УДК 519.53

В. А. Романов, канд. физ.-мат. наук
(Кировогр. пед. ин-т)

Пределы аналитических векторных мер

Исследуется вопрос о том, когда векторная мера является пределом последовательности аналитических векторных мер в смысле сходимости по полувариации и когда — пределом последовательности таких мер по вариации.

Досліджується питання про те, коли векторна міра є границею послідовності аналітичних векторних мір за напівваріацією і коли — границею послідовності таких мір за варіацією.

Пусть H — линейная оболочка ортонормированного базиса в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве X, μ — векторная мера, определенная на сигма-алгебре $B(X)$ борелевских подмножеств пространства X и принимающая значения в банаховом пространстве Y. В данной работе исследованы вопросы о том, когда векторная мера μ может быть представлена как предел H-аналитических векторных мер в смысле сходимости по полувариации и когда — как предел таких мер по вариации.

Понятие аналитичности скалярных мер введено в [1]. В [2] исследована связь аналитичности с другими дифференциальными свойствами скалярных мер, в [3] — пределы H-дифференцируемых скалярных мер. В связи с развитием теории общих векторных мер (основные понятия этой теории содержатся в [4]) представляет интерес рассмотрение H-аналитичности и соответствующих пределов для векторных мер.

1. Под сдвигом векторной меры μ на элемент $h \in X$ понимается векторная мера μ, задаваемая формулой $\mu_h(E) = \mu(E + h)$. В соответствии с [1] μ называем H-аналитической, если для любых $h \in H$ и $E \in \mathcal{B}(X)$ функция $t \to \mu(E + th)$ продолжается аналитически в некоторую окрестность нуля в $\mathbb{C}$, не зависящую от E. Из аналитичности μ по направлению h вытекает не только ее бесконечная дифференцируемость, но и квазиинвариантность по направлению h (доказательство, приведенное в [2] (предложение 3, часть 2), легко переносится и на случай векторных мер).

Полувариацию векторной меры μ обозначаем через $\|\mu\|$, а вариацию — через $\operatorname{Var}\mu$. Известно, что полувариация векторной меры всегда конечна, а вариация — не всегда.

Векторную меру μ называем H-непрерывной, если для любого $h \in H$ $\lim\limits_{t\to 0} \| \mu_{th} - \mu \| = 0$.

Если векторная мера μ имеет конечную вариацию, то называем ее H-непрерывной относительно вариации, если для любого $h \in H$ $\lim\limits_{t\to 0} \operatorname{Var}(\mu_{th} - \mu) = 0$.

2. Вначале рассмотрим пределы аналитических мер относительно полувариации.

Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в пространстве X, линейная оболочка которого совпадает с H. Обозначим через P_N оператор ортогонального проектирования из X на конечномерное подпространство L_N, порожденное первыми N элементами указанного базиса, а через $P_N(\mu)$ — проекцию μ на L_N.

Лемма 1. *Для полувариации векторной меры μ выполняется равенство* $\| \mu \| = \sup\limits_N \| P_N(\mu)\|$.

Утверждение леммы вытекает из соответствующих равенств для вещественных мер $x^*\mu$, где y^* — элементы сопряженного к Y пространства, а также из формулы

$$\| \mu \| \equiv \sup_{|\alpha_k|\leqslant 1} \Big\| \sum_k \alpha_k \mu(E_k) \Big\| = \sup_{\|y^*\|\leqslant 1} \sup_{|\alpha_k|\leqslant 1} \Big\| \sum_k \alpha_k (y^*\mu)(E_k) \Big\| ,$$

где верхняя грань в левой части и внутренняя верхняя грань в правой части берутся по всем системам из конечного числа попарно непересекающихся борелевских множеств и по всем таким наборам скаляров, для которых $|\alpha_k| \leqslant 1$, а внешняя верхняя грань в правой части — по всем таким элементам $y^* \in Y^*$, для которых норма в сопряженном пространстве не превышает 1.

П р е д л о ж е н и е 1. *Для произвольной H-непрерывной векторной меры μ в пространстве X существует линейный оператор A, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) *матрица оператора A диагональна в базисе $\{e_n\}$;*
2) *все собственные значения оператора A строго положительны;*
3) *оператор A^2 ядерный;*
4) *для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для производного элемента $x \in X$ из условия $\|x\| < \delta$ вытекает неравенство $\|\mu_{A(x)} - \mu\| < \varepsilon$.*

Доказательство этого предложения опирается на лемму 1 и аналогично доказательству соответствующего предложения для числовых мер (см. [3], предложение 2).

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы векторная мера μ была пределом в смысле сходимости по полувариации некоторой последовательности H-аналитических векторных мер, необходимо и достаточно, чтобы она была H-непрерывной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь условия H-непрерывности вытекает из замкнутости множества векторных H-непрерывных мер относительно операции предельного перехода по полувариации и из того факта, что каждая H-аналитическая мера H-непрерывна.

Пусть теперь векторная мера μ H-непрерывна, A — линейный оператор, фигурирующий в предложении 1, m — гауссова мера с нулевым средним и корреляционным оператором A^2, (m_n) — последовательность гауссовых мер, задаваемых на борелевских множествах E формулой $m_n(E) = m(nE)$, $\mathbf{v}_n$ — последовательность векторных мер, задаваемых формулой

$$\nu_n(E) = \int_X \mu(E + A(x))\, dm_n(x). \tag{1}$$

Интеграл в правой части формулы (1) существует в смысле Бохнера, так как гауссова мера m_n сосредоточена на некотором σ-компакте, а ограниченная подынтегральная функция $x \to \mu(E + A(x))$, будучи непрерывной (и даже, как следует из предложения 1, равномерно непрерывной), почти m_n-сепарабельнозначна.

Пусть $h \in H$ и $A(y) = -h$. Тогда из (1) вытекает

$$\nu_n(E + th) = \int_X \mu(E + A(x))\, d(m_n)_{ty}(x). \tag{2}$$

Так как гауссова мера m_n аналитична по направлению y [1], то из [2] (предложение 3, часть 1) вытекает, что для достаточно малых значений $|t|$ сдвинутая гауссова мера $(m_n)_{ty}$ представима как сходящийся по вариации ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} d_y^k m_n$, где $d_y^k m_n$ — дифференциал k-го порядка меры m_n при приращении y. Отсюда и из (2) получаем, что для таких значений $|t|$ и любого борелевского множества E функция $t \to \nu_n(E + th)$ разложима в ряд по степеням t. Следовательно, мера ν_n H-аналитична.

Пусть теперь задано $\varepsilon > 0$, а число $\delta > 0$ найдено в соответствии с предложением 1. Из формулы (1) вытекает

$$\|\nu_n - \mu\| \leqslant \int_X \|\mu_{A(x)} - \mu\|\, dm_n(x). \tag{3}$$

Разбив этот интеграл в сумму интегралов по шару $U(0, \delta)$ и по его дополнению, а также учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, получаем, что построенная последовательность векторных мер $\mathbf{v}_n$ сходится по полувариации к μ. Теорема доказана.

3. Теперь рассмотрим пределы относительно вариации.

Т е о р е м а 2. *Пусть векторная мера μ имеет конечную вариацию. Тогда для того чтобы μ была пределом в смысле сходимости по вариации некоторой последовательности H-аналитических векторных мер, необходимо и достаточно, чтобы она была H-непрерывной относительно вариации.*

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 и основано на следующем неравенстве, аналогичном неравенству (3):

$$\mathrm{Var}(\nu_n - \mu) \leqslant \int_X \mathrm{Var}(\mu_{A(x)} - \mu)\, dm_n(x),$$

а также на соо тветствующем аналоге предложения 1.

1. *Бенткус В. Ю.* Аналитичность гауссовских мер // Теория вероятностей и ее применения.— 1982.— **27**, № 1.— С. 147—154.
2. *Богачев В. И.* Несколько результатов о дифференцируемых мерах // Мат. сб.— 1985.— **127**, № 3.— С. 336—351.
3. *Романов В. А.* Пределы дифференцируемых мер в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн.— 1981.— **33**, № 2.— С. 215—219.
4. *Diestel J., Uhl J. J.* Vector measures.— Providence, 1977.— 322 p.

Получено 05.12.88