УДК 517.9

Нгуен Тиен Кхием, канд. физ.-мат. наук (Вьетнам)

Новый подход к решению стационарного уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова для случайно-колебательных нелинейных систем

Показано, что уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова относительно амплитуды и фазы, в стационарном случае, может быть приведено к уравнению в частных производных первого порядка, которое называется приведенным стационарным уравнением Фоккера — Планка — Колмогорова. Предложен один способ для приближенного решения этого приведенного уравнения, не требующий предположения о малости нелинейности системы и интенсивности случайных воздействий.

Показано, що рівняння Фоккера — Планка — Колмогорова відносно амплітуди та фази в стаціонарному випадку може бути зведене до рівняння в частинних похідних першого порядку, яке називається зведеним стаціонарним рівнянням Фоккера — Планка — Колмогорова. Запропоновано один спосіб для наближеного розв'язку цього зведеного рівняння, що не вимагає припущення про малість нелінійності системи та інтенсивності випадкових дій.

1. Понижение порядка уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова (УФПК). Рассматривается колебательная система вида

$$\ddot{x} + \nu^2 x = f(\nu t, x, \dot{x}) + \sqrt{g(\nu t, x, \dot{x})}\,\xi(t), \tag{1}$$

ν— положительная постоянная, f, g — функции переменных νt, x, $\dot{x}$, периодические по νt с периодом 2π, причем $g > 0$, $\xi(t)$ — случайный процесс типа белого шума.

С помощью замены переменных [ν]

$$x = a\cos\Phi,\ \dot{x} = -\nu a\sin\Phi,\ \Phi = \nu t + \theta$$

уравнение (1) приводится к системе уравнений Ито

$$da = \{-\nu^{-1} f\sin\Phi + (2\nu^2 a)^{-1} g\cos^2\Phi\}\,dt - \nu^{-1}\sqrt{g}\sin\Phi\, dB(t);$$

$$d\theta = \{-(\nu a)^{-1} f\cos\Phi - (\nu a)^{-2} g\cos\Phi\sin\Phi\}\,dt - (\nu a)^{-1}\sqrt{g}\cos\Phi\, dB(t),$$

здесь $B(t)$ — винеровский процесс.

Для многомерного диффузионного процесса $\{a(t),\ \theta(t)\}$ стационарная плотность вероятностей $P(a, \theta)$ удовлетворяет УФПК

$$-\frac{\partial}{\partial a}(K_1 P) - \frac{\partial}{\partial\theta}(K_2 P) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(D_1 P) + \frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}(D_{12} P) + {} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(D_2 P) = 0, \tag{2}$$

где

$$K_1 = -\frac{f}{\nu}\sin\Phi + \frac{g}{2a\nu^2}\cos^2\Phi;\quad K_2 = -\frac{f}{\nu a}\cos\Phi - \frac{g}{\nu^2 a^2}\cos\Phi\sin\Phi;$$

$$D_1 = \frac{g}{\nu^2}\sin^2\Phi;\quad D_{12} = \frac{g}{a\nu^2}\cos\Phi\sin\Phi;\quad D_2 = \frac{g}{\nu^2 a^2}\cos^2\Phi.$$

Если введем обозначения

$$\sigma_a = \nu^{-1}\sqrt{g}\sin\Phi,\quad \sigma_\theta = (\nu a)^{-1}\sqrt{g}\cos\Phi,$$

то коэффициенты K_1, K_2, D_1, D_{12}, D_2 примут вид

$$K_1 = -fg^{-1/2}\sigma_a + \frac{1}{2}a\sigma_\theta^2;\quad K_2 = -fg^{-1/2}\sigma_\theta - \frac{1}{a}\sigma_a\sigma_\theta;\quad D_1 = \sigma_a^2;$$

$$D_{12} = \sigma_a\sigma_\theta,\ D_2 = \sigma_\theta^2. \tag{3}$$

Перепишем (2) в виде

$$\frac{\partial}{\partial a}\left\{2Q_1P + \sigma_a^2\frac{\partial P}{\partial a} + \sigma_a\sigma_\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right\} + \frac{\partial P}{\partial\theta}\left\{2Q_2P + \sigma_a\sigma_\theta\frac{\partial P}{\partial a} + \sigma_\theta^2\frac{\partial P}{\partial\theta}\right\} = 0, \tag{4}$$

где

$$Q_1 = -K_1 + \sigma_a\frac{\partial\sigma_a}{\partial a} + \frac{1}{2}\left(\sigma_a\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \sigma_\theta\frac{\partial\sigma_a}{\partial\theta}\right);$$

$$Q_2 = -K_2 + \frac{1}{2}\left(\sigma_a\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial a} + \sigma_\theta\frac{\partial\sigma_a}{\partial a}\right) + \sigma_\theta\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}. \tag{5}$$

Равенство (4) означает существование такой функции L, что

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = 2Q_1P + \sigma_a\left(\sigma_a\frac{\partial P}{\partial a} + \sigma_\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right).$$

$$-\frac{\partial L}{\partial a} = 2Q_2P + \sigma_\theta\left(\sigma_a\frac{\partial P}{\partial a} + \sigma_\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right). \tag{6}$$

Умножив первое уравнение системы (6) на σ_θ, а второе — на $-\sigma_a$ и затем сложив их, получаем

$$\sigma_a\frac{\partial L}{\partial a} + \sigma_\theta\frac{\partial L}{\partial\theta} = 2(\sigma_\theta Q_1 - \sigma_a Q_2)P \equiv 2QP. \tag{7}$$

На основании (3) и (5), Q_1, Q_2 имеют вид

$$Q_1 = \sigma_a Q_0,\ Q_2 = \sigma_\theta Q_0,$$

$$Q_0 = fg^{-1/2} - (2a)^{-1}\sigma_a + \frac{\sigma_a}{2g}\frac{\partial g}{\partial a} + \frac{\sigma_\theta}{2g}\frac{\partial g}{\partial\theta}, \tag{8}$$

откуда непосредственно вытекает

$$Q = \sigma_\theta Q_1 - \sigma_a Q_2 = 0.$$

Следовательно, уравнение (7) примет вид

$$\sigma_a\frac{\partial L}{\partial a} + \sigma_\theta\frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

или, после упрощения,

$$a\sin\Phi\frac{\partial L}{\partial a} + \cos\Phi\frac{\partial L}{\partial\theta} = 0.$$

Нетрудно видеть, что последнее уравнение допускает общий интеграл

$$L = M(\nu t,\ a\cos\Phi),$$

где M $(\nu t, x)$ — произвольная функция. Тогда, далее, имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -H_0\sigma_a; \quad \frac{\partial L}{\partial a} = H_0\sigma_\theta;$$

$$H_0(\nu t, a, \theta) = \nu a H(\nu t, a\cos\Phi)[g(\nu t, a\cos\Phi, -\nu a\sin\Phi)]^{-1/2}. \tag{9}$$

Здесь $H(\nu t, x) = \partial M/\partial x$ — произвольная функция. В дальнейшем вместо M будем рассматривать только H.

Подставив (8) и (9) в (6), после сокращения общих множителей получим лишь одно уравнение

$$\sigma_a \frac{\partial P}{\partial a} + \sigma_\theta \frac{\partial P}{\partial \theta} + 2Q_0P + H_0 = 0$$

или, в развернутом виде,

$$a\sin\Phi\frac{\partial P}{\partial a} + \cos\Phi\frac{\partial P}{\partial \theta} + P\left\{\frac{2\nu af}{g} - \sin\Phi + a\sin\Phi\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial a} + \right.$$

$$\left. + \cos\Phi\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right\} + \nu^2a^2H(\nu t, a\cos\Phi)[g(\nu t, a\cos\Phi, -\nu a\sin\Phi]^{-1} = 0. \tag{10}$$

Таким образом, исходное УФПК (4) эквивалентно уравнению (10), которое представляет собой уравнение в частных производных первого порядка. Это уравнение будем называть приведенным стационарным УФПК (ПУФПК).

Следует отметить, что ввиду зависимости коэффициентов уравнения (10) от νt это уравнение может не иметь независящего от νt решения. В таком случае в силу эквивалентности уравнений (2) и (10) УФПК не имеет стационарного решения. Условие разрешимости уравнения (10) тогда будет и условием существования стационарного решения УФПК. Кроме того, (10) содержит произвольную функцию H, которую можно выбрать так, чтобы это уравнение было разрешимо.

Теорема 1. *УФПК имеет стационарное решение* $P(a, \theta)$ *тогда и только тогда, когда возможно выбрать такую функцию* $H(\nu t, a\cos\Phi)$, *что уравнение* (10) *допускает не зависящее от* νt *решение, являющееся стационарным решением исходного УФПК.*

2. Об одном подходе решения ПУФПК. Запишем (10)

$$K\left(\frac{\partial P}{\partial a}, \frac{\partial P}{\partial \theta}, P, a, \theta, \Phi\right) = 0, \tag{11}$$

где

$$K = \left(a\frac{\partial P}{\partial a} - P\right)\sin\Phi + \frac{\partial P}{\partial \theta}\cos\Phi + F(a, \theta, \Phi) + G(a, \theta, \Phi),$$

$$F(a, \theta, \Phi) = \frac{2\nu af}{g} + a\sin\Phi\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial a} + \cos\Phi\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial \theta},$$

$$G(a, \theta, \Phi) = \nu^2a^2H(\Phi - \theta, a\cos\Phi)/g(a, \theta, \Phi), \tag{12}$$

$$f = f(a, \theta, \Phi) = f(\Phi - \theta, a\cos\Phi, -\nu a\sin\Phi), \quad P = P(a, \theta),$$

$$g = g(a, \theta, \Phi) = g(\Phi - \theta, a\cos\Phi, -\nu a\sin\Phi).$$

Задача состоит в нахождении такой функции P двух переменных a, θ, что (11) выполняется тождественно для Φ. Поскольку K — функция, периодическая по Φ с периодом 2π. Функция P должна удовлетворять системе

$$\langle Ke^{in\Phi}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K\left(\frac{\partial P}{\partial a}, \frac{\partial P}{\partial \theta} P; a, \theta, \Phi\right)e^{in\Phi}d\Phi = 0$$

для всех целых значений n.

При $n = 1$ имеем систему

$$a\frac{\partial P}{\partial a} - P + F_s P + G_s = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} + F_c P + G_c = 0. \tag{13}$$

Для других значений n выполняется равенство

$$F_n P + G_n = 0. \tag{14}$$

В (13), (14) через F_s, F_c, G_s, G_c, F_n, G_n обозначены следующие выражения:

$$F_s = \langle F(a, \theta, \Phi)\sin\Phi\rangle, \ F_c = \langle F(a, \theta, \Phi)\cos\Phi\rangle.$$

$$G_s = \langle G(a, \theta, \Phi)\sin\Phi\rangle, \ G_c = \langle G(a, \theta, \Phi)\cos\Phi\rangle,$$

$$F_n = \langle F(a, \theta, \Phi)e^{in\Phi}\rangle, \ G_n\langle G(a, \theta, \Phi)e^{in\Phi}\rangle.$$

Относительно P система (13) является дифференциальной, а (14) алгебраической. Если для решения $P(a, \theta)$ системы (13) и функций F, G (14) удовлетворяется тождественно, то $P(a, \theta)$ будет точным решением УФПК. Таким образом, условия разрешимости системы (13) и соотношения (14) служат условиями существования стационарного решения УФПК. Они, в свою очередь, являются уравнениями для выбора H по известным функциям f, g.

Систему уравнений (13) назовем системой K-укороченных уравнений, а его решение — K-приближенным решением УФПК. Следовательно, K-приближенное решение УФПК будет его точным решением, если для него выполняется (14). Итак, (14) одновременно является условием для того, чтобы K-приближенное решение было точным.

Анализ условий (14) и оценка точности K-приближенного решения будут рассмотрены в отдельной работе. Здесь исследуем лишь систему K-укороченных уравнений (13). Адекватность этой системы, как будет показано ниже, подтверждается тем, что ее решение во многих случаях совпадает с решением, полученным обоснованным методом усреднения.

Рассмотрим (13). Для этого положим

$$P(a, \theta) = aW(a, \theta). \tag{15}$$

Тогда

$$a\frac{\partial P}{\partial a} - P = a^2\frac{\partial W}{\partial a}, \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = a\frac{\partial W}{\partial \theta}.$$

Следовательно, (13) приводится к виду

$$\frac{\partial W}{\partial a} + \overline{F}_s W + \overline{G}_s = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \theta} + a\overline{F}_c W + a\overline{G}_c = 0, \tag{16}$$

где

$$\overline{F}_s = 2\nu\left\langle\frac{f\sin\Phi}{g}\right\rangle + \left\langle\sin^2\Phi\frac{\partial\ln g}{\partial a}\right\rangle + \frac{1}{a}\left\langle\cos\Phi\sin\Phi\frac{\partial\ln g}{\partial\theta}\right\rangle,$$

$$\overline{F}_c = 2\nu\left\langle\frac{f\cos\Phi}{g}\right\rangle + \left\langle\cos\Phi\sin\Phi\frac{\partial\ln g}{\partial a}\right\rangle + \frac{1}{a}\left\langle\cos^2\Phi\frac{\partial\ln g}{\partial\theta}\right\rangle,$$

$$\overline{G}_s = \nu^2\left\langle\frac{H(\Phi-\theta, a\cos\Phi)\sin\Phi}{g(\Phi-\theta, a\cos\Phi, -\nu a\sin\Phi)}\right\rangle,$$

$$\overline{G}_c = \nu^2\left\langle\frac{H(\Phi-\theta, a\cos\Phi)\cos\Phi}{g(\Phi-\theta, a\cos\Phi, -\nu a\sin\Phi)}\right\rangle.$$

Система (16) согласно [2] будет инволюционной, если выполняются условия

$$\frac{\partial\overline{F}_s}{\partial\theta} - \frac{\partial(a\overline{F}_c)}{\partial a} = 0; \tag{17}$$

$$\frac{\partial\overline{G}_s}{\partial\theta} + a\overline{F}_c\overline{G}_s - \frac{\partial(a\overline{G}_c)}{\partial a} - a\overline{F}_s\overline{G}_c = 0, \tag{18}$$

это условия интегрируемости системы (16).

Действительно, из (17) вытекает, что существует такая функция F_0, что

$$\overline{F}_s = \frac{\partial F_0(a, \theta)}{\partial a}, \quad a\overline{F}_c = \frac{\partial F_0(a, \theta)}{\partial \theta}. \tag{19}$$

Очевидно,

$$F_0(a, \theta) = \frac{1}{2} \int (\overline{F}_s da + a\overline{F}_c d\theta). \tag{20}$$

С учетом (19) можем записать (18) в виде

$$\frac{\partial \overline{G}_s}{\partial \theta} + \frac{\partial F_0}{\partial \theta} \overline{G}_s = \frac{\partial (a\overline{G}_c)}{\partial a} + \frac{\partial F_0}{\partial a} a\overline{G}_c.$$

Умножая обе части этого равенства на e^{F_0} и учитывая тождества

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(e^{F_0}\overline{G}_s) = e^{F_0}\left(\frac{\partial \overline{G}_s}{\partial \theta} + \overline{G}_s \frac{\partial F_0}{\partial \theta}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial a}(e^{F_0}a\overline{G}_c) = e^{F_0}\left(\frac{\partial (a\overline{G}_c)}{\partial a} + a\overline{G}_c \frac{\partial F_0}{\partial a}\right),$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(e^{F_0}\overline{G}_s) = \frac{\partial}{\partial a}(e^{F_0}a\overline{G}_c).$$

Отсюда для функции

$$\Psi(a, \theta) = -\frac{1}{2} \int e^{F_0}(\overline{G}_s da + a\overline{G}_c d\theta) \tag{21}$$

выполняются соотношения

$$\overline{G}_s = -e^{-F_0} \frac{\partial \Psi}{\partial a}, \quad a\overline{G}_c = -e^{-F_0} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}. \tag{22}$$

После подстановки (19) и (22) в (16) получаем

$$\frac{\partial W}{\partial a} + \frac{\partial F_0}{\partial a} W - e^{-F_0} \frac{\partial \Psi}{\partial a} = 0; \qquad \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\partial F_0}{\partial \theta} W - e^{-F_0} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial a}(e^{F_0}W - \Psi) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(e^{F_0}W - \Psi) = 0,$$

отсюда непосредственно следует

$$W = [C_0 + \Psi(a, \theta)] \exp\{-F_0(a, \theta)\},$$

где C_0 — постоянная. Наконец, согласно (15) решение системы (13) имеет вид

$$P(a, \theta) = [C_0 + \Psi(a, \theta)]\, a \exp\{-F_0(a, \theta)\}. \tag{23}$$

Постоянная C_0 и функция Ψ должны удовлетворять условиям

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} P(a, \theta)\, da d\theta = 1, \quad \lim_{a \to \infty} P(a, \theta) = 0.$$

Т е о р е м а 2. *Если для функции* $\overline{F}_s$, $\overline{F}_c$ *выполняется условие* (17) *и можно выбрать функции* $\overline{G}_s$, $\overline{G}_c$, *удовлетворяющие* (18), *то решение системы К-укороченных уравнений* (13) *имеет вид* (23) *вместе с* (20) *и* (21).

В частности, выбор $\overline{G}_s = \overline{G}_c = 0$ полностью удовлетворяет (18). Тогда $\Psi = 0$, следовательно

$$P(a, \theta) = C_0 a \exp\left\{-\frac{1}{2} \int (\overline{F}_s da + a\overline{F}_c d\theta)\right\}. \tag{24}$$

Это решение УФПК называют потенциальным [3] и оно соответствует нулевому потоку вероятностей.

3. В качестве примера рассмотрим систему

$$\ddot{x}+\nu^2 x = A(\nu t)+f_0(x,\dot{x})+f_1(x,\dot{x})\cos\nu t+f_2(x,\dot{x})\cos 2\nu t+\sigma_0\xi(t). \qquad (25)$$

Здесь σ_0 — постоянная, A — периодическая функция от νt. В этом случае имеем

$$g=\sigma_0^2=\mathrm{const},\ f=A(\nu t)+f_0(x,\dot{x})+f_1(x,\dot{x})\cos\nu t+f_2(x,\dot{x})\cos 2\nu t.$$

Поэтому

$$\overline{F}_s=\frac{2\nu}{\sigma_0^2}\{\langle f_0\sin\Phi\rangle+\langle f_1\cos\Phi\sin\Phi\rangle\cos\theta+\langle f_1\sin^2\Phi\rangle\sin\theta+$$
$$+\langle f_2\sin\Phi\cos 2\Phi\rangle\cos 2\theta+\langle f_2\sin\Phi\sin 2\Phi\rangle\sin 2\theta+\langle A(\Phi)\sin\Phi\rangle\cos\theta+$$
$$+\langle A(\Phi)\cos\Phi\rangle\sin\theta\};$$

$$\overline{F}_c=\frac{2\nu}{\sigma_0^2}\{\langle f_0\cos\Phi\rangle+\langle f_1\cos^2\Phi\rangle\cos\theta+\langle f_1\cos\Phi\sin\Phi\rangle\sin\theta+$$
$$+\langle f_2\cos\Phi\cos 2\Phi\rangle\cos 2\theta+\langle f_2\cos\Phi\sin 2\Phi\rangle\sin 2\theta+$$
$$+\langle A(\Phi)\cos\Phi\rangle\cos\theta-\langle A(\Phi)\sin\Phi\rangle\sin\theta\}.$$

Для $\overline{F}_s$, $\overline{F}_c$ условие (17) выполнится, если

$$\langle f_0\cos\Phi\rangle=0,\ \ \frac{\partial}{\partial a}\langle af_1\cos^2\Phi\rangle-\langle f_1\sin^2\Phi\rangle=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\langle af_1\cos\Phi\sin\Phi\rangle+\langle f_1\cos\Phi\sin\Phi\rangle=0;\quad \frac{\partial}{\partial a}\langle af_2\cos\Phi\sin 2\Phi\rangle+$$

$$+2\langle f_2\sin\Phi\cos 2\Phi\rangle=0;\quad \frac{\partial}{\partial a}\langle af_2\cos\Phi\cos 2\Phi\rangle-2\langle f_2\sin\Phi\sin 2\Phi\rangle=0.$$

При выполнении последних равенств K-приближенное решение стационарного УФПК имеет вид

$$P(a,\theta)=C_0 a\exp\{-\frac{2\nu}{\sigma_0^2}[B_1^c(a)\cos\theta+B_1^s(a)\sin\theta+B_2^c(a)\cos 2\theta+B_2^s(a)\sin 2\theta]\}, \qquad (26)$$

где

$$B_1^s(a)=A_c a+\int_0^a\langle f_1(a\cos\Phi,-\nu a\sin\Phi)\sin^2\Phi\rangle\,da,$$

$$B_1^c(a)=A_s a+\int_0^a\langle f_1(a\cos\Phi,-\nu a\sin\Phi)\cos\Phi\sin\Phi\rangle\,da,$$

$$B_2^s(a)=\int_0^a\langle f_2(a\cos\Phi,-\nu a\sin\Phi)\sin\Phi\sin 2\Phi\rangle\,da,$$

$$B_2^c(a)=\int_0^a\langle f_2(a\cos\Phi,-\nu a\sin\Phi)\sin\Phi\cos 2\Phi\rangle\,da,$$

$$A_c=\langle A(\Phi)\cos\Phi\rangle,\ A_s=\langle A(\Phi)\sin\Phi\rangle.$$

В частности, когда

$$A=\varepsilon A_0\cos\nu t,\ f_0=\varepsilon\overline{f}_0,\ f_1=\varepsilon\overline{f}_1,\ \ f_2=\varepsilon\overline{f}_2,\ \sigma_0^2=\varepsilon\sigma^2,$$

тогда система (25) рассмотрена в [4]. Условие разрешимости и решение, полученное в [4] методом усреднения, в этом случае совпадают с полученным здесь результатом.

Уравнение (25) описывает достаточно большой класс механических систем, подверженных действиям различных типов сил, в том числе, случайных и периодических, внешних и параметрических. Рассмотрение системы (25) для конкретных случаев функций f_0, f_1, f_2 приведено в [4].

1. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение аимптотических методов в стохастических системах // Приближенные методы исследования нелинейных систем.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976.— С. 12—147.
2. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка.— М. : Наука, 1966.— 266 с.
3. *Гардинер К. В.* Стохастические методы в естественных науках.— М. : Мир, 1986.— 528 с.
4. *Нгуен Донг Ань.* Взаимное влияние различных типов случайных и периодических возбуждений на колебательные нелинейные системы: Дисс. ... докт. физ.-мат. наук.— Киев, 1986.— 225 с.

Получено 09.10.91