda-\bar{\lambda})$, получаем равенства (6). Кроме того, из (8) вытекают соотношения

$$\left\|P_{\mathfrak{N}_\lambda} l\right\|^2=\left\|(\lambda-\bar{\lambda})f_\lambda\right\|^2=\|l\|^2-\left\|(A-\bar{\lambda})f_A\right\|^2=\|l\|^2-\|(A-\alpha)f_A\|^2-$$
$$-\beta^2\|f_A\|^2=\|l\|^2-\|(A-\lambda)f_A\|^2=\left\|(\lambda-\bar{\lambda})f_{\bar{\lambda}}\right\|^2=\left\|P_{\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}} l\right\|^2, \tag{9}$$

означающие, что $\|f_\lambda\|=\|f_{\bar{\lambda}}\|$.

Достаточность. Покажем, что $\forall n\in\mathfrak{N}$ векторы $P_{\mathfrak{N}_\lambda}n$ и $-P_{\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}}n$ сравнимы по модулю $\mathcal{D}(A)$. Положив в (3) $f=0, n=n$, вычтем из второго равенства первое, умноженное на λ и $\bar{\lambda}$. В результате получим соотношения (8), в которых $l=n$. Отсюда

$$P_{\mathfrak{N}_\lambda}n=(\lambda-\bar{\lambda})f_\lambda,\ P_{\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}}n=(\lambda-\bar{\lambda})f_{\bar{\lambda}},\ n=Af_A+\lambda f_\lambda+\bar{\lambda}f_{\bar{\lambda}}. \tag{10}$$

Теперь из (10) и равенства $f_A+f_\lambda+f_{\bar{\lambda}}=0$ вытекает требуемое соотношение $P_{\mathfrak{N}_\lambda}n-P_{\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}}n=(\bar{\lambda}-\lambda)f_A\in\mathcal{D}(A)$.

Следствие 2 [4, 7]. *Пусть* $U_{\lambda\bar{\lambda}}\doteq(A-\bar{\lambda})(A-\lambda)^{-1}$. *Тогда*

$$\mathfrak{N}=\{n\in\mathfrak{H};\ P_{\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}}n=U_{\lambda\bar{\lambda}}P_{\mathfrak{M}_\lambda}n\}. \tag{11}$$

Доказательство. Если $n\in\mathfrak{N}$, то в силу (8) существует вектор $f_A\in\mathcal{D}(A)$ такой, что $P_{\mathfrak{M}_\lambda}n=(A-\lambda)f_A,\ P_{\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}}n=(A-\bar{\lambda})f_A$. Отсюда $P_{\mathfrak{M}_\lambda}n=U_{\bar{\lambda}\lambda}P_{\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}}n$. Обратно, если это равенство выполнено, то справедливы равенства (8) (с n вместо l), а значит, и (3), откуда $n\in\mathfrak{N}$. Соотношение (11) доказано.

Предложение 2 позволяет ввести следующее определение.

Определение 1. *Пусть* $\mathfrak{N}''_\lambda\doteq P_{\mathfrak{N}_\lambda}\mathfrak{N}$. *Равенством*

$$V_з P_{\mathfrak{N}_\lambda}n=P_{\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}}n,\ n\in\mathfrak{N}, \tag{12}$$

корректно определен изометрический оператор $V_з\in[\mathfrak{N}''_\lambda,\mathfrak{N}''_{\bar{\lambda}}]$, *называемый оператором запрета.*

Оператор запрета $V_з$ введен в [2], а в [4] выяснена его роль в описании самосопряженных расширений оператора A. В [4] показано, что линеалы $\mathfrak{N}''_\lambda$ замкнуты или нет лишь одновременно для всех $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. В первом случае оператор A называют регулярным, во втором — сингулярным [5].

Определение 2. *Подпространства* $\mathfrak{N}'_\lambda=\mathfrak{N}_\lambda\ominus\mathfrak{N}''_\lambda$ *называют полудефектными подпространствами оператора* A, *а числа* $n'_\pm(A)=\dim\mathfrak{N}'_{\pm i}$ *— полудефектными числами.*

Они, как легко видеть, являются дефектными подпространствами (числами) оператора $A'=P_0A(\mathcal{D}(A')=\mathcal{D}(A))$ в $\mathfrak{H}_0$.

2. Пространства граничных значений и собственные расширения. Здесь оператор A отождествляется с графиком: $A\leftrightarrow \mathrm{gr}\,A=\{\{f,Af\};f\in\mathcal{D}(A)\}$, а символ A^* обозначает сопряженное отношение. Во избежание путаницы сопряженный оператор из п. 1 обозначим $A^*_{\mathrm{op}} (\in \mathfrak{C}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_0))$, а A^* и A^*_{op} связаны очевидным равенством

$$A^* = \{\{f, f'\}; f \in \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A^*_{\mathrm{op}}), f' = A^*_{\mathrm{op}} f + n,\ n \in \mathfrak{N}\}. \tag{13}$$

Заметим, что в силу (1) и (13) формулы Неймана (3) эквивалентны прямому разложению (см.[6, 8])

$$A^* = A \dotplus \hat{\mathfrak{N}}_\lambda \dotplus \hat{\mathfrak{N}}_{\bar\lambda} \quad \left(\hat{\mathfrak{N}}_\lambda \doteq \left\{\{f_\lambda, \lambda f_\lambda\}; f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda\right\}\right), \tag{14}$$

а предложение 2 описывает компоненты векторов из неопределенной части $\hat{\mathfrak{N}} = \{0, \mathfrak{N}\}$ отношения A^* относительно разложения (14).

Линеал A^* является гильбертовым пространством относительно нормы

$$\left\|\hat f\right\|^2 = \|f\|^2 + \left\|f'\right\|^2 = \|f\|^2 + \left\|A^*_{\mathrm{op}} f\right\|^2 + \|n\|^2 \quad \left(\hat f = \left\{f, f'\right\}\right). \tag{15}$$

Определение 3. *Совокупность* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, *в которой* $\mathcal{H}$ — *сепарабельное гильбертово пространство, а* $\Gamma_i \in [A^*, \mathcal{H}]$, $i = 1, 2$, *назовем пространством граничных значений отношения* A^*, *если*

1) $(f', g) - (f, g') = \left(\Gamma_1 \hat f, \Gamma_2 \hat g\right)_{\mathcal{H}} - \left(\Gamma_2 \hat f, \Gamma_1 \hat g\right)_{\mathcal{H}}$ (16)
   $\forall \hat f = \left\{f, f'\right\}, \hat g = \left\{g, g'\right\} \in A^*$;

2) *отображение* $\Gamma : \hat f \to \left\{\Gamma_2 \hat f, \Gamma_1 \hat f\right\}$ *из* A^* *в* $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ *сюръективно.*

Легко видеть, что при выполнении условий 1, 2 $\ker \Gamma = A$.

Утверждение 3. *Для эрмитова оператора* A *с равными дефектными числами* $n_+(A) = n_-(A) \le \infty$ *существует ПГЗ.*

Доказательство. Пусть U_0 — изометрия из $\mathfrak{N}_{-i}$ на $\mathfrak{N}_i$, $\tilde U_0 \doteq U_0 \oplus U_0$, $P_{\pm i}$ — косые проекторы на $\hat{\mathfrak{N}}_{\pm i}$ в разложении (14) параллельно $A \dotplus \hat{\mathfrak{N}}_{\mp i}$, π_1 — ортопроектор на первое слагаемое в $\hat{\mathfrak{N}}_i$. Полагая

$$\mathcal{H} = \mathfrak{N}_i,\ \Gamma_1 = \pi_1(P_i + \tilde U_0 P_{-i}),\ \Gamma_2 = -i\,\pi_1(P_i + \tilde U_0 P_{-i}), \tag{17}$$

получаем равенство

$$(f', g) - (f, g') = 2i\,(f_i, g_i) - 2i\,(f_{-i}, g_{-i}) = (\Gamma_1 \hat f, \Gamma_2 \hat g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 \hat f, \Gamma_1 \hat g)_{\mathcal{H}},$$

которое совпадает с (16). Эпиморфность отображения Γ очевидна.

Определение 4. *Расширение* $\tilde A (\in \tilde{\mathfrak{C}}(\mathfrak{H}))$ *оператора* A *назовем собственным, если оно замкнуто и* $A \subset \tilde A \subset A^*$.

Определение 5. *Два собственных расширения называют дизъюнктными, если* $\tilde A' \cap \tilde A'' = A$, *и трансверсальными, если к тому же* $\tilde A' + \tilde A'' = A^*$.

Пусть $\mathcal{H}_i = \Gamma_i \mathfrak{N} = \Gamma_i \left\{0, \mathfrak{N}\right\}$ $(i=1,2)$ — линеалы в $\mathcal{H}$ (вообще говоря, незамкнутые), где, как и прежде, $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0$.

Определение 6. *Отношением запрета* V_Γ, *соответствующим ПГЗ* $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, *назовем линеал* $V_\Gamma \doteq \Gamma \hat{\mathfrak{N}} = \Gamma\{0, \mathfrak{N}\}$, *т. е.*

$$\{h_2, h_1\} \in V_\Gamma \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathfrak{N} : h_i = \Gamma_i \hat n,\ \hat n = \{0, n\},\ i = 1, 2. \tag{18}$$

Полагая в (16) $\hat f = \hat n = \{0, n\}$, $\hat g = \hat l = \{0, l\} \in \hat{\mathfrak{N}}$, видим, что отношение запрета V_Γ эрмитово: $V_\Gamma \subset V_\Gamma^*$.

С каждым ПГЗ связаны два трансверсальных самосопряженных расширения $\tilde{A}_i = \tilde{A}_i^*$, для которых

$$\tilde{A}_i = \ker \Gamma_i, \ i = 1,2 \ \ (\Gamma \tilde{A}_1 = \mathcal{H} \oplus \mathbf{0}, \Gamma \tilde{A}_2 = \mathbf{0} \oplus \mathcal{H}). \tag{19}$$

Из определений 3 – 6 непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 1. *Отображение* $\Gamma: \hat{f} \to \left\{\Gamma_2 \hat{f}, \Gamma_1 \hat{f}\right\}$ *гильбертова пространства* A^* (*с нормой* (15)) *в* $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ *сюръективно и задает топологический изоморфизм между* A^* / A *и* $\tilde{\mathcal{H}}$ *такой, что:*

1) *между собственными расширениями* $\tilde{A}$ *и замкнутыми линейными отношениями в* $\mathcal{H}$ (*т. е. подпространствами в* $\tilde{\mathcal{H}}$) *имеется биективное соответствие*

$$\tilde{A} = \tilde{A}_\theta \leftrightarrow \theta = \Gamma \tilde{A} = \left\{\left\{\Gamma_2 \hat{f}, \Gamma_1 \hat{f}\right\}; \hat{f} \in \tilde{A}\right\}; \tag{20}$$

2) $\left(\tilde{A}_\theta\right)^* = \tilde{A}_{\theta^*}$;

3) *сохраняется отношение включения* $\tilde{A}_{\theta_1} \subset \tilde{A}_{\theta_2} \Leftrightarrow \theta_1 \subset \theta_2$;

4) *расширения* $\tilde{A}_{\theta_1}$ *и* $\tilde{A}_{\theta_2}$ *дизъюнктны* $\Leftrightarrow \theta_1 \cap \theta_2 = \{0\}$;

5) *расширения* $\tilde{A}_{\theta_1}$ *и* $\tilde{A}_{\theta_2}$ *трансверсальны* $\Leftrightarrow \theta_1 + \theta_2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$;

6) *при* $\theta = V_\Gamma$ *расширение* $\tilde{A}_{V_\Gamma}$ — *эрмитово и имеет вид*

$$\tilde{A}_{V_\Gamma} = A \dotplus \mathfrak{N} = \{\{f, Af + n\}; f \in \mathcal{D}(A), n \in \mathfrak{N}\}; \tag{21}$$

7) $\tilde{A}_\theta \in \mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ (*т. е.* $\tilde{A}_\theta$ — *оператор*) $\Leftrightarrow \theta \cap V_\Gamma = \{0\}$.

Утверждения 1 – 6 — следствия определений 3 – 6. Утверждение 7 вытекает из утверждений 4 и 6, если заметить, что $\tilde{A}_\theta$ — оператор точно тогда, когда $\tilde{A}_\theta$ и $\tilde{A}_{V_\Gamma}$ — дизъюнктны, ибо $\tilde{A}_{V_\Gamma}(0) = \mathfrak{N}$.

Предложение 3. *Пусть* $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{H}_0 \neq \mathfrak{H}$, $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — *ПГЗ* A^*. *Тогда:*

1) *собственное расширение* $\tilde{A}$ *трансверсально* (*дизъюнктно*) *расширению* $\tilde{A}_2$, *если и только если существует оператор* $B \in [\mathcal{H}]$ ($B \in \mathfrak{C}(\mathcal{H})$) *такой, что*

$$\tilde{A} = \tilde{A}_B = \ker(\Gamma_1 - B\,\Gamma_2); \tag{22}$$

2) *если* $\theta_i \in \tilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{H})$, $i = 1, 2$, *и* $\rho(\theta_1) \cap \rho(\theta_2) \neq \emptyset$, *то трансверсальность* (*дизъюнктность*) *расширений* $\tilde{A}_{\theta_1}$ *и* $\tilde{A}_{\theta_2}$ *эквивалентна условию*

$$0 \in \rho[(\theta_1 - z)^{-1} - (\theta_2 - z)^{-1}] \ \ (0 \notin \sigma_P((\theta_1 - z)^{-1} - (\theta_2 - z)^{-1})) \tag{23}$$

$$\forall z \in \rho(\theta_1) \cap \rho(\theta_2);$$

3) *если* $\theta_1 \in \tilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{H})$, *а* $\theta_2 = B \in [\mathcal{H}]$, *то верны эквивалентности*

$$\ker(\theta_1 - B) = \{0\} \Leftrightarrow \theta_1 \cap \operatorname{gr} B = \{0\} \tag{23'}$$

$$0 \in \rho(\theta_1 - B) \Leftrightarrow \theta_1 \dotplus \operatorname{gr} B = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$$

(*т. е.* θ_1 *и* $\operatorname{gr} B$ *трансверсальны*);

4) *каждое диссипативное расширение* $\tilde{A}$ *является собственным;*

5) *расширение* $\tilde{A} = \tilde{A}_\theta$ *будет диссипативным* (*аккумулятивным*), *если и только если таковым будет* θ. *При этом* $n_-(\tilde{A}_\theta) = n_-(\theta)$ ($n_+(\tilde{A}_\theta) = n_+(\theta)$)

и, в частности, $\tilde{A}_\theta$ *— максимально диссипативно (аккумулятивно) точно тогда, когда таково* θ;

6) *расширение* $\tilde{A}_\theta$ *— эрмитово* $\Leftrightarrow$ *отношение* θ *— эрмитово. При этом* $n_\pm(\tilde{A}_\theta) = n_\pm(\theta)$.

Доказательство. 1. Дизъюнктность расширения $\tilde{A} = \tilde{A}_\theta$ и $\tilde{A}_2$ эквивалентна в силу (19) условию $\theta \cap (0 \oplus \mathcal{H}) = \{0\}$, означающему, что $\theta(0) = \{0\}$, т. е. θ — (замкнутый) оператор: $\theta = B \in \mathfrak{C}(\mathcal{H})$. В этом случае условие (20) принимает вид (22). Трансверсальность расширений $\tilde{A}_\theta$ и $\tilde{A}_2$ эквивалентна теперь условию

$$\theta \dotplus (0 \oplus \mathcal{H}) = \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \Leftrightarrow \mathrm{gr} B \dotplus (0 \oplus \mathcal{H}) = \tilde{\mathcal{H}}. \qquad (24)$$

Из (24) заключаем, что $\mathcal{D}(B) = \mathcal{H}$, т. е. $B \in [\mathcal{H}]$.

2. Если $z_0 \in \rho(\theta_1) \cap \rho(\theta_2)$, то отношения θ_i представляются в виде $\theta_i = \{\{(\theta_i - z_0)^{-1} f, f\}; f \in \mathcal{H}\}$, $i = 1, 2$. Отсюда ясно, что их трансверсальность (дизъюнктность) эквивалентна условию (23).

3. Эквивалентность (23′) очевидна. Пусть, далее, $\theta_1 \dotplus \mathrm{g}B\mathrm{r} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Тогда для всех $\{h_1, h_2\} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ найдутся векторы $\{f, f'\} \in \theta_1$ и $\{g, Bg\} \in \mathrm{gr}\, B$ такие, что $f + g = h_1, f' + Bg = h_2$. Отсюда при $h_1 = 0$ получаем $f' - Bf = h_2$ ($\forall h_2 \in \mathcal{H}$), т. е. $\mathfrak{R}(\theta_1 - B) = \mathcal{H}$ и, следовательно, с учетом (23′) $0 \in \rho(\theta_1 - B)$. Обратно, пусть $0 \in \rho(\theta_1 - B)$ и $\{h_1, h_2\} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Тогда существует $\{f, f'\} \in \theta_1$ такой, что $f' - Bf = h_2 - Bh_1$. Полагая $g = h_1 - f$, получаем равенство $\{f, f'\} + \{g, Bg\} = \{h_1, h_2\}$, доказывающее с учетом (23′) разложение $\theta_1 \dotplus \mathrm{g\,r}B = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

4. Пусть $\tilde{A}\ (\supset A)$ — диссипативен. Покажем, что $A \subset A^*$. Не нарушая общности, считаем, что $\rho(\tilde{A}) \neq \varnothing$. Полагая

$$T = (A - i)(A + i)^{-1} \in [\mathfrak{M}_{-i}, \mathfrak{M}_i],\ \tilde{T} = I - 2i(\tilde{A} + i)^{-1} \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}], \qquad (25)$$

видим, что оператор T изометричен из $\mathfrak{M}_{-i}$ на $\mathfrak{M}_i$, а $\tilde{T}$ — сжатие в $\mathfrak{H}$. Оператор $\tilde{T}\ (\supset T)$ имеет блочно-матричное представление

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} T & M \\ 0 & U \end{pmatrix}, M \in [\mathfrak{N}_i, \mathfrak{M}_i],\ U \in [\mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_{-i}].$$

Так как $TT^* = I_{\mathfrak{M}_{-i}}$, то

$$I - \tilde{T}\tilde{T}^* = \begin{pmatrix} -MM^* & -MU^* \\ -UM^* & I - UU^* \end{pmatrix} \geq 0.$$

Отсюда заключаем, что $M = 0$. Следовательно, $\tilde{T} = T \oplus U$ (ср. с [7], лемма 1.2). Возвращаясь к отношению $\tilde{A}$, из (25) получаем

$$\tilde{A} = \{\{(I - \tilde{T})f, i(I + \tilde{T})f\}; f = (A + i)f_A + f_i \in \mathfrak{M}_{-i} \oplus \mathfrak{N}_i = \mathfrak{H}\} =$$

$$= \{\{2if_A + (I - U)f_i, 2iAf_A + i(I + U)f_i\}; f_A \in \mathcal{D}(A),\ f_i \in \mathfrak{N}_i\} =$$

$$= \left\{ 2i\begin{pmatrix} f_A \\ Af_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_i \\ if_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Uf_i \\ iUf_i \end{pmatrix}; f_A \in \mathcal{D}(A),\ f_i \in \mathfrak{N}_i \right\} \subset A^*. \qquad (26)$$

Соотношение (26) означает, что расширение $\tilde{A}$ — собственное.

5. Пусть $\tilde{A} \supset A$ и $\operatorname{Im} \tilde{A} \geq 0$. Согласно утверждению 4 $\tilde{A} = \tilde{A}_\theta$, где (см. (20)) $\theta = \Gamma\tilde{A}$. Из (16) ясно, что θ и $\tilde{A}_\theta$ диссипативны лишь одновременно. Так как соответствие (20) сохраняет включение (лемма 1), то $\tilde{A}_\theta$ — максимальное диссипативное отношение точно тогда, когда таковым будет θ. Если же $n \doteq n_-(\tilde{A}_\theta) > 0$ ($\Leftrightarrow \rho(\tilde{A}_\theta) = \varnothing$) и $\tilde{A}' = \tilde{A}'_{\theta'}$ — его максимальное диссипативное расширение, то $n_-(\tilde{A}_\theta) = \dim(\tilde{A}'/\tilde{A})$, что вытекает из существования "башни" $\tilde{A}_0 \doteq \tilde{A}_\theta \subset \tilde{A}_{(1)} \subset \tilde{A}_{(2)} \subset \ldots \subset \tilde{A}_{(n)} \doteq \tilde{A}'$ диссипативных расширений, каждый "этаж" которой одномерен. Аналогично $n_-(\theta) = \dim(\theta'/\theta)$. Справедливость утверждения 4 вытекает теперь из изоморфизма

$$\theta'/\theta \cong \tilde{A}'/\tilde{A} = \left(\tilde{A}'/A\right)/\left(\tilde{A}/A\right) \ (\rho(\theta') \neq \varnothing, \rho(\tilde{A}') \neq \varnothing).$$

6. Так как отношение $\tilde{A}_\theta$ — эрмитово, если оно одновременно диссипативно и аккумулятивно, то утверждение 5 вытекает из предыдущего. Заметим еще, что максимальное эрмитово отношение $\tilde{A}$ будет максимально диссипативным лишь в случае $n_-(\tilde{A}) = 0$. В противном случае $(n_-(\tilde{A}) > 0)$ оно допускает максимальное диссипативное расширение $\tilde{A}'$, определяемое, например, нулевым продолжением оператора T вида (25): $\tilde{T} \restriction_{\mathfrak{N}_{-i}} = 0$.

Следствие 3. *Полудефектные числа оператора A равны дефектным числам отношения V_Γ, т. е*

$$n_\pm(V_\Gamma) = n'_\pm(A) \doteq (\dim \mathfrak{N}_{\pm i} \cap \mathfrak{H}_0). \tag{27}$$

Доказательство. Из формулы (21) для $\tilde{A}_{V_\Gamma}$ заключаем, что $n_\pm(\tilde{A}_{V_\Gamma}) = n'_\pm(A)$ ($= \dim \mathfrak{N}_{\pm i} \cap \mathfrak{H}_0$). С другой стороны, согласно утверждению 6 $n_\pm(V_\Gamma) = n_\pm(\tilde{A}_{V_\Gamma})$. Сопоставляя эти равенства, получаем (27).

Следствие 4. *Если самосопряженные расширения $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ оператора трансверсальны, то существует ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, для которого $\tilde{A}_i = \ker\Gamma_i$.*

Доказательство. Рассмотрим некоторое ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma'_1, \Gamma'_2\}$, для которого $\tilde{A}_2 = \ker\Gamma'_2$. Так как $\tilde{A}_1$ трансверсально $\tilde{A}_2$, то согласно предложению 2 $\tilde{A}_1 = \ker(\Gamma'_1 - B\,\Gamma'_2)$, $B \in [\mathcal{H}]$. Полагая $\Gamma_2 \doteq \Gamma'_2$, $\Gamma_1 \doteq \Gamma'_1 - B\,\Gamma'_2$, получаем искомое ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$.

***Замечание* 1.** Другие подходы к определению ПГЗ для неплотно заданного эрмитова оператора имеются в [9 — 11]. Случай $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{H}$ подробно обсуждается в [12].

3. Функция Вейля. 1. Пусть, как прежде, $\hat{\mathfrak{N}}_\lambda = \{\hat{f}_\lambda = \{\hat{f}_\lambda, \lambda f_\lambda\}; f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda\}$, π_1 — ортопроектор в $\hat{\mathfrak{N}}_\lambda$ на $\mathfrak{N}_\lambda \oplus \mathbf{0}$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0$.

Лемма 2. *Пусть $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ — расширение оператора A, $\tilde{A}'$ — его операторная часть,* $\mathfrak{N}_\lambda(\tilde{A}) \doteq \mathfrak{N}_\lambda \cap \mathcal{D}(\tilde{A})$, $\mathfrak{N}'(\tilde{A}) \doteq \tilde{A}(0)$, $\mathfrak{N}''(\tilde{A}) = \mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}'(\tilde{A})$,

$$U_{\zeta\lambda} \doteq I + (\lambda - \zeta)(\tilde{A} - \lambda)^{-1}, \ \lambda, \zeta \in \rho(\tilde{A}). \tag{28}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $U_{\zeta\lambda}\mathfrak{N}_\zeta = \mathfrak{N}_\lambda$, $U_{\zeta\lambda} \restriction \mathfrak{N}'(\tilde{A}) = I$ (*т. е.* $U_{\zeta\lambda} n = n \ \forall n \in \mathfrak{N}''(\tilde{A})$);

2) $$\mathfrak{N}_\lambda(\tilde{A}) = (\tilde{A}' - \lambda)^{-1}\mathfrak{N}''(\tilde{A}) = (\tilde{A} - \lambda)^{-1}\mathfrak{N}''(\tilde{A}) = (\tilde{A} - \lambda)^{-1}\mathfrak{N}; \tag{29}$$

3) $U_{\zeta\lambda}\mathfrak{N}''_{\xi}(\tilde{A}) = \mathfrak{N}''_{\lambda}(\tilde{A}) \quad \forall\lambda, \zeta \in \rho(\tilde{A})$. (30)

Доказательство. Пусть $f_\zeta \in \mathfrak{N}_\zeta$. Тогда $\forall f_A \in \mathcal{D}(A)$:

$$((A-\bar{\lambda})f_A, U_{\zeta\lambda}f_\zeta) = ((A-\bar{\lambda})f_A, f_\zeta + (\lambda-\zeta)(\tilde{A}-\lambda)^{-1}f_\zeta) = ((A-\bar{\lambda})f_A, f_\zeta) + (\lambda-\bar{\zeta})(f_A, f_\zeta) = ((A-\bar{\zeta})f_A, f_\zeta) = 0.$$

Следовательно, $U_{\zeta\lambda}\mathfrak{N}_\zeta \subset \mathfrak{N}_\lambda$ и $U_{\lambda\zeta}\mathfrak{N}_\lambda \subset \mathfrak{N}_\zeta$. А так как для всех $\lambda, \zeta \in \rho(\tilde{A})$ операторы $U_{\zeta\lambda}$ обратимы и $(U_{\zeta\lambda})^{-1} = U_{\lambda\zeta}$, то первое утверждение доказано, причем равенство $U_{\zeta\lambda}\restriction\mathfrak{N}'(\tilde{A}) = I$ вытекает из того, что $(\tilde{A}-\lambda)^{-1}n = 0 \quad \forall n \in \mathfrak{N}'(\tilde{A})$.

Далее, $(\tilde{A}-\lambda)^{-1}\mathfrak{N}'(\tilde{A}) = 0$, а $\forall h \in \mathfrak{N}''(\tilde{A})$ и $\forall f_A \in \mathcal{D}(A)$

$$((\tilde{A}'-\lambda)^{-1}h, (A-\bar{\lambda})f_A) = ((\tilde{A}-\lambda)^{-1}h, (A-\bar{\lambda})f_A) = (h, f_A) = 0, \tag{31}$$

т. е. $(\tilde{A}'-\lambda)^{-1}\mathfrak{N}''(\tilde{A}) \subset \mathfrak{N}''_\lambda(\tilde{A})$. С другой стороны, $\mathcal{D}(\tilde{A}) = (\tilde{A}'-\lambda)^{-1}\mathfrak{H}$. Поэтому в силу (31) $(\tilde{A}'-\lambda)^{-1}h \in \mathfrak{N}_\lambda$, только если $h \perp \mathcal{D}(A)$, т. е. $h \in \mathfrak{N}$.

И, наконец, третье утверждение вытекает из равенства

$$U_{\zeta\lambda}\mathfrak{N}''_{\xi}(A) = [I + (\lambda-\zeta)(\tilde{A}-\lambda)^{-1}](\tilde{A}'-\zeta)^{-1}\mathfrak{N}''(\tilde{A}) = [(\tilde{A}'-\zeta)^{-1} + (\lambda - \zeta)(\tilde{A}'-\lambda)^{-1}(\tilde{A}'-\zeta)^{-1}]\mathfrak{N}''(\tilde{A}) = (\tilde{A}'-\lambda)^{-1}\mathfrak{N}''(\tilde{A}) = \mathfrak{N}''_\lambda(\tilde{A}).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — *ПГЗ отношения* A^*. *Тогда:*

1) *для всех* $\lambda \in \rho(\tilde{A}_2)$ *корректно определены оператор-функции*

$$\hat{\gamma}(\lambda) = (\Gamma_2\restriction_{\hat{\mathfrak{N}}_\lambda})^{-1}, \; \gamma(\lambda) = \pi_1\hat{\gamma}(\lambda), \tag{32}$$

которые голоморфны в $\rho(\tilde{A}_2)$ *и принимают значения в* $[\mathcal{H}, \hat{\mathfrak{N}}_\lambda]$ *и* $[\mathcal{H}, \mathfrak{N}_\lambda]$ *соответственно и* $\exists\,\gamma(\lambda)^{-1} \in [\mathfrak{N}_\lambda, \mathcal{H}]$;

2) *функция* $\gamma(\lambda)$ *является* γ*-полем расширения* $\tilde{A}_2$, *т. е.*

$$\gamma(\lambda) = U_{\zeta\lambda}\gamma(\zeta) = \gamma(\zeta) + (\lambda-\zeta)(A_2-\lambda)^{-1}\gamma(\zeta) \quad \forall\lambda, \zeta \in \rho(\tilde{A}_2). \tag{33}$$

Доказательство. 1. При каждом $\lambda \in \rho(\tilde{A}_2)$ справедливо прямое разложение

$$A^* = \tilde{A}_2 \dotplus \hat{\mathfrak{N}}_\lambda. \tag{34}$$

Действительно, по вектору $\{f, f'\} \in A^*$ определим вектор $g \in \mathcal{D}(\tilde{A}_2)$ равенством $g = (A_2-\lambda)^{-1}(f'-\lambda f)$. Тогда $\forall f_A \in \mathcal{D}(A)$

$$((A-\bar{\lambda})f_A, f-g) = ((A-\bar{\lambda})f_A, f) - ((A-\bar{\lambda})f_A, (\tilde{A}_2-\lambda)^{-1}(f'-\lambda f)) = ((A-\bar{\lambda})f_A, f) - (f_A, f'-\lambda f) = (Af_A, f) - (f_A, f') = 0,$$

т. е. $f_\lambda \doteq f - g \in \mathfrak{N}_\lambda$. Поэтому если $g' \doteq [I + \lambda(\tilde{A}_2-\lambda)^{-1}](f'-\lambda f)$, то

$$\{f, f'\} = \{g, g'\} + \{f_\lambda, \lambda f_\lambda\} \in \tilde{A}_2 + \hat{\mathfrak{N}}_\lambda. \tag{35}$$

Равенство (35) доказывает разложение (34), ибо единственность в (34) и (35) очевидна (хотя разложение $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(\tilde{A}_2) + \mathfrak{N}_\lambda$, вообще говоря, непрямое).

В силу (34) $\ker(\Gamma_2\restriction_{\hat{\mathfrak{N}}_\lambda}) = \{0\}$ и $\Gamma_2 A^* = \Gamma_2\hat{\mathfrak{N}}_\lambda = \mathcal{H}$. Следовательно, Γ_2 изоморфно отображает $\hat{\mathfrak{N}}_\lambda$ на $\mathcal{H}$ и оператор-функции $\hat{\gamma}(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$ вида (32) определены корректно.

2. Так как $\hat{\gamma}(\zeta)$ — изоморфизм из $\mathcal{H}$ на $\hat{\mathfrak{N}}_\zeta$, то для каждого $\hat{f}_\zeta = \{f_\zeta, \zeta f_\zeta\} \in \hat{\mathfrak{N}}_\zeta$ найдется $h \in \mathcal{H}$ такой, что $\hat{f}_\zeta = \hat{\gamma}(\zeta)\, h$. Поэтому полагая $\tilde{U}_{\zeta\lambda} = U_{\zeta\lambda} \oplus U_{\zeta\lambda}$, из леммы 2 получаем

$$\Gamma_2(\tilde{U}_{\zeta\lambda}\hat{f}_\zeta) = \Gamma_2\begin{pmatrix} U_{\zeta\lambda} f_\zeta \\ \lambda U_{\zeta\lambda} f_\zeta \end{pmatrix} = \Gamma_2\begin{pmatrix} f_\zeta \\ \zeta f_\zeta \end{pmatrix} + (\lambda-\zeta)\,\Gamma_2\begin{pmatrix} \left(\hat{A}_2-\lambda\right)^{-1} f_\zeta \\ f_\zeta + \lambda\left(\hat{A}_2-\lambda\right)^{-1} f_\zeta \end{pmatrix} =$$

$$= \Gamma_2 \hat{f}_\zeta = \Gamma_2\hat{\gamma}(\zeta)\, h = h. \tag{36}$$

Так как $U_{\zeta\lambda}\hat{f}_\zeta \in \hat{\mathfrak{N}}_\lambda$, $\Gamma_2\hat{\gamma}(\lambda)\, h = h$, а Γ_2 — изоморфизм из $\hat{\mathfrak{N}}_\lambda$ на $\mathcal{H}$, то вытекающее из (36) равенство $\hat{\gamma}(\lambda) = \tilde{U}_{\zeta\lambda}\hat{\gamma}(\zeta)$ доказывает (33).

Определение 7. *Оператор-функции $M(\lambda)$ и $C(\lambda)$, определенные равенствами*

$$M(\lambda)\,\Gamma_2\hat{f}_\lambda = \Gamma_1\hat{f}_\lambda, \;(\hat{f}_\lambda = \{f_\lambda, \lambda f_\lambda\} \in \hat{\mathfrak{N}}_\lambda, \lambda \in \rho(\tilde{A}_2)), \tag{37}$$

$$C(\lambda)\,(\Gamma_1 + i\,\Gamma_2)\hat{f}_\lambda = (\Gamma_1 - i\,\Gamma_2)\hat{f}_\lambda, \; \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{38}$$

назовем функцией Вейля и характеристической функцией эрмитова оператора A, соответствующими ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$.

Определение 8 [7]. *Операторнозначную функцию $Q(z)$ со значениями в $[\mathcal{H}]$ называют Q-функцией эрмитова оператора A, принадлежащей его самосопряженному расширению $\tilde{A}$, если*

$$Q(z) - Q^*(\zeta) = (z - \bar{\zeta})\,\gamma^*(\zeta)\,\gamma(z) \quad \forall z, \zeta \in \rho(\tilde{A}_z). \tag{39}$$

Здесь $\gamma(z)$ — γ-поле расширения $\tilde{A} = \tilde{A}^*$.

Предложение 4. *Оператор-функции $M(z)$ и $C(z)$, соответствующие ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, определены корректно, голоморфны в $\rho(\tilde{A}_2)$ и принимают значения в $[\mathcal{H}]$. Кроме того, $M(z)$ является Q-функцией оператора A, соответствующей расширению $\tilde{A}_2$ ($= \ker\Gamma_2$).*

Доказательство. Корректность определения и голоморфность $M(z)$ в $\rho(\tilde{A}_2)$ вытекает из равенства

$$M(z) = \Gamma_1\hat{\gamma}(z) \quad \forall z \in \rho(\tilde{A}_2), \tag{40}$$

которое с учетом (32) эквивалентно определению (37).

Применим теперь к векторам $\hat{f}_z \in \hat{\mathfrak{N}}_z$, $\hat{f}_\zeta \in \hat{\mathfrak{N}}_\zeta$ формулу Грина

$$(z-\bar{\zeta})(f_z, f_\zeta) = (\Gamma_1\hat{f}_z, \Gamma_2\hat{f}_\zeta)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2\hat{f}_z, \Gamma_1\hat{f}_\zeta)_{\mathcal{H}} = (M(z)\Gamma_2\hat{f}_z, \Gamma_2\hat{f}_\zeta)_{\mathcal{H}} -$$

$$- (\Gamma_2\hat{f}_z, M(\zeta)\Gamma_2\hat{f}_\zeta)_{\mathcal{H}} = ((M(z) - M^*(\zeta))\Gamma_2\hat{f}_z, \Gamma_2\hat{f}_\zeta)_{\mathcal{H}}. \tag{41}$$

Согласно определению функций $\hat{\gamma}(z)$ и $\gamma(z)$ верны равенства

$$\hat{\gamma}(z)\Gamma_2\hat{f}_z = \hat{f}_z, \;\; \gamma(z)\Gamma_2\hat{f}_z = f_z, \;\; \gamma(\zeta)\Gamma_2\hat{f}_\zeta = f_\zeta. \tag{42}$$

Поэтому, полагая $\Gamma_2\hat{f}_z = h_1$, $\Gamma_2\hat{f}_\zeta = h_2$, из (41), (42) получаем

$$((M(z) - M^*(\zeta))h_1, h_2) = (z-\bar{\zeta})(\gamma(z)h_1, \gamma(\zeta)h_2) = (z-\bar{\zeta})(\gamma^*(\zeta)\gamma(z)h_1, h_2). \tag{43}$$

Так как $\Gamma_2\hat{\mathfrak{N}}_z = \Gamma_2\hat{\mathfrak{N}}_\zeta = \mathcal{H}$, то равенство (39) доказано.

Из (39) при $\zeta = z$ заключаем, что $\dfrac{M(z)-M^*(z)}{z-\bar z} \ge 0$. Поэтому $-i \in \rho(M(z))$ и в силу (37), (38)

$$C(\lambda) = (M(\lambda) - i)(M(\lambda) + i)^{-1}, \ \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{44}$$

Из (44) ясна корректность определения $C(\lambda)$, ее голоморфность в $\mathbb{C}_+$ и сжимаемость в $\mathbb{C}_+$. Предложение доказано.

Следствие 5. *Функция Вейля $M(\lambda) = M^*(\bar\lambda)$ и характеристическая функция $C(\lambda)$, соответствующие ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, имеют следующие свойства:*

1) $M(\lambda) \in (R)_{\mathcal{H}} (\Leftrightarrow \operatorname{Im}\lambda \operatorname{Im} M(\lambda) > 0 \ \ \forall\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-)$;

2) $0 \in \rho(\operatorname{Im} M(\lambda)) \ \ \forall\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- \ (\operatorname{Im} M(\lambda) \doteq \dfrac{M(\lambda) - M^*(\lambda)}{2i})$;

3) $\| C(\lambda) \| < 1 \ \ \forall\lambda \in \mathbb{C}_+$.

Следствие 6. *Два простых эрмитовых оператора A' и A'' с неплотными, вообще говоря, областями определения изометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда при некотором выборе ПГЗ $\{\mathcal{H}', \Gamma_1', \Gamma_2'\}$ и $\{\mathcal{H}'', \Gamma'', \Gamma_2''\}$ отношений $(A')^*$ и $(A'')^*$ совпадают соответствующие функции Вейля $M''(\lambda)$ и $M'''(\lambda)$ или характеристические функции $C'(\lambda)$ и $C''(\lambda)$. При этом расширения $\tilde A_i' = \ker\Gamma_i'$ и $\tilde A_i'' = \ker\Gamma_i''$ также унитарно эквивалентны.*

Лемма 4. *Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ отношения A^*, $\hat{\mathfrak{N}}''_\lambda(\tilde A) = \{\hat f_\lambda; f_\lambda \in \mathfrak{N}''_\lambda(\tilde A)\}$. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\gamma^*(\bar\lambda) = \Gamma_1\{(\tilde A_2 - \lambda)^{-1}, I + \lambda(\tilde A_2 - \lambda)^{-1}\}; \tag{45}$$

$$\ker(\Gamma_i \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}) = \{\{0, f\}, f \in A_i(0)\}, \ i = 1, 2; \tag{46}$$

$$\Gamma_i \hat{\mathfrak{N}}''_\lambda(\tilde A_i) = \Gamma_i \hat{\mathfrak{N}}(\tilde A_i) = \mathcal{H}_i (\doteq \Gamma_i \hat{\mathfrak{N}}); \tag{47}$$

$$\hat\gamma(\lambda)\mathcal{H}_i = \hat{\mathfrak{N}}''_\lambda(\tilde A_i), \ \gamma(\lambda)\mathcal{H}_i = \mathfrak{N}''_\lambda(\tilde A_i). \tag{48}$$

Доказательство. Из (33) вытекает равенство

$$\hat\gamma(z) - \hat\gamma(\zeta) = (z - \zeta)\{(\tilde A_2 - z)^{-1}, I + z(\tilde A_2 - z)^{-1}\}\gamma(\zeta). \tag{49}$$

Применяя к (49) оператор Γ_1 и учитывая (40), получаем

$$M(z) - M(\zeta) = \Gamma_1(\hat\gamma(z) - \hat\gamma(\zeta)) = (z - \zeta)\Gamma_1\{(A_2 - z)^{-1}, \ I + z(\tilde A_2 - z)^{-1}\}\gamma(\zeta). \tag{50}$$

Функция Вейля $M(z)$, будучи Q-функцией, удовлетворяет тождеству (39), сопоставив которое с (50), получим (45). Отметим еще, что равенство (45) можно извлечь прямо из формулы Грина.

Далее, равенство (46) очевидно, а (47) вытекает из соотношения (29) и тождества

$$\{(\tilde A_i - \lambda)^{-1}h, \lambda(\tilde A_i - \lambda)^{-1}h\} = \{0, -h\} + \{(\tilde A_i - \lambda)^{-1}h, h + \lambda(\tilde A_i - \lambda)^{-1}h\}, \tag{51}$$

в котором $\{(\tilde A_i - \lambda)^{-1}h, h + \lambda(\tilde A_i - \lambda)^{-1}h\} \in \tilde A_i = \ker\Gamma_i, \ i = 1, 2$.

Соотношения (48) следуют из равенства (47) и (32). Лемма доказана.

2. Охарактеризуем запретное отношение V_Γ в терминах предельных значений функции Вейля. Для этого введем оператор

$$V''_\Gamma \doteq \Gamma\hat{\mathfrak{N}}''(\tilde A_2) = \{\Gamma_2, \Gamma_1\}\hat{\mathfrak{N}}''(\tilde A_2), \ \hat{\mathfrak{N}}''(\tilde A_2) = \{0, \mathfrak{N}''(\tilde A_2)\}. \tag{52}$$

Тот факт, что отношение V''_Γ из (52) в действительности является оператором, вытекает из соотношений

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}'(\tilde{A}_2) \oplus \mathfrak{N}''(\tilde{A}_2),$$

$$V_\Gamma = \Gamma\hat{\mathfrak{N}} = \Gamma\{0, \tilde{A}_2(0)\} \dotplus \Gamma\hat{\mathfrak{N}}''(\tilde{A}_2) = \{0, V_\Gamma(0)\} \dotplus V_\Gamma''. \qquad (52')$$

Оператор V_Γ'', вообще говоря, не совпадает с операторной частью V_Γ' отношения V_Γ, но $V_\Gamma'' = V_\Gamma' = V_\Gamma$ при $V_\Gamma(0) = \{0\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ *— ПГЗ отношения* A^*, $\mathcal{H}_i \doteq \Gamma_i\hat{\mathfrak{N}}$, $i = 1, 2$. *Тогда*

1) $h \in \mathcal{H}_2 = \mathcal{D}(V_\Gamma) \Leftrightarrow \lim\limits_{y\uparrow\infty} y \operatorname{Im}(M(iy)h, h) < \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{y\uparrow\infty} y \operatorname{Im}(M(-iy)h, h) < \infty;$ (53)

2) *для каждого* $h \in \mathcal{H}_2$ *существуют сильные пределы*

$$M(i\infty) \doteq s - \lim_{y\uparrow\infty} M(iy)h = s - \lim_{y\uparrow\infty} M(-iy)h \ \text{ и } \ M(i\infty)h = V_\Gamma'' h, \qquad (54)$$

причем $M(i\infty)h = V_\Gamma h$, *если* V_Γ *— оператор (т.е.* $V_\Gamma(0) = \{0\}$*);*

3) *для каждого* $h \in \mathcal{H} \ominus V_\Gamma(0)$ *справедливо равенство*

$$s - \lim_{y\uparrow\infty} \frac{M(iy)}{iy} h = 0; \qquad (55)$$

4) *для каждого* $h \in \overline{V}_\Gamma(0) \setminus \{0\}$ *существует сильный предел*

$$B_M h \doteq s - \lim_{y\uparrow\infty} \frac{M(iy)}{iy} h = \gamma^*(\lambda) P_{A_2(0)} \gamma(\lambda) h \neq 0 \ \ (\forall \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-), \qquad (56)$$

причем $\mathfrak{R}(B_M) \subset V_\Gamma(0)$, $\overline{\mathfrak{R}(B_M)} = \overline{V_\Gamma(0)}$.

Доказательство. Пусть E_t — разложение единицы для операторной части $\tilde{A}_2'$ отношения $\tilde{A}_2 = \ker\Gamma_2$. Из (39) имеем

$$y\left(\frac{M(iy) - M(iy)^*}{2i} h, h\right) = y^2(\gamma^*(iy)\gamma(iy)h, h) = y^2 \| \gamma(iy)h \|^2. \qquad (57)$$

Согласно (33)

$$\gamma(iy)h = [I + i(y-1)(\tilde{A}_2 - iy)^{-1}]\gamma(i)h = P_{A_2(0)}\gamma(i)h + (\tilde{A}_2' - i)(\tilde{A}_2' - iy)^{-1}\gamma(i)h. \quad (58)$$

Из соотношений (57), (58) выводим

$$y \operatorname{Im}(M(iy)h, h) = y^2 \| P_{A_2(0)}\gamma(i)h \|^2 + y^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2+1}{t^2+y^2} d(E_t \gamma(i)h, \gamma(i)h). \qquad (59)$$

Условие $P_{A_2(0)}\gamma(i)h = 0$ является необходимым для равномерной ограниченности для каждого $y > 0$ правой части в (59). Считая его выполненным, из (59) и теоремы Лебега о монотонной сходимости заключаем, что

$$\lim_{y\uparrow\infty} y^2 \| \gamma(iy)h \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t^2+1)\, d(E_t\gamma(i)h, \gamma(i)h) = \left\| \tilde{A}_2' \gamma(i)h \right\|^2 + \left\| \gamma(i)h \right\|^2. \quad (60)$$

Таким образом, левая часть в (60) конечна точно тогда, когда $\gamma(i)h \in \mathcal{D}(\tilde{A}_2) = \mathcal{D}(\tilde{A}_2')$, т.е. $\gamma(i)h \in \mathfrak{N}_i''(\tilde{A}_2)$ $(= \mathcal{D}(\tilde{A}_2) \cap \mathfrak{N}_i)$. Эквивалентность (53) вытекает теперь из соотношения $\mathfrak{N}_i''(\tilde{A}_2) = \gamma(i)\mathcal{H}_2$ (см. (48)).

2. Пусть $h_2 \in \mathcal{H}_2$. Тогда найдется единственный вектор $n \in \mathfrak{N}''(\tilde{A}_2)$ такой, что $h_2 = \Gamma_2\{0, -n\}$. В силу (52) $h_1 \doteq \Gamma_1\{0, -n\} = V_\Gamma'' h_2$. Поэтому из определения

(33) функции Вейля и (47), (51) получаем

$$M(\lambda)h_2 = \Gamma_1\hat{\gamma}(\lambda)\Gamma_2\{0, -n\} = \Gamma_1\hat{\gamma}(\lambda)\Gamma_2\{(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1}n, \lambda(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1}n\} =$$
$$= \Gamma_1\{(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1}n, \lambda(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1}n\}.$$

Следовательно, для каждого $h_2 \in \mathcal{H}_2$ существует сильный предел

$$s - \lim_{y\uparrow\infty} M(iy)h_2 = \lim_{y\uparrow\infty} \Gamma_1\{(\tilde{A}_2 - iy)^{-1}n, iy(\tilde{A}_2 - iy)^{-1}n\} =$$
$$= \Gamma_1\{0, -n\} = h_1 = V_\Gamma'' h_2. \tag{61}$$

Равенство (61) доказывает (54) и утверждение 2.

3. Из леммы 4 вытекает следующая эквивалентность:

$$h \in \mathcal{H}_1 \ominus V_\Gamma(0) \Leftrightarrow \gamma(\lambda)h \perp A_2(0) \ \ \forall\lambda \in \rho(\tilde{A}_2). \tag{62}$$

Действительно, в силу (45) $\Gamma_1\{0, f\} = \gamma^*(\lambda)f \ \ \forall f \in A_2(0), \lambda \in \rho(\tilde{A}_2)$. А так как $V_\Gamma(0) = \{\Gamma_1\{0, f\}; f \in A_2(0)\}$, то $h \perp V_\Gamma(0) \Leftrightarrow h \perp \gamma^*(\lambda)A_2(0) \Leftrightarrow \gamma(\lambda)h \perp A_2(0)$. Впрочем, эквивалентность (62) легко следует из формулы Грина (16) при $\hat{f} = \hat{f}_\lambda = \{\gamma(\lambda)h, \lambda\gamma(\lambda)h\}$ и $\hat{g} = \hat{n} = \{0, n\} \in \tilde{A}_2$.

Далее, из тождеств (39) и (33) находим

$$\frac{M(\lambda)}{\lambda}h = \frac{M^*(i)}{\lambda}h + \left(1 + \frac{i}{\lambda}\right)\gamma^*(i)\gamma(\lambda)h =$$
$$= \left(1 + \frac{i}{\lambda}\right)\gamma^*(i)\left\{P_{A_2(0)}\gamma(i)h + \left[I + (\lambda - i)(\tilde{A}_2' - \lambda)^{-1}\right]\gamma(i)h\right\}. \tag{63}$$

Переходя в (63) к пределу при $\lambda = iy \to i\infty$ и учитывая (45), получаем

$$s - \lim_{y\uparrow\infty} \frac{M(iy)}{iy}h = \gamma^*(i)P_{A_2(0)}\gamma(i)h = \Gamma_1\left\{0, P_{A_2(0)}\gamma(i)h\right\}. \tag{64}$$

Соотношения (55), (56), а также равенство $B_M = \gamma^*(i)P_{A_2(0)}\gamma(i)$ и включение $\Re(B_M) \subset V_\Gamma(0)$ вытекают из (64) и (62). Теорема доказана.

***Замечание* 2.** Факт существования сильного предела в (54) (но без связи с V_Γ) для векторов h, удовлетворяющих условию (53), справедлив для любой R-функции и легко вытекает из ее интегрального представления

$$M(z) = A + Bz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + tz}{t - z} dF(t),\ A = A^*, B \geq 0, \ \int_{-\infty}^{\infty} dF(t) \in [\mathcal{H}]. \tag{65}$$

Действительно,

$$y\,\mathrm{Im}\,(M(iy)h, h) = y^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + t^2}{t^2 + y^2} d(F(t)h, h) + y^2(Bh, h) \tag{66}$$

и следовательно, предел в (66) конечен точно тогда, когда $h \in \ker B \cap \Sigma_2(F)$, где $\Sigma_2(F) = \left\{h \in \mathcal{H};\ \int_{-\infty}^{\infty} t^2\, d(F(t)h, h) < \infty\right\}$. В этом случае

$$M(i\infty)h \doteq s - \lim_{y\uparrow\infty} M(iy)h = s - \lim_{y\uparrow\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ity + 1}{t - iy} dF(t)h = -\int_{-\infty}^{\infty} dF(t)h. \tag{67}$$

***Замечание* 3.** Утверждения 3 и 4 теоремы 1 могут быть также выведены из (53), (54) переходом к другому ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1', \Gamma_2'\}$, где $\Gamma_1' = -\Gamma_2$, $\Gamma_2' = \Gamma_1$, либо из леммы 4.

Заметим, что $\dim \mathcal{H}_2 + \dim V_\Gamma(0) = \dim \mathfrak{N}$, причем равенство (55) выполнено для каждого $h \in \mathcal{H}$ точно тогда, когда $\tilde{A}_2$ — оператор. В этом случае верна эквивалентность

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{H} \Leftrightarrow \lim_{y \uparrow \infty} y \operatorname{Im}(M(iy)h, h) = \infty \quad \forall h \in \mathcal{H} \setminus \{0\}. \tag{68}$$

Далее, соотношение (56), эквивалентное наличию линейного члена $B_M z \dotplus B z$ в (65), характеризует расширения $\tilde{A}_2$, не являющиеся операторами (т.е. $A_2(0) \neq \{0\}$). Благодаря условию (56) функции Вейля расширений $\tilde{A}_2 \in \tilde{\mathfrak{C}}(\mathfrak{H}) \setminus \mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ играют существенную роль в исследованиях Б.С.Павлова и его сотрудников [13].

***Замечание* 4.** Пределы по мнимой оси в (54)–(56) можно заменить угловыми пределами при $\lambda \to \infty, \lambda \in \Pi_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C}_+; 0 < \varepsilon < \arg\lambda < \pi - \varepsilon\}$.

3. Охарактеризуем угловые граничные значения функции Вейля при $\lambda \to a = \overline{a}$. Для этого введем обозначения

$$\mathfrak{N}_a = \mathfrak{M}_a^\perp, \hat{\mathfrak{N}}_a = \{\mathfrak{N}_a, a\mathfrak{N}_a\},$$
$$\hat{\mathfrak{N}}'_a(\tilde{A}_2) = \tilde{A}_2 \cap \hat{\mathfrak{N}}_a, \hat{\mathfrak{N}}''_a(\tilde{A}_2) = \hat{\mathfrak{N}}_a \ominus \hat{\mathfrak{N}}''_a(\tilde{A}_2) \tag{69}$$

и определим эрмитовы отношение V_a и оператор V''_a (ср. с (52)):

$$V_a \dotplus \Gamma\hat{\mathfrak{N}}_a = \{\{\Gamma_2 \hat{f}_a, \Gamma_1 \hat{f}_a\}; \hat{f}_a \in \hat{\mathfrak{N}}_a\},$$
$$V''_a = \Gamma\hat{\mathfrak{N}}''_a = \{\{\Gamma_2 \hat{f}_a, \Gamma_1 \hat{f}_a\}; \hat{f}_a \in \hat{\mathfrak{N}}''_a\}. \tag{70}$$

Из (70) вытекают соотношения, аналогичные соотношениям (52):

$$V_a = \Gamma\hat{\mathfrak{N}}_a = \Gamma(\hat{\mathfrak{N}}'_a(\tilde{A}_2) \oplus \hat{\mathfrak{N}}''_a(\tilde{A}_2)) = \Gamma\hat{\mathfrak{N}}'_a(\tilde{A}_2) + \Gamma\hat{\mathfrak{N}}''_a(\tilde{A}_2) = \Gamma\hat{\mathfrak{N}}'_a(\tilde{A}_2) + V''_a. \tag{70'}$$

Ясно, что $\Gamma\hat{\mathfrak{N}}'_a(\tilde{A})$ — неопределенная часть отношения V_a, а V''_a — оператор, не совпадающий, вообще говоря, с операторной частью V'_a отношения $V_a (V''_a = V'_a = V_a$, если $V_a(0) = \{0\})$. Кроме того,

$$\tilde{A}_a \dotplus A + \hat{\mathfrak{N}}_a = \tilde{A}_{V_a} \quad (\hat{\mathfrak{N}}_a = \{\hat{f} \dotplus \{f_a, af_a\}; f_a \in \mathfrak{N}_a\}). \tag{71}$$

Следующее утверждение вытекает из эрмитовости оператора $\tilde{A}_a$ вида (71) и хорошо известно (см. [3]) в случае $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{H}$.

Утверждение 4. *Пусть A — эрмитов оператор в $\mathfrak{H}$, $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}$, $P_0 \dotplus P_{\mathfrak{H}_0}$, $n_+(A) = n_-(A) = m < \infty$ и $a = \overline{a} \notin \sigma_p(A)$. Тогда*

$$\dim \ker(A^*_{0p} - aP_0) = \operatorname{codim}[(A - a)\,\mathcal{D}(A)] \le m.$$

Предложение 5. *Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ отношения A^*. Тогда*

1) $h \in \mathcal{D}(V_a) \Leftrightarrow \lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{y} \operatorname{Im}(M(a+iy)h, h) < \infty \Leftrightarrow \lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{y} \operatorname{Im}(M(a-iy)h, h) < \infty;$ (72)

2) *для каждого $h \in \mathcal{D}(V_a)$ существуют сильные пределы*

$$M(a)h \dotplus s - \lim_{y \downarrow 0} M(a+iy)h = s - \lim_{y \downarrow 0} M(a-iy)h = V''_a h, \tag{72'}$$

причем $M(a)h = V''_a h = V_a h$, если V_a — оператор (т.е. $V_a(0) = \{0\}$).

Доказательство аналогично доказательству утверждений 1 и 2 теоремы 1. Поучителен, однако, прямой его вывод из теоремы 1. Пусть $(A-a)^{-1}$ и $(A^*-a)^{-1}$ — отношения, обратные к $A-a$ и A^*-a. Определим ПГЗ $\Pi' = \{\mathcal{H}, \Gamma_1', \Gamma_2'\}$ отношения $(A^*-a)^{-1}$, положив

$$\Gamma_i'\{f'-af, f\} = (-1)^i\Gamma_i\hat{f}, \ ((A^*-a)^{-1} == \{\{f'-af, f\};\ \hat{f} = \{f, f'\} \in A\}),\ i = 1, 2. \quad (73)$$

Из очевидного равенства

$$0 = (f' - \bar{\lambda}f, f_\lambda) = (f' - af - (\bar{\lambda} - a)f, f_\lambda) = -(\bar{\lambda} - a)\left(f - \frac{1}{\bar{\lambda} - a}(f' - af), f_\lambda\right),$$

в котором $\{f, f'\} \in A, f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda(A)$, вытекает $\mathfrak{N}_\lambda((A-a)^{-1}) = \mathfrak{N}_{1/(\lambda-a)}(A)$, где $\mathfrak{N}_\lambda((A-a)^{-1})$ и $\mathfrak{N}_\lambda(A)$ — дефектные подпространства отношений $(A-a)^{-1}$ и A. Поэтому в силу (73) функции Вейля $M'(\lambda)$ и $M(\lambda)$, соответствующие ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1', \Gamma_2'\}$ и $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, связаны равенством

$$M'(\lambda) = \Gamma_1'\gamma'(\lambda) = \Gamma_1'(\Gamma_2' \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}_\lambda((A-a)^{-1}))^{-1} =$$

$$= -\Gamma_1(\Gamma_2 \upharpoonright \mathfrak{N}_{1/(\lambda-a)}(A))^{-1} = -M\left(\frac{1}{\lambda - a}\right). \quad (74)$$

Далее, неопределенная часть $\hat{\mathfrak{N}}' = \{0, \mathfrak{N}'\}$ отношения $(A^*-a)^{-1}$ совпадает с $\hat{\mathfrak{N}}_a(A)$. Поэтому запретное отношение $V_{\Gamma'}$ и оператор $V_{\Gamma'}''$ связаны с отношением V_a и оператором V_a'' из (70) так:

$$V_{\Gamma'} = \{\Gamma_2', \Gamma_1'\}\hat{\mathfrak{N}}' = \{\Gamma_2, -\Gamma_1\}\hat{\mathfrak{N}}_a(A) = \{\{h_2, -h_1\}, h_i = \Gamma_i\hat{f}_a, \hat{f}_a \in \hat{\mathfrak{N}}_a\} = -V_a,$$

$$V_{\Gamma'}'' = \{\Gamma_2', \Gamma_1'\}\hat{\mathfrak{N}}''(\tilde{A}_2) = \{\Gamma_2, -\Gamma_1\}\hat{\mathfrak{N}}_a''(\tilde{A}_2) = -V_a''. \quad (75)$$

Теперь соотношения (72) и (73) вытекают из соотношений (53), (54) и (74), (75).

***Замечание* 5.** Соотношения (72) и (72′) в терминах интегрального представления (65) функции $M(\lambda)$ принимают вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+t^2}{(t-a)^2} d(F(t)h, h) < \infty, \quad s - \lim_{y \downarrow 0} M(a+iy)h = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+ta}{t-a} dF(t)h.$$

Из теоремы 1 и предложения 5 можно получить следующую характеристику отношений V_Γ и V_a (см.(70)) в терминах характеристической функции $C(\lambda)$.

Теорема 1′. *Пусть* $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ *— ПГЗ отношения* A^*, $V_\Gamma = \Gamma\hat{\mathfrak{N}}$. *Тогда:*

1) $h = h_1 + ih_2$, *где* $\{h_2, h_1\} \in V_\Gamma \Leftrightarrow \lim_{y \uparrow \infty}(\|h\| - \|C(iy)h\|) < \infty;$

2) *для каждого* $h = h_1 + ih_2(\{h_2, h\} \in V_\Gamma + i)$ *существует сильный предел*

$$C(i\infty)h \doteq s - \lim_{y \uparrow \infty} C(iy)h = h - 2i(V_\Gamma + i)^{-1}h;$$

3) $h = h_1' + ih_2'$, *где* $\{h_2', h_1'\} \in V_a \Leftrightarrow \lim_{y \downarrow 0} \frac{\|h\| - \|C(a+iy)h\|}{y} < \infty;$

4) *для каждого* $h = h_1' + ih_2'$ $(\{h_2', h\} \in V_a + i)$ *существует сильный предел*

$$C(a)h \doteq s - \lim_{y \downarrow 0} C(a+iy)h = h - 2i(V_a + i)^{-1}h.$$

Предложение 6. *Пусть* $M_1(\lambda)$ *и* $M_2(\lambda)$ *— функции Вейля, соответст-*

вующие ПГЗ $\{\mathcal{H}_1, \Gamma_1', \Gamma_2'\}$ и $\{\mathcal{H}_2, \Gamma_1^2, \Gamma_2^2\}$ *отношения* A^*, U — *изометрия из* $\mathcal{H}_2$ *на* $\mathcal{H}_1$. *Тогда*

$$M_1(\lambda) = (X_{11}\, U\, M_2(\lambda)\, U^{-1} + X_{12})\,(X_{21}\, U\, M_2(\lambda)\, U^{-1} + X_{22})^{-1},$$

где $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ — *J-унитарный оператор в* $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1, J = \begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix}$.

Следствие 7. *Пусть в условиях предложения* 6 $\ker \Gamma_2' = \ker \Gamma_2^2$. *Тогда* $M_1(\lambda) = CM_2(\lambda)C^* + K$, *где* $C = X_{11}\, U, K = X_{12}\, X_{11}^* = K^*$.

Доказательство предложения 6 аналогично доказательству в [14, 15] для случая $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{H}$.

***Замечание* 6.** Для случая $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{H}$ $C(\lambda)$ введена в [14], а функция Вейля $M(\lambda)$ — в [16, 17]. В [16] (см. также [18, 19]) доказаны для этого случая лемма 3 и предложение 4.

4. Формула обобщенных резольвент.

1. **Лемма 5.** *Пусть* $\lambda \in \hat{\rho}(A)$, $A \subset \tilde{A} \subset A^*$ *и* $\tilde{A}_\lambda = A \dotplus \hat{\mathfrak{N}}_\lambda$. *Тогда справедливы следующие эквивалентности:*

$$\lambda \notin \sigma_p(\tilde{A}) \Leftrightarrow \tilde{A} \text{ и } \tilde{A}_\lambda \text{ — дизъюнктны;} \tag{76}$$

$$\lambda \in \rho(\tilde{A}) \Leftrightarrow \tilde{A} \text{ и } \tilde{A}_\lambda \text{ — трансверсальны..} \tag{77}$$

Кроме того,

$$\ker(\tilde{A} - \lambda) = \pi_1(\tilde{A} \cap \mathfrak{N}_\lambda), \dim\ker(\tilde{A} - \lambda) = \dim(\tilde{A} \cap \mathfrak{N}_\lambda). \tag{78}$$

Доказательство. 1. Так как $\lambda \in \hat{\rho}(A)$, то существует расширение $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_2^*$ такое, что $\lambda \in \rho(\tilde{A}_2)$. Пусть $\lambda \in \sigma_p(\tilde{A})$, т.е. $\exists\{f, \lambda f\} \in \tilde{A}$. Согласно (34) $\{f, \lambda f\} = \{g, g'\} + \{f_\lambda, \lambda f_\lambda\}$, где $\{g, g'\} \in \tilde{A}_2$, $\hat{f}_\lambda \in \hat{\mathfrak{N}}_\lambda$. Отсюда $g' = \lambda g$ и, значит, $g = 0$, ибо $\lambda \notin \sigma_p(\tilde{A}_2)$. Следовательно, $\{f, \lambda f\} = \hat{f}_\lambda \in \tilde{A}$. Обратно, если $\exists\{f, f'\} = \{f_A + + f_\lambda, Af_A + \lambda f_\lambda\} \in \tilde{A}$, то $\hat{f}_\lambda = \{f, f'\} - \{f_A, Af_A\} \in \tilde{A}$. Эквивалентность (76) доказана.

2. Пусть $\lambda \in \rho(\tilde{A})$ и $\{f, f'\} \in \tilde{A}$. Полагая

$$g = (\tilde{A} - \lambda)^{-1}(f' - \lambda f),\ g' = [I + \lambda(\tilde{A} - \lambda)^{-1}]\,(f' - \lambda f), \tag{79}$$

видим, что $\{g, g'\} \in \tilde{A}$ и

$$((A - \bar{\lambda})f_A, g - f) = ((A - \bar{\lambda})f_A, (\tilde{A} - \lambda)^{-1}(f' - \lambda f) - f) =$$

$$= (f_A, f' - \lambda f) - ((A - \bar{\lambda})f_A, f) = (f_A, f') - (Af_A, f) = 0 \ \ \forall f_A \in \mathcal{D}(A),$$

т.е. $f_\lambda \doteq g - f \in \mathfrak{N}_\lambda$. Но тогда из (79) получаем $g' - f' = \lambda(g - f) = \lambda f_\lambda$. Поэтому $\{f, f'\} = \{g, g'\} + \{f_\lambda, \lambda f_\lambda\}$, что с учетом (34) и (76) доказывает трансверсальность $\tilde{A}$ и $\tilde{A}_\lambda$.

Обратно, если $\tilde{A}$ и $\tilde{A}_\lambda$ трансверсальны, то для каждого $\{g, g'\} \in \tilde{A}_2$ справедливо равенство $\{f_2, f'_2\} = \{f, f'\} + \hat{f}_\lambda$, в котором $\{f, f'\} \in \tilde{A}$, $\hat{f}_\lambda \in \hat{\mathfrak{N}}_\lambda$. Отсюда $f' - \lambda f = f'_2 - \lambda f_2$ и, следовательно, $\mathfrak{R}(\tilde{A} - \lambda) = \mathfrak{R}(\tilde{A}_2 - \lambda) = \mathfrak{H}$, ибо $\lambda \in \rho(\tilde{A}_2)$.

Предложение 7. *Пусть* $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ – *ПГЗ отношения* A^*, $M(\lambda)$ — *соответствующая функция Вейля,* $\theta \in \tilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{H})$ *и* $\lambda \in \rho(\tilde{A}_2)$. *Тогда:*

1) $\lambda \in \rho(\tilde{A}_\theta) \Leftrightarrow 0 \in \rho(\theta - M(\lambda))$;

2) $\lambda \in \sigma_i(\tilde{A}_\theta) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_i(\theta - M(\lambda)),\ i = p, c, r;$ (80)

3) $\dim\ker(\tilde{A}_\theta - \lambda) = \dim\ker(\theta - M(\lambda))$, $\operatorname{codim}[(\tilde{A}_\theta - \lambda)\,\mathcal{D}(A)] = \operatorname{codim}[(\theta - M(\lambda))\,\mathcal{D}(\theta)]$, *причем* $\hat{f} = \{f, \lambda f\} \in \tilde{A}_\theta \Leftrightarrow \Gamma_2 \hat{f} \in \ker(\theta - M(\lambda))$.

Доказательство. Так как $\tilde{A}_\lambda = \tilde{A}_{M(\lambda)}$ (т.е. $\hat{f} \in \tilde{A}_\lambda \Leftrightarrow \Gamma\hat{f} \in \operatorname{gr} M(\lambda)$), то вытекающая из лемм 1, 5 и предложения 3 цепочка эквивалентностей

$$\lambda \notin \sigma_p(\tilde{A}_\theta) \Leftrightarrow \tilde{A}_\theta \cap \tilde{A}_\lambda = \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow \theta \cap \operatorname{gr} M(\lambda) = \{0\} \Leftrightarrow 0 \notin \sigma_p(\theta - M(\lambda)) \quad (81)$$

доказывает (80) при $i = p$. Теперь утверждение 2 при $i = r$ является следствием очевидных соотношений

$$\lambda \in \sigma_r(\tilde{A}_\theta) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(\tilde{A}_\theta),\ (\tilde{A}_\theta)^* = \tilde{A}_{\theta^*},\ M(\bar{\lambda}) = M(\lambda)^*.$$

Далее, из тех же лемм и предложения 3 получаем $\lambda \in \rho(\tilde{A}_\theta) \Leftrightarrow \tilde{A}_\theta$ и $\tilde{A}_{M(\lambda)}$ трансверсальны $\Leftrightarrow \theta \cap \operatorname{gr} M(\lambda) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \Leftrightarrow 0 \in \rho(\theta - M(\lambda))$. А так как $\sigma_c(T) = \sigma(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T))$ $\forall T \in \tilde{\mathfrak{C}}(\mathfrak{H})$, то эквивалентность (80) при $i = c$ доказана. Утверждение 3 — следствие эквивалентностей

$$\hat{f} = \{f, \lambda f\} \in \tilde{A}_\theta \Leftrightarrow \hat{f} = \hat{f}_\lambda \in \tilde{A}_\theta \cap \hat{\mathfrak{N}}_\lambda \Leftrightarrow \Gamma\hat{f} \in$$
$$\in \theta \cap \operatorname{gr} M(\lambda) \Leftrightarrow \Gamma_2 \hat{f} \in \ker(\theta - M(\lambda)).$$

2. Напомним, что голоморфную в $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ оператор–функцию $\mathbb{R}_\lambda = P(\tilde{A} - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{H}$ называют обобщенной псевдорезольвентой оператора A и пишут $\mathbb{R}_\lambda \in P\Omega_A$, если $\tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{C}}(\tilde{\mathfrak{H}})$ — самосопряженное расширение оператора A, действующее в гильбертовом пространстве $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$, P — ортопроектор в $\tilde{\mathfrak{H}}$ на $\mathfrak{H}$. Множество обобщенных резольвент $\mathbb{R}_\lambda \in P\Omega_A$, для которых $\tilde{A} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ (т.е. $\tilde{A} \in \tilde{A}^*$ — оператор), обозначим через Ω_A.

В совокупности расширений $\tilde{A} \in \tilde{A}^* \in \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{H}})$, порождающих резольвенту $\mathbb{R}_\lambda \in P\Omega_A$, существуют минимальные, т.е. такие, что $\tilde{\mathfrak{H}}$ порождено линеалами $\mathfrak{H}$ и $(\tilde{A} - \lambda)^{-1}\mathfrak{H}$ $(\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-)$. Любые два минимальных расширения унитарно изоморфны.

Следуя [20], семейство отношений $T(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{C}}(\mathfrak{H})$ называем голоморфным в точке λ_0, если существуют $\zeta \in \rho(T(\lambda))$ и $\varepsilon > 0$ такие, что резольвента $(T(\lambda) - \zeta)^{-1}$ ограничено голоморфна [20] при $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$.

Теорема 2. *Пусть* $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — *ПГЗ отношения* A^*, $M(\lambda)$ — *соответствующая функция Вейля,* $\lambda \in \rho(\tilde{A}_2)$, $\mathfrak{H}_0 = \mathcal{D}(A)$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{H}_0^\perp$. *Тогда:*

1) *равенство*

$$(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} = (A_2 - \lambda)^{-1} + \gamma(\lambda)(\theta - M(\lambda))^{-1}\dot{\gamma}^*(\bar{\lambda}) \quad (82)$$

устанавливает биективное соответствие между резольвентами собственных расширений $\tilde{A}_\theta$ *оператора* A *и замкнутыми линейными отношениями* θ *в* $\mathcal{H}$;

2) $\mathbb{R}_\lambda g$ *является решением следующей задачи со спектральным параметром* $\tau(\lambda) \in (\tilde{R})_{\mathcal{H}}$ *в граничном условии:*

$$(A_{0p}^* - \lambda)f = g - n\ (\Leftrightarrow f' - \lambda f = g),\ \{\Gamma_2\hat{f}, -\Gamma_1\hat{f}\} \in \tau(\lambda),\ \hat{f} = \{f, f'\},\ n = P_{\mathfrak{N}} f', \quad (83)$$

т.е.

$$\mathbb{R}_\lambda = (\tilde{A}_{-\tau(\lambda)} - \lambda)^{-1},\ \tau(\lambda) = \tau_*(\bar{\lambda}) \in (\mathbb{R})_{\mathcal{H}}\ (\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-), \tag{84}$$

где $\tilde{A}_{-\tau(\lambda)}$ *— голоморфное семейство (собственных) максимально аккумулятивных расширений вида* (20)*;*

3) *формула (для обобщенных резольвент)*

$$\mathbb{R}_\lambda \doteq P(\tilde{A} - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{H} = (\tilde{A}_{-\tau(\lambda)} - \lambda)^{-1} =$$
$$= (\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}\gamma^*(\bar{\lambda}) \tag{85}$$

устанавливает биективное соответствие между обобщенными резольвентами $\mathbb{R}_\lambda \in P\Omega_A$ *и функциями* $\tau(\lambda) \in (\tilde{R})_{\mathcal{H}}$. *При этом, когда* $\tilde{A}_2$ *— оператор* $\mathbb{R}_\lambda \in \Omega_A$, *если и только если* $\tau(\lambda)$ *является M-допустимой, т.е.*

$$s - \lim_{y\uparrow\infty} y^{-1}(\tau(iy) + M(iy))^{-1} = 0. \tag{86}$$

Доказательство. 1. Пусть $f \in \mathfrak{H}$. Тогда

$$\hat{f}_\theta(\lambda) \doteq \{(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1}f, f + \lambda(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1}f\} \in \tilde{A}_\theta,$$
$$\hat{f}_2(\lambda) \doteq \{(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1}f, \tilde{A}_2(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1}f\} \in \tilde{A}_2. \tag{87}$$

Так как расширение $\tilde{A}_\theta$ — собственное, то $f_\lambda \doteq (\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1}f - (\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1}f \in \mathfrak{N}_\lambda$ и, следовательно, $\hat{f}_\lambda = \{f_\lambda, \lambda f_\lambda\} = \hat{f}_\theta(\lambda) - \hat{f}_2(\lambda) \in \hat{\mathfrak{N}}_\lambda$.

Пусть вначале $\theta = B \in \mathfrak{C}(\mathcal{H})$. Поскольку $\lambda \in \rho(\tilde{A}_B)$, то $\exists\ (B - M(\lambda))^{-1} \in [\mathcal{H}]$. Поэтому из леммы 4 получим

$$(\Gamma_1 - B\Gamma_2)(\hat{f}_\theta(\lambda) - \hat{f}_2(\lambda)) = -\Gamma_1\hat{f}_2(\lambda) = -\gamma^*(\bar{\lambda})f, \tag{88}$$

$$(\Gamma_1 - B\Gamma_2)\hat{\gamma}(\lambda)(B - M(\lambda))^{-1}\gamma^*(\bar{\lambda})f = (M(\lambda) - B)(B - M(\lambda))^{-1}\gamma^*(\bar{\lambda})f = -\gamma^*(\bar{\lambda})f. \tag{89}$$

Формула (82) вытекает из сопоставления формул (88) и того, что $\Gamma_1 - B\Gamma_2$ — изоморфизм из $\hat{\mathfrak{N}}_\lambda$ на $\mathcal{H}$, ибо $\lambda \in \rho(\tilde{A}_B)$.

Если $\theta \in \tilde{\mathfrak{C}}(\mathcal{H}) \setminus \mathfrak{C}(\mathcal{H})$, то в этом случае из (87) и леммы 4 получим

$$\{\Gamma_2, \Gamma_1\}\hat{f}_\theta(\lambda) = \{\Gamma_2, \Gamma_1\}(\hat{f}_2 + \hat{f}_\lambda) = \{\Gamma_2\hat{f}_\lambda, \gamma^*(\bar{\lambda})f + M(\lambda)\Gamma_2 f_\lambda\}. \tag{90}$$

Так как $\{\Gamma_2, \Gamma_1\}\hat{f}_\theta(\lambda) \in \theta$, то из (90) $\Rightarrow \{\Gamma_2\hat{f}_\lambda, \gamma^*(\bar{\lambda})f\} \in \theta - M(\lambda)$. Согласно предложению 7 $0 \in \rho(\theta - M(\lambda))$ ($\Leftrightarrow \lambda \in \rho(\tilde{A}_\theta)$). Поэтому

$$\Gamma_2\hat{f}_\lambda = (\theta - M(\lambda))^{-1}\gamma^*(\bar{\lambda})f \Rightarrow \hat{f}_\lambda = \gamma(\lambda)(\theta - M(\lambda))^{-1}\gamma^*(\bar{\lambda})f. \tag{91}$$

Сопоставив (91) и (87), получим формулу (82).

2. Пусть $\mathbb{R}_\lambda = P(\tilde{A} - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$, $\tilde{A}'$ — операторная часть отношения $\tilde{A}$. Так как $\mathbb{R}_\lambda(A - \lambda)f = f\ (\forall f \in \mathcal{D}(A))$, то $\forall\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ отношение $T(\lambda) \doteq \mathbb{R}_\lambda^{-1} + \lambda = T(\bar{\lambda})^* = (\mathbb{R}_{\bar{\lambda}}^{-1})^* + \bar{\lambda}$ является расширением оператора A. Покажем, что оно максимально аккумулятивно.(диссипативно) при $\lambda \in \mathbb{C}_+(\lambda \in \mathbb{C}_-)$. Если $\{f, f'\} \in T(\lambda)$, то $\{f' - \lambda f, f\} \in (T(\lambda) - \lambda)^{-1} = \mathbb{R}_\lambda$. Поэтому, полагая $f' - \lambda f = g$, $\varphi = (\tilde{A} - \lambda)^{-1}g$, получаем ($\beta \doteq \operatorname{Im}\lambda < 0$)

$$\operatorname{Im}(f', f) = \operatorname{Im}(f' - \lambda f, f) + \operatorname{Im}(\lambda f, f) = \operatorname{Im}(g, \mathbb{R}_\lambda g) + \beta\|\mathbb{R}_\lambda g\|^2 =$$
$$= \operatorname{Im}((\tilde{A}' - \lambda)\varphi, \varphi) + \beta\|P\varphi\|^2 = -\beta[\|\varphi\|^2 - \|P\varphi\|^2] = -\beta\|(I - P)\varphi\|^2 \le 0.$$

Согласно утверждению 4 предложения 3 расширения $T(\lambda)$ собственные: $T(\lambda) = \tilde{A}_{-\tau(\lambda)}$, где $\tau(\lambda) = \tau(\bar{\lambda})^*$ — функция со значениями во множестве максимальных диссипативных (при $\lambda \in \mathbb{C}_+$) отношений в $\mathcal{H}$. Для доказательства ее голоморфности воспользуемся вытекающим из (82) тождеством

$$(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1} = \gamma(\lambda)^{-1}[(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} - \mathbb{R}_\lambda]\gamma^*(\bar{\lambda})^{-1}. \tag{92}$$

Из (92) заключаем, что $\tau(\lambda) + M(\lambda)$ голоморфна в $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ $(0 \in \rho(\tau(\lambda) + M(\lambda))$ $\forall\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-)$. Так как $M(\lambda)$ — ограниченно голоморфна в $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$, то (см. [20, с. 461]), $\tau(\lambda)$ также голоморфна в $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$. Таким образом, $\tau(\lambda) = \tau(\bar{\lambda})^* \in (\tilde{R})_{\mathcal{H}}$ и соотношение (84) и эквивалентное ему (83) доказаны.

Обратно, если $\tau(\lambda) = \tau(\bar{\lambda})^* \in (\tilde{R})_{\mathcal{H}}$, то $\tilde{A}_{-\tau(\lambda)}$ — голоморфное (в силу (82)) семейство максимально аккумулятивных (при $\lambda \in \mathbb{C}_+$) отношений из $\tilde{c}(\mathfrak{H})$. Тогда $\mathfrak{H}_2 \doteq \tilde{A}_{-\tau(\lambda)}(0)$ не зависит от $\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ (см. [21, 22]) и справедливы соотношения

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2, \; \tilde{A}_{-\tau(\lambda)} = \tilde{A}'_{-\tau(\lambda)} \oplus \hat{\mathfrak{H}}_2 \; (\hat{\mathfrak{H}}_2 \doteq \{0, \mathfrak{H}_2\}),$$
$$(\tilde{A}_{-\tau(\lambda)} - \lambda)^{-1} = (\tilde{A}'_{-\tau(\lambda)} - \lambda)^{-1} \oplus \mathbf{0}_{\mathcal{H}_2}, \tag{93}$$

в которых $\tilde{A}'_{-\tau(\lambda)}$ и $\hat{\mathfrak{H}}_2$ — операторная и неопределенная части отношения $\tilde{A}_{-\tau(\lambda)}$, а $(\tilde{A}'_{-\tau(\lambda)} - \lambda)^{-1} \in (R)_{\mathfrak{H}_1}$. Из (93) заключаем, что

$$s - \lim_{y\uparrow\infty} iy\mathbb{R}_{iy}f = s - \lim_{y\uparrow\infty} iy(\tilde{A}'_{-\tau(\lambda)} - iy)^{-1}f = -P_1 f \quad \forall f \in \mathfrak{H}, \tag{94}$$

где P_1 — ортопроектор в $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{H}_1$. Согласно известной лемме Наймарка [3] (точнее, ее обобщению на голоморфное семейство отношений [21]) существуют сепарабельное гильбертово пространство $\tilde{\mathfrak{H}}$ и самосопряженное в $\tilde{\mathfrak{H}}$ отношение $\tilde{A}$ такие, что $(\tilde{A}_{-\tau(\lambda)} - \lambda)^{-1} = P(\tilde{A} - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{H}$ $(P = P_{\mathfrak{H}}$ — ортопроектор в $\tilde{\mathfrak{H}}$ на $\mathfrak{H})$. Легко показать, что $\tilde{A} \supset A$. Соотношение (84) доказано.

3. Так как $\tilde{A}_2$ — оператор, то из равенства (45) получаем

$$\lim_{y\uparrow\infty} (\pm iy)\gamma^*(\mp iy)f =$$
$$= \lim_{y\uparrow\infty} \Gamma_1\{(\pm iy)(\tilde{A}_2 - iy)^{-1}f, (\pm iy)(\tilde{A}_2 - iy)^{-1}\tilde{A}_2 f\} = -\Gamma_1\{f, \tilde{A}_2 f\}. \tag{95}$$

Если $\tau(\lambda) \in (\tilde{R})_{\mathcal{H}}$, то $G(\lambda) \doteq -(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1} \in (R)_{\mathcal{H}}$ и принимает значения в $[\mathcal{H}]$. Из интегрального представления (65) оператор-функции $G(\lambda)$ вытекает существование сильного предела

$$s - \lim_{\lambda\to\infty} \frac{G(\lambda)}{\lambda} = s - \lim_{\lambda\to\infty}\left[-\frac{(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}}{\lambda}\right] \doteq B_G = B_G^*, \; B_G \in [\mathcal{H}]. \tag{96}$$

Из (95) и (96) имеем

$$\exists \lim_{y\uparrow\infty} (iy)(\gamma(iy)(\tau(iy) + M(iy))^{-1}\gamma^*(-iy)f, f) =$$
$$= \lim_{y\uparrow\infty}\left(\frac{(\tau(iy) + M(iy))^{-1}}{iy} iy\gamma^*(-iy)f, (-iy)\gamma^*(iy)f\right) = -\left\| B_G \Gamma_1\left\{f, \tilde{A}_2, f\right\}\right\|^2. \tag{97}$$

Здесь использовано элементарное утверждение: если $f_n \in \mathcal{H}$ и $\exists \lim_{n\to\infty} f_n = f$, а $T_n \in [\mathcal{H}]$ и $\exists\, s - \lim_{n\to\infty} T_n = T$, то $\exists \lim_{n\to\infty} T_n f_n = Tf$. Так как $s - \lim_{y\uparrow\infty} iy(\tilde{A}_2 - iy)^{-1} = -I$, то из формул (82), (97) и (94) получаем

$$-\|P_1 f\|^2 = \lim_{y\uparrow\infty} iy(\mathbb{R}_{iy} f, f) = \lim_{y\uparrow\infty} iy((\tilde{A}_{-\tau(iy)} - iy)^{-1} f, f) =$$
$$= -\|f\|^2 + \|B_G^{1/2}\Gamma_1\{f, \tilde{A}_2 f\}\|^2. \tag{98}$$

Согласно (94) $\mathbb{R}_\lambda \in \Omega_A$ (т.е. в (82) $\tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{C}}(\mathfrak{H})$) точно тогда, когда $P_1 = I_{\mathfrak{H}}$. Поэтому в силу (98) верны эквивалентности

$$\mathbb{R}_\lambda \in \Omega_A \Leftrightarrow s - \lim_{y\uparrow\infty} iy\mathbb{R}_{iy} = -I_{\mathfrak{H}} \Leftrightarrow B_G^{1/2}\Gamma_1\{f, \tilde{A}_2 f\} = 0 \ \ \forall f \in \mathcal{D}(\tilde{A}_2). \tag{99}$$

Так как расширения $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ трансверсальны, то $\Gamma_1(\mathrm{gr}\tilde{A}_2) = \mathcal{H}$ и эквивалентность (99), принимая вид $\mathbb{R}_\lambda \in \Omega_A \Leftrightarrow B_G =$, означает с учетом (96) M-допустимость $\tau(\lambda)$, т.е. равенство (86).

Следствие 8. *Пусть* $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ *— ПГЗ отношения* A^*, $\theta_i \in \tilde{\tilde{\mathfrak{C}}}(\mathcal{H})$, $i = 1, 2$, $\lambda \in \rho(\tilde{A}_2) \cap \rho(\tilde{A}_{\theta_1}) \cap \rho(\tilde{A}_{\theta_2})$, $\mathfrak{S}_p(\mathfrak{H})$ *— идеалы Неймана-Шаттена в* $[\mathfrak{H}]$. *Тогда:* 1) $\forall \zeta \in \rho(\theta_1) \cap \rho(\theta_2)$

$$(\tilde{A}_{\theta_1} - \lambda)^{-1} - (\tilde{A}_{\theta_2} - \lambda)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{H}) \Leftrightarrow (\theta_1 - \zeta)^{-1} - (\theta_2 - \zeta)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}); \tag{100}$$

2) $\tilde{A}_{\theta_1}$ *и* $\tilde{A}_{\theta_2}$ *трансверсальны* $\Leftrightarrow 0 \in \rho((\theta_1 - \zeta)^{-1} - (\theta_2 - \zeta)^{-1})$.

Доказательство. Из формулы резольвент (82) получаем

$$(\tilde{A}_{\theta_1} - \lambda)^{-1} - (\tilde{A}_{\theta_2} - \lambda)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{H}) \Leftrightarrow (\theta_1 - M(\lambda))^{-1} - (\theta_2 - M(\lambda))^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}). \tag{101}$$

Так как $\lambda \in \rho(\tilde{A}_{\theta_i}) \cap \rho(\tilde{A}_2)$, то $0 \in \rho(\theta_i - M(\lambda))$, $i = 1, 2$. Поэтому $\forall \lambda \in \rho(\tilde{A}_\theta)$ и $\forall \zeta \in \rho(\theta)$ верны тождества

$$[I + (\zeta - M(\lambda))(\theta - \zeta)^{-1}]^{-1} = I + (M(\lambda) - \zeta)(\theta - M(\lambda))^{-1},$$
$$[I + (\theta - \zeta)^{-1}(\zeta - M(\lambda))]^{-1} = I + (\theta - M(\lambda))^{-1}(M(\lambda) - \zeta), \tag{102}$$

учитывая которые, находим

$$(\theta_1 - M(\lambda))^{-1} - (\theta_2 - M(\lambda))^{-1} = (\theta_2 - \zeta)^{-1}[I + (\zeta - M(\lambda))(\theta_2 - \zeta)^{-1}]^{-1} -$$
$$- [I + (\theta_1 - \zeta)^{-1}(\zeta - M(\lambda))^{-1}(\theta_2 - \zeta)^{-1}] = [I + (\theta_1 - \zeta)^{-1}(\zeta - M(\lambda))^{-1}]^{-1} \times$$
$$\times [(\theta_2 - \zeta)^{-1} - (\theta_1 - \zeta)^{-1}]\,[I + (\zeta - M(\lambda))(\theta_2 - \zeta)^{-1}]^{-1}. \tag{103}$$

Отсюда и вытекает эквивалентность (100).

Утверждение 2 — следствие соотношений (23), (103) и эквивалентности

$$0 \in \rho((\tilde{A}_{\theta_1} - \lambda)^{-1} - (\tilde{A}_{\theta_2} - \lambda)^{-1})) \Leftrightarrow 0 \in \rho((\theta_1 - M(\lambda))^{-1} - (\theta_2 - M(\lambda))^{-1}),$$

которая, как и (101), извлекается из формулы резольвент (82).

Следствие 9. *Если* $\theta_i = B_i \in [\mathcal{H}]$, *то верна эквивалентность*

$$(\tilde{A}_{B_1} - \lambda)^{-1} - (\tilde{A}_{B_2} - \lambda)^{-1}) \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{H}) \Leftrightarrow B_1 - B_2 \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}).$$

***Замечание* 7.** В случае $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{H}$ и только в этом случае все $\tau(\lambda) \in (\tilde{R})_{\mathcal{H}}$ являются M-допустимыми. При этом условии ($\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{H}$) формула (85), являясь обобщением формулы М. Г. Крейна для резольвент [22], и следствия 8, 9 получены в [16 – 19]. Связь с формулой А. В. Штрауса [23] см. в §5.

***Замечание* 8.** В теореме 2 формула (86) получена из (84). Покажем, как, исходя из (86), получить формулу (84). Пусть $G(\lambda)$ — правая часть равенства (86). Тогда $T(\lambda) \doteqdot G(\lambda)^{-1} + \lambda I$ — собственное расширение оператора A при каждом $\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$. Поэтому $T(\lambda) = \tilde{A}_{\theta(\lambda)}$, где $\theta(\lambda) \doteqdot \Gamma T(\lambda) \in \tilde{\tilde{\mathfrak{C}}}(\mathcal{H})$. Из леммы 4 с учетом обозначений (87) получаем, считая для простоты $\tau(\lambda) \in \mathfrak{C}(\mathcal{H})$ (т.е. $\tau(\lambda)(0) = \{0\}$),

$$\Gamma_2 \hat{f}_\theta = \Gamma_2(\hat{f}_\theta - \hat{f}_2) = -\Gamma_2\gamma(\lambda)(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}\gamma^*(\bar{\lambda})f = -(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}\gamma^*(\bar{\lambda})f,$$

$$\Gamma_1 \hat{f}_\theta = \Gamma_1 \hat{f}_2 - \Gamma_1\gamma(\lambda)(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}\gamma^*(\bar{\lambda})f = [I - M(\lambda)(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}]\gamma^*(\bar{\lambda})f =$$

$$= \tau(\lambda)(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}\gamma^*(\bar{\lambda})f.$$

Отсюда $\Gamma\hat{f}_\theta = \{\Gamma_2\hat{f}_\theta, \Gamma_1\hat{f}_\theta\} \in -\tau(\lambda)$, т.е. $\theta(\lambda) = -\tau(\lambda)$ и $T(\lambda) = \tilde{A}_{-\tau(\lambda)}$.

3. Пусть $\mathfrak{L}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$. Напомним, что оператор-функцию $P_\mathfrak{L}\mathbb{R}_\lambda \restriction \mathfrak{L}$, где $\mathbb{R}_\lambda \in P\Omega_A$ ($\mathbb{R}_\lambda \in \Omega_A$), называют $\mathfrak{L}$-псевдорезольвентой ($\mathfrak{L}$-резольвентой) оператора A и обозначают их совокупность через $P\Omega_A^\mathfrak{L}$ ($\Omega_A^\mathfrak{L}$). Монотонную оператор-функцию $\Sigma(t) \doteqdot P_\mathfrak{L}E(t) \restriction \mathfrak{L} = \Sigma(t-0)$ называют $\mathfrak{L}$-спектральной функцией оператора A, если $E(t)$ — обобщенная (с выходом в $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$) спектральная функция оператора A. Функцию $\Sigma(t)$ называют ортогональной, если $E(t)$ — ортогональна. Связь между $\mathfrak{L}$-псевдорезольвентами и $\mathfrak{L}$-спектральными функциями дается формулой

$$P_\mathfrak{L}\mathbb{R}_\lambda \restriction \mathfrak{L} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sum(t)}{t-\lambda} \quad \left(\mathbb{R}_\lambda \doteqdot P_\mathfrak{H}(\tilde{A} - \lambda)^{-1} \restriction \mathfrak{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE(t)}{t-\lambda}\right).$$

Если P_1 — ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на операторную часть $\mathfrak{H}_1$ отношения $\mathbb{R}_\lambda$, то

$$E(\infty) \doteqdot s-\lim_{t\uparrow\infty} E(t) = P_1,\ \Sigma(\infty) \doteqdot s-\lim_{t\uparrow\infty}\Sigma(t) = P_\mathfrak{L}P_1 \restriction \mathfrak{L}$$

(ср. (94)), причем если $\mathfrak{L} \not\subset \mathfrak{N} = \mathfrak{H}_0^\perp$, то $\Sigma(\infty) = I_\mathfrak{L} \Leftrightarrow \mathbb{R}_\lambda \in \Omega_A$.

Напомним,что матрицу-функцию

$$U_{\Pi\mathfrak{L}}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \doteqdot \begin{pmatrix} M(\lambda) & \gamma^*(\bar{\lambda}) \restriction \mathfrak{L} \\ P_\mathfrak{L}\gamma(\lambda) & P_\mathfrak{L}(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} \restriction \mathfrak{L} \end{pmatrix},\ \lambda \in \rho(\tilde{A}_2),$$

называют $\Pi\mathfrak{L}$-псевдорезольвентной матрицей оператора A, соответствующей ПГЗ $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$. Для описания совокупностей $P\Omega_A^\mathfrak{L}$ и $\Omega_A^\mathfrak{L}$ ($\dim\mathfrak{L} = n_\pm(A)$) введем $\Pi\mathfrak{L}$-резольвентную матрицу $W_{\Pi\mathfrak{L}}(\lambda)$, сответствующую ПГЗ $\Pi = \{\mathfrak{L}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$,

$$W_{\Pi\mathfrak{L}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \omega_{11}(\lambda) & \omega_{12}(\lambda) \\ \omega_{21}(\lambda) & \omega_{22}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22}a_{12}^{-1} & a_{22}a_{12}^{-1}a_{11} - a_{21} \\ a_{12}^{-1} & a_{12}^{-1}a_{11} \end{pmatrix}. \tag{104}$$

Она голоморфна на множестве $\mathfrak{L}$-регулярных точек $\rho(A;\mathfrak{L})$ оператора A($\lambda_0 \in \rho(A;\mathfrak{L}) \Leftrightarrow \mathfrak{H} = (A-\lambda_0)\mathfrak{D}(A) \dot{+} \mathfrak{L}$) и принимает значения в $[\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{L}]$ в силу эквивалентности $0 \in \rho(a_{12}(\lambda_0)) \Leftrightarrow \lambda_0 \in \rho(A;\mathfrak{L})$.

Теорема 3. *Пусть* $\Pi = \{\mathfrak{L}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — *ПГЗ отношения* A^*, $W_{\Pi\mathfrak{L}}(\lambda)$ — *соответствующая* $\Pi\mathfrak{L}$*-резольвентная матрица* (104). *Тогда формула*

$$P_{\mathfrak{L}}(\tilde{A} - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{L} = [\omega_{11}(\lambda)\tau(\lambda) + \omega_{12}(\lambda)][\omega_{21}(\lambda)\tau(\lambda) + \omega_{22}(\lambda)]^{-1}$$

устанавливает биективное соответствие между $\mathfrak{L}$*-псевдорезольвентами* $P_{\mathfrak{L}}\mathbb{R}_\lambda \upharpoonright \mathfrak{L} \in P\Omega_A^{\mathfrak{L}}$ *и* $\tau(\lambda) \in (\tilde{R})_{\mathfrak{L}}$. *При этом* $P_{\mathfrak{L}}\mathbb{R}_\lambda \upharpoonright \mathfrak{L} \in \Omega_A^{\mathfrak{L}} \Leftrightarrow \tau(\lambda) - M$ *-допустима.*

Доказательство. Так как $P_{\mathfrak{L}}$ изоморфно отображает $\mathfrak{N}_\lambda$ на $\mathfrak{L}$ $\forall \lambda \in \rho(A; \mathfrak{L})$, то $a_{12}(\lambda_0)^{-1} \in [\mathfrak{L}]$. Поэтому из (82) получаем

$$P_{\mathfrak{L}}\mathbb{R}_\lambda \upharpoonright \mathfrak{L} = P_{\mathfrak{L}}(\tilde{A} - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{L} = P_{\mathfrak{L}}(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{L} - P_{\mathfrak{L}}\gamma(\lambda)(\tau(\lambda) +$$

$$+ M(\lambda))^{-1}\gamma^*(\bar{\lambda}) \upharpoonright \mathfrak{L} = a_{22}(\lambda) - a_{21}(\lambda)(a_{11}(\lambda) + \tau(\lambda))^{-1}a_{12}(\lambda) =$$

$$= a_{22}(\lambda) - a_{21}(\lambda)[a_{12}^{-1}(\lambda)(\tau(\lambda) + a_{11}(\lambda))]^{-1} =$$

$$= \left\{a_{22}\left[a_{12}^{-1}\tau(\lambda) + a_{12}^{-1}a_{11}\right] - a_{21}\right\}\left[a_{12}^{-1}\tau(\lambda) + a_{12}^{-1}a_{11}\right]^{-1} =$$

$$= [\omega_{11}(\lambda)\tau(\lambda) + \omega_{12}(\lambda)][\omega_{21}(\lambda)\tau(\lambda) + \omega_{22}(\lambda)]^{-1}.$$

Ссылка на теорему 2 завершает доказательство.

5. Связь с классическим подходом. 1. Из результатов п.2 легко следует описание различных классов расширений оператора A в терминах формул Дж. Неймана. Рассмотрим для этого каноническое ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1^0, \Gamma_2^0\}$ вида (17):

$$\mathcal{H} = \mathfrak{N}_i,\ \Gamma_1^0 = \pi_1(\mathfrak{P}_i + \tilde{U}_0\mathfrak{P}_{-i}),\ \Gamma_2^0 = -i\pi_1(\mathfrak{P}_i + \tilde{U}_0\mathfrak{P}_{-i}). \tag{105}$$

Согласно предложению 2 $\forall \hat{n} = \{0, n\} \in \hat{\mathfrak{N}}$:

$$\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}0\\ n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_A\\ Af_A\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}P_{\mathfrak{N}_i}n\\ iP_{\mathfrak{N}_i}n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-P_{\mathfrak{N}_{-i}}n\\ iP_{\mathfrak{N}_{-i}}n\end{pmatrix}. \tag{106}$$

Из (105) и (106) получаем

$$\Gamma_1\hat{n} = 2i(P_{\mathfrak{N}_i} - U_0P_{\mathfrak{N}_{-i}})n,\ \Gamma_2\hat{n} = 2(P_{\mathfrak{N}_i} + U_0P_{\mathfrak{N}_{-i}})n,$$

$$V_\Gamma = \{\{(P_{\mathfrak{N}_i} + U_0P_{\mathfrak{N}_{-i}})n,\ i(P_{\mathfrak{N}_i} - U_0P_{\mathfrak{N}_{-i}})n\};\ n \in \mathfrak{N} = \mathfrak{H}_0^\perp\}.$$

Поэтому оператор

$$V_3' = I - 2i(V_\Gamma + i)^{-1} = \{\{P_{\mathfrak{N}_i}n, U_0P_{\mathfrak{N}_{-i}}n\};\ n \in \mathfrak{N}\},\ (V_3' \in [\mathfrak{N}_i'']) \tag{107}$$

совпадает с точностью до изометрии $-U_0$ с оператором запрета V_3 ($\in [\mathfrak{N}_i'', \mathfrak{N}_{-i}'']$) вида (12): $V_3' = -U_0V_3$. Далее, если $A \subset \tilde{A} \subset A^*$, то

$$\hat{f} \in \tilde{A} = \tilde{A}_\theta \Leftrightarrow \Gamma\hat{f} \in \theta \doteq \Gamma\tilde{A} = \{\{-if_i + iU_0f_{-i}, f_i + U_0f_{-i}\}\};\ \hat{f} = \hat{f}_A + \hat{f}_i + \hat{f}_{-i} \in \tilde{A}\}.$$

Отсюда находим преобразование Кэли Φ' отношения θ при условии $-i \notin \sigma_p(\theta)$:

$$\Phi' \doteq I - 2i(\theta + i)^{-1} = \{\{f_i, U_0f_{-i}\};\ \hat{f}_{\pm i} = \mathfrak{P}_{\pm i}\hat{f},\ \hat{f} = \hat{f}_A + \hat{f}_i + \hat{f}_{-i} \in \tilde{A}\}. \tag{108}$$

Полагая $\Phi \doteq -U_0^*\Phi'$ и учитывая (107), (108) и очевидные эквивалентности

$$\theta \cap V_\Gamma = \{0\} \Leftrightarrow \ker(V_3' - \Phi') = \{0\} \Leftrightarrow \ker(V_3 - \Phi) = \{0\}, \tag{109}$$

заключаем, что условие допустимости принимает известный [4, 7] вид: $(V_з - \Phi)f = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Резюмируем изложенное.

Предложение 8. *Формулы*

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{D}(A) \dotplus (I - \Phi)\mathcal{D}(\Phi), \; \mathcal{D}(\Phi) \subset \mathfrak{N}_i, \tag{110}$$

$$\tilde{A}(f_A + f_i - \Phi f_i) = Af_A + i(f_i + \Phi f_i), \; f_{\tilde{A}} = f_A + f_i - \Phi f_i, \tag{111}$$

устанавливают биективное соответствие между совокупностью собственных расширений $\tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{C}}(\mathfrak{H})$, у которых $-i \notin \sigma_p(\tilde{A})$, и совокупностью допустимых операторов $\Phi \in \mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_{-i})$. При этом:

1) $\Phi = (\tilde{A} - i)(\tilde{A} + i)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{R}(\tilde{A} + i)$; (112)

2) $\tilde{A}$ *— эрмитов (диссипативен) $\Leftrightarrow \Phi$ — допустимая изометрия (сжатие) из $\mathcal{D}(\Phi) \subset \mathfrak{N}_i$ в $\mathfrak{R}(\Phi) \subset \mathfrak{N}_{-i}$;*

3) $\tilde{A}$ *— самосопряжен (максимально диссипативен) $\Leftrightarrow \Phi$ — допустимая изометрия (сжатие), у которой $\mathcal{D}(\Phi) = \mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{R}(\Phi) = \mathfrak{N}_{-i}$ $(\mathcal{D}(\Phi) = \mathfrak{N}_i)$.*

Доказательство. Соотношения (110), (111) вытекают из первой формулы Неймана (14) и соотношений (108), (109). Нужно лишь воспользоваться очевидной эквивалентностью $-i \notin \sigma_\rho(\theta) \Leftrightarrow -i \in \sigma_\rho(\tilde{A}_\theta)$, которая, впрочем, является следствием равенства $M(i) = iI_{\mathfrak{N}_i}$ (см. формулу (118)) и предложения 7.

Далее, формула (112) для Φ следует из соотношений (111), переписанных в виде $2if_i = (\tilde{A} + i)(f_{\tilde{A}} - f_A)$, $2i\Phi f_i = (\tilde{A} - i)(f_{\tilde{A}} - f_A)$. Утверждения 2 и 3 — следствия формул (110), (111) и предложения 3.

***Замечание* 9.** Описание эрмитовых расширений $\tilde{A} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ в виде (110), (111) получено в [4], диссипативных — в [7, 24], а всех собственных — в [24] (см. также [25]). В указанных работах соотношения (110) – (112) установлены с помощью преобразования Кэли. Отметим еще, что соотношения (110), (111) в случае $-i \in \sigma_\rho(\tilde{A})$ заменяются (см. [24]) такими:

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{D}(A) \dotplus \{f_i - g_{-i}, \{f_i, g_{-i}\} \in \Phi\}, \; \tilde{A}(f_A + f_i - g_{-i}) = Af_A + i(f_i + g_{-i}).$$

2. Пусть $C_0(\lambda)$ — характеристическая функция, соответствующая "каноническому" ПГЗ вида (105). Тогда $\Gamma_1^0 + i\Gamma_2^0 = 2\pi_1 \mathcal{P}_i$, $\Gamma_1^0 - i\Gamma_2^0 = 2\pi_1 \tilde{U}_0 \mathcal{P}_{-i}$. Если $\hat{f}_\lambda = \{f_i, \lambda f_\lambda\} \in \hat{\mathfrak{N}}_\lambda$, то согласно (14)

$$\hat{f}_\lambda = \hat{f}_A(\lambda) + \hat{f}_i(\lambda) - \hat{f}_{-i}(\lambda) \; (\hat{f}_A (= \{f_A, Af_A\}, \hat{f}_{\pm i} = \{f_i, \pm if_i\} \in \hat{\mathfrak{N}}_{\pm i}). \tag{113}$$

Отсюда $\pi_1 \mathcal{P}_i \hat{f}_\lambda = f_i$, $\pi_1 \tilde{U}_0 \mathcal{P}_{-i} \hat{f}_\lambda = U_0 f_{-i}$ и $C_0(\lambda) f_i(\lambda) = -U_0 f_{-i}(\lambda)$. Записывая соотношение (113) в виде системы равенств

$$f_\lambda = f_A + f_i - f_{-i}, \; \lambda f_\lambda = Af_A + if_i - if_{-i} \tag{114}$$

и учитывая, что $\tilde{A}_\lambda \doteq A \dotplus \hat{\mathfrak{N}}_\lambda$ (см. лемму 5), из (114) получаем

$$-2if_\pm = Af_A - \lambda f_\lambda \pm i(f_A - f_\lambda) = (\tilde{A}_\lambda \pm i)(f_A - f_\lambda).$$

Отсюда $f_{-i} = (\tilde{A}_\lambda - i)(\tilde{A}_\lambda + i)^{-1} f_i$ и, следовательно,

$$C_0(\lambda) = -U_0(\tilde{A}_\lambda - i)(\tilde{A}_\lambda + i)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{N}_i. \tag{115}$$

Равенство (115) означает, что $C_0(\lambda)$ лишь изометрическим множителем $-U_0$ отличается от характеристической функции из [7]. Таким образом, в случае ПГЗ вида (105) теорема 1′ и предложение 5 в силу (115) и равенства $V_3' = -U_0 V_3$ совпадают по существу с результатами А. В. Штрауса, доказанными иначе в [7].

3. Найдем выражения для функции Вейля $M_0(\lambda)$, соответствующей ПГЗ вида (105), считая $\tilde{A}_2 = \ker\Gamma_2$ оператором. Согласно (34) и (28)

$$\hat{f} \dotplus \begin{pmatrix} f_\lambda \\ \lambda f_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{i\lambda} f_i \\ \lambda U_{i\lambda} f_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i \\ i f_i \end{pmatrix} + (\lambda - i) \begin{pmatrix} (\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} f_i \\ f_i + \lambda(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} f_i \end{pmatrix}, f_i \in \mathfrak{N}_i. \tag{116}$$

Отсюда получаем

$$\Gamma_2^0 \hat{f}_\lambda = -i f_i \Rightarrow \gamma(\lambda) f_i = i f_\lambda, \ \gamma(\lambda) = \mathrm{U}_{i\lambda}\gamma(i) = i U_{i\lambda} I_{\mathfrak{N}_i}. \tag{117}$$

Теперь из (116), (117) и леммы 4 получаем

$$\Gamma_1^0 \hat{f} = f_i + (\lambda - i)\Gamma_1^0 \begin{pmatrix} (\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} f_i \\ f_i + \lambda(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} f_i \end{pmatrix} = f_i + (\lambda - i)\gamma^*(\bar{\lambda}) f_i =$$

$$= [I - i(\lambda - i) P_{\mathfrak{N}_i} U_{i\bar{\lambda}}^*] f_i.$$

Следовательно,

$$M_0(\lambda) = \Gamma_1^0 \gamma(\lambda) = P_{\mathfrak{N}_i}[i + (\lambda - i) U_{i\bar{\lambda}}^*] \restriction \mathfrak{N}_i = P_{\mathfrak{N}_i}(\lambda \tilde{A}_2 + I)(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} \restriction \mathfrak{N}_i. \tag{118}$$

Таким образом, в ПГЗ (105) (при условии, что $\tilde{A}_2$ — оператор) формула обобщенных резольвент (85) принимает вид

$$\mathbb{R}_\lambda = (\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1} - (\tilde{A}_2 - i)(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1}[\tau(\lambda) + M_0(\lambda)]^{-1} P_{\mathfrak{N}_i}(\tilde{A}_2 + i)(\tilde{A}_2 - \lambda)^{-1}, \tag{119}$$

где $M_0(\lambda)$ определена равенством (118). В виде (119) она была выведена Ю.Л.Шмульяном [26] из формулы А.В.Штрауса [23] (см. также[27], где близкая к (119) формула также выведена из формулы Штрауса).

Заметим еще, что хотя характеристическая функция и Q-функция эрмитова оператора A были определены (для случая $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{H}$ и $n_\pm(A) = 1$) М. С. Лившицем и М. Г. Крейном равенствами (115) и (118) соответственно еще в 1944 г., связь между ними была обнаружена М. Г. Крейном и Г. К. Лангером только в 1973 г. В то же время определение 7 делает эту связь очевидной.

Пусть $\tau(\lambda) \in (\tilde{R})_{\mathcal{H}}$. Неопределенная часть $\mathcal{H}^2 \dotplus \tau(\lambda)(0)$ функции $\tau(\lambda)$ не зависит от $\lambda \in \mathbb{C}_+$ [22]. Следовательно [21, 22],

$$\tau(\lambda) = \tau_1(\lambda) \oplus \hat{\mathcal{H}}^2, \ \hat{\mathcal{H}}^2 = \mathbf{0} \oplus \mathcal{H}^2, \ \mathcal{H}^2 \dotplus \tau(\lambda)(0), \ \mathcal{H}^1 = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}^2,$$

где $\tau_1(\lambda)$ — операторная часть отношения $\tau(\lambda)$ $(\tau_1(\lambda) \in \mathfrak{C}(\mathcal{H}^1) \ \forall\lambda \in \mathbb{C}_+)$. Если $\tau_1(\lambda)$ принимает значения в $[\hat{\mathcal{H}}^1]$, то определим эрмитово отношение $\tau(i\infty)$, положив $\tau(i\infty) = \tau_1(i\infty) \oplus \hat{\mathcal{H}}^2$, где

$$\tau_1(i\infty) f = s - \lim_{y\uparrow\infty} \tau_1(iy) f \quad \forall f \in \mathcal{H}^1_{\tau_1} \dotplus \{f \in \mathcal{H}^1;\ \lim_{y\uparrow\infty} y \ \mathrm{Im}\,(\tau_1(iy) f, f) < \infty\}.$$

Приведем без доказательства следующий критерий M-допустимости.

Предложение 9. *Пусть* $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ *— ПГЗ,* $M(\lambda)$ *и* V_Γ *— сотвeтствующие функции Вейля* $M(\lambda)$ *и запретное отношение* V_Γ, $\tau(\lambda) \in (\tilde{R})_{\mathcal{H}}$. *Если оператор-функция* $\tau_1(\lambda)$ *принимает значения в* $[\mathcal{H}_1]$, *то условие* M*-допус-*

тимости $\tau(\lambda)$ *эквивалентно условию допустимости отношения* $-\tau(i\infty)$, *т.е.*

$$s-\lim_{y\uparrow\infty} y^{-1}(\tau(iy)+M(iy))^{-1}=0 \Leftrightarrow -\tau(i\infty)\cap V_\Gamma=\{0\}.$$

6. Примеры и приложения. 1. Пусть e_0 — орт гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}=\{e_0\}$, $\mathfrak{H}_0=\mathfrak{N}^\perp=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{N}$, $\tilde A=\tilde A^*\in\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$. Оператор $A=\tilde A\restriction\mathfrak{H}_0$ — эрмитов, $n_\pm(A)=1$, $A_{0p}^*=P_{\mathfrak{H}_0}\tilde A$. Легко видеть, что $f_\lambda\doteq(\tilde A-\lambda)^{-1}e_0\in\mathfrak{N}_\lambda$, т.е. $\mathfrak{N}_\lambda(A)=\mathfrak{N}''_\lambda(\tilde A)$. Определим ПГЗ $\{\mathcal{H},\Gamma_1,\Gamma_2\}$ отношения $A^*=\{\{f,A_{0p}^*f+ce_0\},\ f\in D(A_{0p}^*),\ c\in\mathbb{C}\}$, положив

$$\mathcal{H}=\mathbb{C}\ \Gamma_1\hat f=(f,e_0),\ \Gamma_2\hat f=(f,Ae_0)-c\left(\hat f=\left\{f,A_{0p}^*f+ce_0\right\}\right). \qquad (120$$

Из (120) получаем

$$A_{0p}^*f_\lambda=P_{\mathfrak{H}_0}\tilde A(\tilde A-\lambda)^{-1}e_0=\lambda P_{\mathfrak{H}_0}(\tilde A-\lambda)^{-1}e_0=\lambda f_\lambda-\lambda(f_\lambda,e_0)e_0,$$

$$\Gamma_1\hat f_\lambda=\Gamma_1\{f_\lambda,\lambda f_\lambda\}=(f_\lambda,e_0),\ \Gamma_2 f_\lambda=(f_\lambda,\tilde Ae_0)-\lambda(f_\lambda,e_0)=1.$$

Следовательно, функция Вейля имеет вид

$$M(\lambda)=(f_\lambda,e_0)=\left(\left(\tilde A-\lambda\right)^{-1}e_0,e_0\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(E(t)e_0,e_0)}{t-\lambda}. \qquad (121)$$

Случай $\dim\mathfrak{N}=n<\infty$ разбирается аналогично. Полагая $A=\tilde A\restriction\mathfrak{H}_0$ ($\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{N}$), получаем эрмитов оператор, у которого $n_\pm(A)=n$, $\mathfrak{N}_\lambda(A)=\mathfrak{N}''_\lambda(\tilde A)=(\tilde A-\lambda)^{-1}\mathfrak{N}$. ПГЗ $\{\mathcal{H},\Gamma_1,\Gamma_2\}$ отношения $A^*=\{\{f,\tilde Af+n\};f\in\mathcal{D}(\tilde A)=\mathcal{D}(A_{0p}^*),\ n\in\mathfrak{N}\}$ удобнее определить иначе чем (120): $\mathcal{H}=\mathfrak{N}$, $\Gamma_1\hat f=P_\mathfrak{N}f$, $\Gamma_2\hat f=-n$ ($\hat f=\{f,\tilde Af+n\}$). Так как $\mathfrak{N}_\lambda=\{(\tilde A-\lambda)^{-1}n;\ n\in\mathfrak{N}\}$, то $\Gamma_1\hat f_\lambda=\Gamma_1\{(\tilde A-\lambda)^{-1}n,\ \lambda(\tilde A-\lambda)^{-1}n\}=P_\mathfrak{N}(\tilde A-\lambda)^{-1}n$, $\Gamma_2\hat f_\lambda=n$. Таким образом, соответствующая функция Вейля $M(\lambda)$ совпадает с одной из $\mathfrak{N}$–резольвент оператора A:

$$M(\lambda)=P_\mathfrak{N}(\tilde A-\lambda)^{-1}\restriction\mathfrak{N}. \qquad (121')$$

2. Пусть $\mathfrak{H}=l_2[0,\infty)$, $\{e_k\}_0^\infty$ — стандартный базис в $l_2[0,\infty)$, $\tilde A=\tilde A^*$ — оператор, порожденный в l_2 матрицей Якоби, ассоциированной с определенной проблемой моментов:

$$\tilde Ae_k=b_{k-1}e_k+a_ke_k+b_ke_{k+1}\ (b_{-1}=0,\ b_k>0,a_k=\bar a_k,k\in\mathbb{Z}_+). \qquad (122)$$

Пусть, как и прежде, $A=\tilde A\restriction\mathfrak{H}_0$ ($\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}\ominus e_0$). Тогда уравнение $A_{0p}^*y=\lambda P_{\mathfrak{H}_0}y$ ($A_{0p}^*=P_{\mathfrak{H}_0}\tilde A$) эквивалентно конечно-разностному:

$$b_{k-1}y_{k-1}+a_ky_k+b_ky_{k+1}=\lambda y_k,\ k=1,2,3,\ldots. \qquad (123)$$

Поэтому из условия $n_\pm(A)=1$ вытекает существование (и единственность) принадлежащего $l_2[0,\infty)$ решения $\{y_k(\lambda)\}_0^\infty$ уравнения (123). Если $P_k(\lambda)$ и $Q_k(\lambda)$ — ортогональные полиномы 1- и 2-го рода [28, 29], то решение $\{y_k(\lambda)\}_0^\infty$ представляется в виде

$$(f_\lambda=)\sum_{k=0}^\infty y_k(\lambda)e_k=\sum_{k=0}^\infty[P_k(\lambda)\omega(\lambda)+Q_k(\lambda)]e_k\ \ (\in\mathfrak{N}_\lambda),$$

где функция $\omega(\lambda)$ такова, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|P_k(\lambda)\omega(\lambda)+Q_k(\lambda)\right|^2<\infty. \tag{124}$$

Из (120) получаем $\Gamma_1\hat{f}_\lambda=\Gamma_1\{f_\lambda,\lambda f_\lambda\}=\omega(\lambda)$. Следовательно, в силу (121) $\omega(\lambda)=$ $=M(\lambda)=((\tilde{A}-\lambda)^{-1}e_0,e_0)$ и, значит, $\omega(\lambda)\in(R)$.

***Замечание* 10.** Факт существования функции $\omega(\lambda)$ ($\in(R)$), удовлетворяющей условию (124) (а также ее свойства), составляет содержание конечно-разностного аналога теоремы Г. Вейля, относящейся к уравнению Штурма–Лиувилля на полуоси. Таким образом, в приведенном выше операторном доказательстве этой теоремы аналогом минимального оператора Штурма–Лиувилля на полуоси является неплотно заданный оператор A. Согласно равенству $\omega(\lambda)=$ $=((\tilde{A}-\lambda)^{-1}e_0,e_0)$ мера $\sigma(t)=d(E(t)e_0,e_0)$ из интегрального представления (121) функции $\omega(\lambda)=M(\lambda)$ является решением проблемы моментов Гамбургера

$$s_k=\int_{-\infty}^{\infty}t^k\,d\sigma(t)\ (=(\tilde{A}^ke_0,e_0)),\ k\in\mathbb{Z}_+, \tag{125}$$

порожденной уравнением (122) (e_0 — порождающий вектор).

3. Пусть A — эрмитов оператор в $\mathfrak{H}=l_2[0,\infty]$, порожденный матрицей Якоби, ассоциированной с проблемой моментов (125). Из утверждения 4 вытекает следующее предложение, принадлежащее Гамбургеру (см. [28, с.108]).

Предложение 10. *Для определенности проблемы моментов* (125) *необходимо и достаточно, чтобы расходился хотя бы один из рядов*

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k(a)^2,\quad \sum_{k=1}^{\infty}Q_k(a)^2,\quad a=\bar{a}. \tag{126}$$

Доказательство. *Необходимость.* Неопределенность проблемы (125) эквивалентна (см. [28, 29]) сотношениям $n_\pm(A)=1\ \Leftrightarrow\ \sum_{k=0}^{\infty}|P_k(\lambda)|^2<\infty$ $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, из которых в силу (124) следует $\sum_{k=1}^{\infty}|Q_k(\lambda)|^2<\infty$.

Достаточность. Пусть ряды (126) сходятся. Введя оператор $A_0\doteq$ $\doteq A\restriction\mathfrak{H}_0$ ($\mathfrak{H}_0\doteq\mathfrak{H}\ominus e_0$), покажем, что $n_\pm(A_0)=2$. Так как $f_a\doteq\{P_k(a)\}_0^\infty\in$ $\in\ker(A-a)$ и $f_a\notin\mathcal{D}(A_0)$, то $\ker(A_0-a)=\{0\}$. Действительно, иначе бы $\dim\ker(A-a)\geq2$, что противоречит простоте спектра $\sigma(A)$ оператора A ($\sigma(A)$ — прост, ибо e_0 — порождающий вектор для A). Далее, $f_a=\{P_k(a)\}_0^\infty$ и $g_a=$ $=\{Q_k(a)\}_1^\infty$ — решения (123) при $\lambda=a$ и, следовательно, $f_a,g_a\in\mathfrak{N}_a(A_0)$, т.е..$\dim\mathfrak{N}_a(A_0)=2$. Согласно утверждению 4 $n_\pm(A_0)=2$. Но тогда $n_\pm(A)=1$ и проблема (125) — неопределенна.

***Замечание* 11.** Аналогичные рассуждения применимы к конечно-разностным уравнениям высших порядков. Заметим еще, что введение оператора A_0 позволяет дать естественную (операторную) трактовку полиномам 2-го рода: $g_\lambda\doteq\{Q_k(\lambda)\}_1^\infty$ ($\in\mathfrak{N}_\lambda(A_0)\cap\mathfrak{H}_0$) — полудефектный вектор оператора A_0.

4. Пусть $\{s_k\}_0^{2n}$ — строго позитивная последовательность, $\mathfrak{H}$ — евклидово

пространство полиномов $\mathbb{C}_n[t]$ степени не больше n со скалярным произведением

$$(f, g) = \sum_{j,k=0}^{n} s_{j+k}\alpha_j\overline{\beta}_k \quad \left(f(t) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k t^k,\ g(t) = \sum_{k=0}^{n}\beta_k t^k \in \mathbb{C}_n[t]\right). \tag{127}$$

Пусть, далее, $\{P_k(t)\}_0^n$ — ортогональные относительно последовательности $\{s_k\}_0^{2n}$ полиномы (1-го рода). Рассмотрим в $\mathfrak{H}_0 \doteq \mathfrak{H} \ominus \{P_n(t)\}$ эрмитов оператор A ($\in [\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}]$) умножения на t. Тогда $A^* = \{\{f, A^*_{\rm op}f + cP_n\}; f \in \mathfrak{H}, c \in \mathbb{C}\}$, где $A^*_{\rm op} \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_0]$ и

$$A\,e_k \doteq tP_k(t) = b_{k-1}P_{k-1}(t) + a_kP_k(t) + b_kP_{k+1}(t),\ 0 \le k \le n-1,$$

$$A^*_{\rm op}e_k = Ae_k\ (0 \le k \le n-2),\ A^*_{\rm op}e_{n-1} = b_{n-2}e_{n-2} + a_{n-1}e_{n-1},\ A^*_{\rm op}e_n = b_{n-1}e_{n-1}, \tag{128}$$

где $b_{-1} = 0$, $b_k > 0$, $a_k = \overline{a}_k$, $0 \le k \le n$. Будем отождествлять оператор $A^*_{\rm op} \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_0]$ с оператором $\tilde{A}^*_0 \in [\mathfrak{H}]$, где $\tilde{A}_0$ — нулевое продолжение оператора A ($\tilde{A}_0 e_n = 0$). Полагая

$$\mathcal{H} = \mathbb{C},\ \Gamma_1\hat{f} = (f, P_n),\ \Gamma_2\hat{f} = (f, b_{n-1}P_{n-1} + a_nP_n) - c,\ \hat{f} = \{f, A^*_{\rm op}f + cP_n\}, \tag{129}$$

получаем ПГЗ отношения A^*. Легко видеть, что

$$f_\lambda(t) = h(\lambda, t) \doteq \sum_{k=0}^{n} P_k(\lambda)P_k(t) \in \mathfrak{N}_\lambda,\ A^*_{\rm op}f_\lambda(t) = \lambda f_\lambda(t) - \lambda P_n(\lambda)P_n(t), \tag{130}$$

$$\Gamma_1\hat{f}_\lambda = P_n(\lambda),\ \Gamma_2\hat{f}_\lambda = b_{n-1}P_{n-1}(\lambda) + a_nP_n(\lambda) - \lambda P_n(\lambda) = -b_nP_{n+1}(\lambda). \tag{131}$$

Здесь $\hat{f}_\lambda = \{f_\lambda, \lambda f_\lambda\}$, $h(\lambda, \mu) = (f_\lambda, f_\mu)$ — полиномиальное ядро, соответствующее системе $\{P_k(t)\}_0^n$ (оно же — производящее ядро пространства $\mathfrak{H} = \mathbb{C}_n[t]$). Выбор момента S_{2n+1} для определения полинома $P_{n+1}(t)$ несуществен; замена его на S'_{2n+1} изменяет b_n и $P_{n+1}(t)$ на b'_n и $P'_{n+1}(t)$, не изменяя их произведения: $b_nP_{n+1}(t) = b'_nP'_{n+1}(t)$.

Теперь из (129) и (131) находим функцию Вейля $M(\lambda)$ и оператор V_Γ:

$$M(\lambda) = -\frac{P_n(\lambda)}{b_nP_{n+1}(\lambda)},\ \mathcal{H}_2 \doteq \Gamma_2\{0, \mathfrak{N}\} = \mathbb{C},\ \Gamma_1\{0, \mathfrak{N}\} = \{0\},\ V_\Gamma = \{0\}, \tag{132}$$

где $\mathfrak{N} = \{P_n(t)\}$. Полученные соотношения иллюстрируют теорему 1: a) $\lim\limits_{y\uparrow\infty} M(iy) = V_\Gamma = 0$; b) функция Вейля $M_1(\lambda)$, соответствующая ПГЗ $\{\mathbb{C}, \Gamma_2, -\Gamma_1\}$, содержит линейный член

$$M_1(\lambda) = -M(\lambda)^{-1} = \frac{b_nP_{n+1}(\lambda)}{P_n(\lambda)} = b_n\sqrt{\frac{D_n}{D_{n+1}}}\lambda + a + \frac{G_{n-1}(\lambda)}{P_n(\lambda)}\ \ (\deg G_{n-1} = n-1).$$

Отметим, что перемежаемость корней полиномов $P_n(\lambda)$ и $P_{n+1}(\lambda)$ и их простота являются следствием равенства (132) и включения $M(\lambda) \in (R)$. Перемежаемость и простота корней квазиортогональных многочленов $P_{n+1}(\lambda, \tau_i) \doteq P_{n+1}(\lambda) - \tau_iP_n(\lambda)$ $(i = 1, 2)$ — также следствие неванлинновости функции Вейля $M_2(\lambda) = \dfrac{P_{n+1}(\lambda, \tau_1)}{P_{n+1}(\lambda, \tau_2)}$, $\tau_1 > \tau_2$, соответствующей ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1^1, \Gamma_2^1\}$, где

$\Gamma_i^1 = (\tau_1 - \tau_2)(\tau_i\Gamma_1 + \Gamma_2)$, $i = 1, 2$. Заметим еще, что если $-\infty \le \alpha \le \tilde{A}_2 \le \le \beta \le \infty$, то нули полиномов $P_k(\lambda)$ расположены в (α, β).

Применение теоремы 3 к усеченной проблеме моментов

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k d\sigma(t),\ 0 \le k \le 2n-1,\ \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} d\sigma(t) \le s_{2n} \tag{133}$$

позволяет описать совокупность $\tilde{V}(S; \mathbb{R})$ всех ее мер — решений $\sigma(t)$, также подкласс $V(S; \mathbb{R})$ тех $\sigma(t) \in \tilde{V}(S; \mathbb{R})$, для которых в (133)

$$s_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} d\sigma(t). \tag{134}$$

Предложение 11 [28]. *Пусть* $s = \{s_k\}_0^{2n}$ *— строго позитивная на* $\mathbb{R}$ *последовательность,* $P_k(\lambda)$ *и* $Q_k(\lambda)$ *— ортогональные полиномы* 1- *и* 2-*го рода. Тогда формула Неванлинны*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda} = -\frac{Q_{n+1}(\lambda)\tau(\lambda) - Q_n(\lambda)}{P_{n+1}(\lambda)\tau(\lambda) - P_n(\lambda)} = \frac{Q_n(\lambda)\omega(\lambda) + Q_{n+1}(\lambda)}{P_n(\lambda)\omega(\lambda) + P_{n+1}(\lambda)} \tag{135}$$

устанавливает биективное соответствие между $\sigma(t) \in \tilde{V}(S; \mathbb{R})$ *и* $\tau(\lambda)$ $(= -\omega(\lambda)^{-1}) \in (\tilde{R})$. *При этом верна эквивалентность*

$$\sigma(t) \in V(s; \mathrm{R}) \Leftrightarrow \tau(\lambda) \in (\tilde{R}),\ \lim_{y\uparrow\infty} y\tau(iy) = \infty \left(\Leftrightarrow \lim_{y\uparrow\infty} \frac{\omega(iy)}{y} = 0 \right). \tag{136}$$

Доказательство вытекает из теоремы 3 и формулы (132) для $M(\lambda)$, если выбрать $\mathfrak{L} = \{\mathbb{1}\}$ и заметить, что $\mathfrak{L}$-спектральные функции $\sigma(t) = (E(t)\mathbb{1}, \mathbb{1})$ расширений $\tilde{A} = \tilde{A}$ и только они будут решениями проблемы (133), причем равенство (134) выполнено точно для тех $\sigma(t)$, которые порождены спектральными мерами операторов $\tilde{A} = \tilde{A}^* \supset A$ $(\Leftrightarrow \mathrm{R}_\lambda \in \Omega_A)$. Осталось заметить, что условие M-допустимости функции $\tau(\lambda)$ принимает вид (136), ибо в силу (132) $\lim_{y\uparrow\infty} M(iy) \ne \infty$. Полагая $\omega(\lambda) = -\tau(\lambda)^{-1}$, приходим ко второму равенству в (135), в котором $\omega(\lambda)$ удовлетворяет уже условию Неванлинны: $\lim_{y\uparrow\infty} \omega(iy)/y = 0$.

5. Пусть A — эрмитова матрица в $\mathbb{C}^n$ $(A \in [\mathbb{C}^n])$, g — вектор $(\in \mathbb{C}^n)$. Рассмотрим окаймленную матрицу

$$\tilde{A}_1 = \tilde{A}_1^* = \begin{pmatrix} A & g \\ g^* & a \end{pmatrix} \in [\mathbb{C}^{n+1}]$$

как расширение оператора $A \in [\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n+1}]$, $(a = \bar{a})$ и определим ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ отношения (ср. [30]) $A^* = \{\{f, \tilde{A}_1 f + c\}; f \in \mathbb{C}^{n+1}, c \in \mathbb{C}\}$:

$$\mathcal{H} = \mathbb{C},\ \ \Gamma_1\{f, \tilde{A}_1 f + c\} = c,\ \Gamma_2\{f, \tilde{A}_1 f + c\} = (f, e_{n+1}). \tag{137}$$

Здесь $\{e_k\}_1^{n+1}$ — базис в $\mathbb{C}^{n+1}$, $e_{n+1} \in \mathbb{C}^{n+1} \ominus \mathbb{C}^n$. Функция Вейля, соответствующая ПГЗ (137), имеет вид

$$M(\lambda) = \lambda - a + g^*(A-\lambda)^{-1} g,\ \left(\gamma(\lambda) = 1 \oplus (A-\lambda)^{-1} g\right). \tag{138}$$

Из (138) легко видеть, что

$$M(\lambda) = -\frac{\det(\tilde{A}_1 - \lambda)}{\det(A - \lambda)} \in (R). \tag{139}$$

Из (13) вытекает перемежаемость собственных значений $\{\lambda_k\}_1^n$ и $\{\lambda_k\}_1^{n+1}$ матриц A и $\tilde{A}_1$:

$$\tilde{\lambda}_1 \le \lambda_1 \le \tilde{\lambda}_2 \le \lambda_2 \le \ldots \le \tilde{\lambda}_n \le \lambda_n \le \tilde{\lambda}_{n+1}.$$

Этот факт обычно выводят из вариационного принципа Куранта — Фишера.

Отсюда, в частности, вытекает перемежаемость корней ортогональных полиномов $P_k(\lambda)$, если представить их в виде

$$P_k(\lambda) = \frac{\det(\lambda - J_k)}{b_0 b_1 \cdots b_{k-1}}, \quad J_k = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{k-2} & a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Из формулы (139) можно вывести обратное утверждение: для двух перемежаемых наборов чисел $\{\lambda_k\}_1^n$ и $\{\tilde{\lambda}_k\}_1^{n+1}$ найдутся матрицы A и $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_1^* = \begin{pmatrix} A & g \\ g^* & a \end{pmatrix}$ такие, что $\sigma(A) = \{\lambda_k\}_1^n$, $\sigma(\tilde{A}_1) = \{\lambda_k\}_1^{n+1}$.

6. Пусть $\tilde{A}_2 \doteq \tilde{A} = \tilde{A}^* \ge 0$, $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 - K^*K$, где $\tilde{A}_i \in \mathfrak{C}(\mathfrak{H})$, $K^*K \in \mathfrak{C}[\mathfrak{H}]$ и $0 \in \rho(K^*K)$. Определим ограниченные операторы $\tilde{A}_2(n) \doteq \tilde{A}_2 E_{\tilde{A}_2}(-\infty, n)$, $\tilde{A}_1(n) = \tilde{A}_2(n) - K^*K$. Рассматривая $\tilde{A}_i(n)$, $i = 1, 2$, как трансверсальные $(0 \in \rho(\tilde{A}_2(n) - \tilde{A}_1(n)))$ расширения нулевого оператора $A = 0$, введем ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1^{(n)}, \Gamma_2^{(n)}\}$ отношения $A^* = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$, полагая

$$\mathcal{H} = \mathfrak{H},\ \Gamma_i^{(n)} \hat{f} = (-1)^{i-1}(K^*)^{-1}(f' - \tilde{A}_i(n) f),\ (i = 1,2)\ \ \hat{f} = \{f, f'\}. \tag{140}$$

Тогда $\mathfrak{N}_\lambda = (A_2(n) - \lambda)^{-1}\mathfrak{H}$ и $\forall \hat{f}_\lambda = \{f_\lambda, \lambda f_\lambda\}$ $(f_\lambda \doteq (A_2(n) - \lambda)^{-1} f)$ получаем

$$\Gamma_1 \hat{f}_\lambda = (K^*)^{-1}\left[-f + K^*K(A_2(n) - \lambda)^{-1} f\right],\ \Gamma_2 \hat{f}_\lambda = (K^*)^{-1} f,\ f \in \mathfrak{H}.$$

Отсюда находим функцию Вейля $M_n(\lambda)$, соответствующую ПГЗ (140):

$$M_n(\lambda) = -I + K(A_2(n) - \lambda)^{-1} K^*,\ \gamma_n(\lambda) = (A_2(n) - \lambda)^{-1} K^*. \tag{141}$$

Согласно [19, 31] для каждого ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ такого, что $\tilde{A}_2 \ge 0$, справедливо равенство

$$\dim E_{\tilde{A}_\theta}(-\infty, -\varepsilon) = \dim E_{\theta - M(-\varepsilon)}(-\infty, 0) - \dim E_{\theta - M(-\infty)}(-\infty, 0)\ \ \forall \varepsilon \ge 0, \tag{142}$$

в котором $M(0) = s - R - \lim\limits_{\lambda \uparrow 0} M(\lambda)$, $M(-\infty) = s - R - \lim\limits_{\lambda \downarrow -\infty} M(\lambda)$. Применительно к оператору $\tilde{A}_1$ $(\Leftrightarrow \theta = 0)$ из равенства (142) получаем

$$\dim E_{A_1(n)}(-\infty, -\varepsilon) = \dim E_{-M_n(-\varepsilon)}(-\infty, 0) = \dim E_{M_n(-\varepsilon)}(0, +\infty)\ \ \forall \varepsilon \ge 0. \tag{143}$$

При дополнительном условии $K(\tilde{A}_2 + \lambda)^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty$ операторы $K(\tilde{A}_2(n) + \lambda)^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty$ $(\forall n \in \mathbb{Z}_+)$ и спектр $\sigma(\tilde{A}_1(n))$ в интервале $(-\infty, -\varepsilon)$ дискретен при каждом $\varepsilon > 0$. Поэтому в равенстве (143), обе части которого конечны при каждом $\varepsilon > 0$, возможен предельный переход снизу при $n \to \infty$ и $\varepsilon \ge 0$ [32]:

$$\dim E_{\tilde{A}_1}(-\infty, -\varepsilon) = \dim E_{-M(-\varepsilon)}(-\infty, 0) = \dim E_{M(-\varepsilon)}(0, +\infty), \tag{144}$$

где $M(\lambda)$, которую естественно назвать обобщенной функцией Вейля (обычной она не является: $0 \notin \rho(\operatorname{Im} M(i))$, если $\tilde{A}_2 \notin [\mathfrak{H}]$), имеет вид

$$M(\lambda) = -I + K\left(\hat{A}_2 - \lambda\right)^{-1} K^*. \tag{145}$$

Легко видеть, что соотношение (144) останется верным и для неограниченных возмущений K^*K таких, что $\mathcal{D}(\mathfrak{k}_{K^*K}) = \mathcal{D}[K^*K] = \mathcal{D}(K) \supseteq \mathcal{D}[\tilde{A}] = \mathcal{D}(\mathfrak{k}_{\tilde{A}}) = \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2})$ и форма $\mathfrak{k} \doteq \mathfrak{k}_{\tilde{A}} - \mathfrak{k}_{K^*K}$ замкнута и полуограничена снизу (здесь $\mathfrak{k}_T$ — замкнутая квадратичная форма, ассоциированная с полуограниченным оператором $T = T^* \geq m$: $\mathcal{D}(\mathfrak{k}_T) = \mathcal{D}((T - m)^{1/2})$, $\mathfrak{k}_T[u] = \|(T - m)^{1/2}u\|^2$). В этом случае оператор $\tilde{A}_1$, понимаемый в смысле форм-суммы, ассоциирован с формой $\mathfrak{k}$: $\mathfrak{k}_{\tilde{A}_1} = \mathfrak{k} = \mathfrak{k}_{\tilde{A}} - \mathfrak{k}_{K^*K}$, а функцию $M(\lambda)$ вида (145) следует понимать так:

$$M(\lambda) = -I + K(\tilde{A} - \lambda)^{-1/2}(K(\tilde{A} - \lambda)^{-1/2})^*. \tag{146}$$

Заметим, что соотношение (144) можно доказать непосредственно, минуя предельный переход от (143), и без условия $K(\tilde{A} + \varepsilon)^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty$.

Если $G(0) \doteq I + M(0) \in \mathfrak{S}_p$, то из (144) при $\varepsilon = 0$ вытекает оценка

$$N_-(\tilde{A}_1) \doteq \dim E_{\tilde{A}_1}(-\infty, 0) = \sum_{\lambda_j(G(0))>1} \lambda_j^p \leq \|G(0)\|^p_{\mathfrak{S}_p}. \tag{147}$$

Если отрицательная часть спектра $\sigma(\tilde{A}_1)$ дискретна, но бесконечна, то для собственных чисел $\lambda_n^-(\tilde{A}_1) < 0$ верна (см. [31]) эквивалентность

$$\lambda_n^-(\tilde{A}_1) = O(n^{-p}) \Leftrightarrow \lambda_n^-(I - G(0)) = O(n^{-p}). \tag{148}$$

Теперь из (144)–(147) вытекает известный принцип Бирмана–Швингера. Для его формулировки введем гильбертовы пространства $D_\varepsilon[\tilde{A}]$ с метрикой $\|u\|_\varepsilon^2 = \tilde{A}[u,u] + \varepsilon\|u\|^2$ ($\varepsilon > 0$), а также (считая $\ker \tilde{A} = \{0\}$) пространство $\mathfrak{H}_{\tilde{A}}$ — пополнение $D_0[\tilde{A}]$ по $\tilde{A}$-метрике.

Предложение 12 [33]. *Пусть* $A = A^* \geq 0$ ($A \in \mathfrak{C}(\mathfrak{H})$), $B = B^* \geq 0$, $\mathcal{D}[B] \supseteq \mathcal{D}[A]$ *и форма* $\mathfrak{k} \doteq \mathfrak{k}_A - \mathfrak{k}_B$ *замкнута и полуограничена снизу. Тогда:*

1) *общая кратность спектра оператора* $C = C^*$, *ассоциированного с формой* $\mathfrak{k}$ ($\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_C$), *в интервале* $(-\infty, -\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, *равна общей кратности спектра в* $(1, \infty)$ *формы* $\mathfrak{k}_B$ *в пространстве* $D_\varepsilon[A]$;

2) *если форма* $\mathfrak{k}_B$ *компактна в* $D_1[A]$ ($\mathfrak{H}_A$), *то отрицательный спектр оператора* C *дискретен (конечен);*

3) *чтобы отрицательная часть спектра оператора* C_h, *ассоциированного с формой* $h\mathfrak{k}_A - \mathfrak{k}_B$, *была при любом* $h > 0$ *дискретна (конечна), необходимо и достаточно, чтобы форма* $\mathfrak{k}_B (= B[u, u])$ *была компактна в* $D_1[A]$ ($\mathfrak{H}_A$).

Доказательство. Утверждение 1 — следствие равенств (144)–(146). Далее, из компактности формы $\mathfrak{k}_B$ в $D_1[A]$ следует (см. [33]) замкнутость и полуограниченность снизу формы $\mathfrak{k} \doteq \mathfrak{k}_A - \mathfrak{k}_B \Rightarrow \exists\, C = C^* \geq m$: $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_C$. Остальные утверждения вытекают теперь из цепочки эквивалентностей: форма $\mathfrak{k}_B$ компактна в $D_\varepsilon[A] \Leftrightarrow$ — произвольное $(A + \varepsilon)$-ограниченное множество является B-компактным $\Leftrightarrow$ оператор $T = B^{-1/2}(A+\varepsilon)^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty \Leftrightarrow TT^* = I + M(-\varepsilon) \in \mathfrak{S}_\infty$. В частности, компактность формы $\mathfrak{t}_B$ в $\mathfrak{H}_A$ эквивалентна компактности оператора $I + M(0)$ $(M(0) \doteq s-R-\lim\limits_{\lambda\uparrow 0} M(\lambda))$. Проиллюстрируем соотношение (147) двумя известными примерами.

а). Пусть $\mathfrak{H} = L_2[0,\infty)$, $Ay = -y''$, $\mathcal{D}(A) = \overset{\circ}{W}{}_2^2$ $(y \in \overset{\circ}{W}{}_2^2 \Leftrightarrow y \in W_2^2,\ y(0)=0)$, $By = q(x)y$, $C \doteq A - B$ $(q(x) \ge 0,\ q \in C_{[0,\infty]})$. В этом случае

$$M(\lambda)f = -f + \int_0^\infty \sqrt{q(x)q(t)}\,G(x,t,\lambda)f(t)dt,$$

где $G(x,t,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\operatorname{sh} t\sqrt{-\lambda}\exp\left(-x\sqrt{-\lambda}\right)$, $t \le x$. Находим $M(0)$:

$$M(0)f = -f + \int_0^\infty \sqrt{q(x)q(t)}\,G(x,t,0)f(t)dt,\quad G(x,t,0) = \begin{cases} t, & t \le x; \\ x, & t \ge x. \end{cases}$$

Отсюда и из (147) при $p = 1$ вытекает оценка Баргмана [33–35]

$$N_-(C) = \dim E_C(-\infty,0) \le \operatorname{sp}(I + M(0)) = \int_0^\infty x q(x)dx.$$

б). Пусть $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^3)$, $A = -\Delta$, $By = q(x)y$, $C = A - B$, $By = \sqrt{q(x)}\,y$ и $q(x)$ (≥ 0) принадлежит классу Рольника [34]. Тогда

$$M(\lambda) = -f + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sqrt{q(x)q(t)}\exp\left(-\sqrt{-\lambda}\,|x-t|\right)}{4\pi|x-t|} f(t)dt.$$

Поэтому для $M(0)$ получаем выражение

$$M(0)f = -f + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sqrt{q(x)q(t)}}{4\pi|x-t|} f(t)dt. \tag{149}$$

Из (149) и (147) при $p = 2$ вытекает оценка Бирмана — Швингера [33, 34]:

$$N_-(C) = \dim E_C(-\infty,0) \le \| M(0) + I \|^2_{\mathfrak{S}_2} = \iint \frac{q(x)q(t)}{16\pi^2|x-t|^2}dxdt.$$

Из соотношения (148) можно получить информацию об асимптотике отрицательного спектра оператора Шредингера.

1. *Маламуд М. М.* Об одном подходе к теории расширений неплотно заданного эрмитова оператора // Докл. АН УССР. – 1990. – №3. – С.20–25.
2. *Наймарк М. А.* О самосопряженных расширениях второго рода // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1940. – №4. – С.53–104.
3. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 543с.
4. *Красносельский М. А.* О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов // Укр. мат. журн. – 1949. – №1. – С.21–38.
5. *Шмульян Ю. Л.* Регулярные и сингулярные эрмитовы операторы // Мат. заметки. – 1970. – **8**, №2. – С.197–203.
6. *Bennewitz C.* Symmetric relations on a Hilbert space // Lect. Notes Math. – 1972. – **280**. – P.212–218.
7. *Штраус А. В.* О расширениях и характеристической функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **32**, №1. – С.186–207.
8. *Coddington E. A.* Extension theory of formally normal and symmetric subspaces // Mem. Amer. Math. Soc. – 1973. – **134**. – P.1–80.

9. *Брук В. М.* О расширениях симметрических отношений // Мат. заметки. – 1977. – **22**, №6. – С.825–834.
10. *Карпенко И. И., Кужель А. В.* Пространства граничных значений эрмитовых операторов. – Симферополь, 1989. – 7с. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 766. – Ук 89.
11. *Кужель С. А.* О пространствах граничных значений эрмитовых операторов // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, №6. – С.854–857.
12. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально–операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284с.
13. *Павлов Б. С.* Теория расширений и явно решаемые модели // Успехи мат. наук. – 1987. – **42**, №6. – С.99–131.
14. *Кочубей А. М.* О характеристических функциях симметрических операторов // Изв. АН АрмССР. Математика. – 1980. – №3. – С.218–232.
15. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №4. – С.435–459.
16. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией. – Донецк, 1985. – 51с. – (Препринт / АН УССР. Донец. физ.–техн. ин–т; 85–9).
17. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* О функции Вейля и эрмитовых операторах с лакунами // Докл. АН СССР. – 1987. – **293**, №5. – С.1041–1046.
18. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Обобщенные резольвенты и граничные задачи. – Киев, 1988. – 64с. – (Препринт / АН УССР. Ин–т математики; 88.59).
19. *Derkach V. A., Malamud M. M.* Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps // J. Funct. Anal. – 1991. – **95**, №1. – P.1–95.
20. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740с.
21. *Dijksma A., de Snoo H. S. V.* Self–adjoint extensions of symmetric subspaces // Pacif. J. Math. – 1974. – **54**, № 1. – P.71–100.
22. *Крейн М. Г., Лангер Г. К.* О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в Π_κ // Функцион. анализ. – 1971. – **5**, №3. – С. 54–69.
23. *Штраус А. В.* Расширения и обобщенные резольвенты неплотно заданного симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1970. – **34**, №1. – С.175–202.
24. *Штраус А. В.* О расширениях, характеристических функциях и обобщенных резольвентах эрмитовых операторов // Докл. АН СССР. – 1968 .– **178**, №4. – С. 790–792.
25. *Кужель А. В.* Расширения эмитовых операторов. – Киев: Выща шк., 1989. – 56с.
26. *Шмульян Ю. Л.* О резольвентной матрице операторного узла // Мат. исслед. – 1973. – **8**, №4. – С.157–174.
27. *Александров Е. Л., Ильмушкин Г. М.* Обобщенные резольвенты симметрических операторов // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 5. – С.783–794.
28. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. – М.: Физматгиз, 1961. – 310с.
29. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800с.
30. *Деркач В.А., Маламуд М. М.* Обобщенные резольвенты эрмитовых операторов // Докл. АН Украины. – 1991. – №11. – С.34–39.
31. *Маламуд М. М.* О некоторых классах расширений эрмитова оператора с лакунами // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №2. – С. 215–235.
32. *Рофе–Бекетов Ф. С.* Возмущения полуограниченных операторов на переменных областях // Докл АН СССР. – 1980. – **255**, №5. – С.1054–1058.
33. *Бирман М. С.* О спектре сингулярных граничных задач // Мат. сб. – 1961. – **55**, №2. – С.125–174.
34. *Рид М., Саймон Б.* Методы математической физики. – М.: Мир, 1982. – 428с.
35. *Березин Ф. А., Шубин М. А.* Уравнения Шредингера. – М.: Изд–во Моск. ун–та, 1983.– 392с.

Получено 01.04.92