УДК 517.2

С. В. Кузнецов, канд. физ.-мат. наук (Моск. инж.-строит. ин-т)

О непрерывности операторов метрической проекции

Рассматриваются операторы метрической проекции в пространстве $L^p(\lambda)$, $1 < p < \infty$, где $\lambda \in M^b$, M^b — пространство ограниченных радоновых мер. Операторы метрической проекции проектируют в $L^p(\lambda)$ фиксированный элемент $g \in C^b$ на выпуклое и замкнутое подмножество $K \subset C_u^b$, где C_u^b — пространство непрерывных и ограниченных функций в топологии равномерной сходимости. Получены утверждения о непрерывности операторов метрической проекции, рассматриваемых как отображения из M^b в K.

Розглядаються оператори метричної проекції у просторі $L^p(\lambda)$, $1 < p < \infty$, де $\lambda \in M^b$, M^b — простір обмежених радонових мір. Оператори метричної проекції проектують в $L^p(\lambda)$ фіксований елемент $g \in C^b$ на випуклу і замкнену підмножину $K \subset C_u^b$, де C_u^b — простір неперервних і обмежених функцій у топології рівномірної збіжності. Одержані твердження про неперервність операторів метричної проекції, що розглядаються як відображення із M^b в K.

Многочисленные задачи, возникающие в теории приближений, приводят к необходимости построения метрической проекции некоторого элемента $g \in L^p(X, \partial\lambda)$, $1 < p < \infty$, на выпуклое и компактное множество K, где

X — локально компактное пространство, а $d\lambda$ — ограниченная на X мера Радона. В то время, как в теоретических вопросах мера $d\lambda$ чаще всего представляет собой непрерывную меру, для которой любое одноточечное множество из X пренебрежимо, на практике в качестве меры $\partial\lambda$ обычно выбирается дискретная мера, или последовательность дискретных мер, сходящаяся в некоторой топологии к исходной мере. В этих условиях представляет интерес поведение метрических проекций, отвечающих выбору различных мер на X. При этом, естественно, элемент g и компакт K должны иметь смысл для всех пространств $L^p\ (d\lambda)$, отвечающих рассматриваемым мерам на X.

Известно [1, 2], что операторы метрической проекции в равномерно выпуклых пространствах при проектировании на замкнутые и выпуклые множества непрерывны. Известно также, что пространства $L^p\ (X, \lambda)$, $1 < p < \infty$, равномерно выпуклы [3] для любого локально компактного пространства X и любой радоновой меры $d\lambda$.

Обозначим через Pr оператор метрической проекции, рассматриваемый как отображение из пространства $M^b\ (X)$ ограниченных радоновых мер в K. Непрерывность этого отображения исследуется ниже. В одном частном случае непрерывность отображения Pr установлена в [4]. Для дальнейшего потребуются следующие опеределения [5].

Определение 1. *Пусть A, B — подмножества полного метрического пространства с расстоянием, обозначаемым ρ. Полуотклонением $\beta\ (A, B)$ множества A от B называется* $\sup\limits_{x\in A}\ \rho\ (x, B)$.

Определение 2. *Отклонением $\alpha\ (A, B)$ называется* $\max\ \{\beta\ (A, B),\ \beta\ (B,\ A)\}$.

Определение 3. *Многозначное отображение F из топологического пространства T в метрическое пространство называется α-непрерывным (β-непрерывным) в точке $x_0 \in T$, если $\alpha\ (F\ (x),\ F\ (x_0)) \to 0$ при $x \to x_0$ (соответственно $\beta\ (F\ (x),\ F\ (x_0)) \to 0$ при $x \to x_0$).*

Нетрудно видеть, что для инъективного в точке $x_0 \in T$ отображения понятия α- и β-непрерывности совпадают.

Теорема 1. *Если пространство X локально компактно, $g \in C^b(X)$ (g фиксировано), подмножество K выпукло и компактно в $C_u^b(X)$, радонова мера $d\lambda_0 \in M^b(X)$ и сужение на K канонического вложения $l_0: C_u^b$ — — $L^p(d\lambda_0)$, $1 < p < \infty$ (p фиксировано) инъективно, то оператор* Pr *из $M_\varkappa^b(X)$ в $K \subset C_u^b(X)$ α-непрерывен в точке $d\lambda_0$.*

В формулировке теоремы и далее $C^b(X)$ — пространство непрерывных ограниченных на X функций; нижний индекс u указывает на топологию равномерной сходимости; $M_\varkappa^b(X)$ пространство ограниченных мер, двойственное к $C_u^b(X)$, нижний индекс $\varkappa$ указывает на топологию Аренса (топология Аренса в M^b — это топология равномерной сходимости на выпуклых и компактных подмножествах из C_u^b) [6] (гл. 3 — 5, 9).

Доказательство. Пусть Φ_0 — базис некоторого фильтра, сходящегося к λ_0 в $M_\varkappa^b$. Обозначим через y_λ метрическую проекцию g на K в $L^p(d\lambda)$, а через Y_λ — пересечение $l_\lambda^{-1}(y_\lambda) \cap K$, где l_λ — каноническое вложение C_u^b в $L^p(d\lambda)$. Поскольку для произвольной меры $d\lambda \in M^b$ каноническое вложение l_λ может не быть инъективным, Y_λ — не обязательно одноточечно в K.

Из определения метрической проекции следует

$$\rho_\lambda(y_\lambda,\ g) \leqslant \rho_\lambda(y_0,\ g), \tag{1}$$

$$\rho_{\lambda_0}(y_0,\ g) \leqslant \rho_{\lambda_0}(y_\lambda,\ g), \tag{2}$$

где ρ_λ — расстояние в $L^p(d\lambda)$, а проекция g на K в $L^p(d\lambda_0)$, обозначенная y_0, отождествлена со своим прообразом в $K \subset C_u^b$.

Сходимость фильтра Φ_0 в $M_\varkappa^b$, и тем более в узкой топологии, обеспечивает справедливость сооотношения

$$\lim_{\lambda, \Phi_0} \rho_\lambda (y_0, g) = \rho_{\lambda_0} (y_0, g). \tag{3}$$

Принимая во внимание тот факт, что $Y_\lambda \subset K$, имеем

$$\overline{\lim_{\lambda, \Phi_0}} \rho_\lambda (Y_\lambda, g) \leqslant \rho_{\lambda_0} (y_0, g). \tag{4}$$

Еще раз используя сходимость $\lambda \to \lambda_0$ по фильтру Φ_0 в $M^b_\varkappa$, из (4) получаем

$$\rho_{\lambda_0} (Y_\lambda, g) \leqslant \rho_{\lambda_0} (y_0, g) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad \lambda \in A. \tag{5}$$

Здесь A — некоторое подмножество из базиса фильтра Φ_0. Из неравенств (2), (5) видно, что

$$\lim_{\lambda, \Phi_0} \rho_{\lambda_0} (Y_\lambda, g) = \rho_{\lambda_0} (y_0, g). \tag{6}$$

В силу аппроксимативной компактности K в $L^p(d\lambda_0)$ из (6) вытекает α-сходимость $Y_\lambda \to y_0$ в C_u.

Следствие. *Если в условиях теоремы* 1 *X — локально компактное польское пространство, а $d\lambda_0 \in M^b_+$, то оператор* Pr *из M^b_{+n} в K α-непрерывен в точке $d\lambda_0$.*

В формулировке следствия польское пространство — это метризуемое полное пространство счетного типа; M^b_{+n} — конус положительных мер из M^b в узкой топологии (слабой топологии относительно двойственности $\langle M^b, C^b_u \rangle$).

Доказательство. Поскольку X — польское пространство, M^b_{+n} также является польским. Отсюда следует, что фильтр Φ_0, сходящийся к $d\lambda_0$ в M^b_{+n}, имеет счетный базис и, следовательно, узко ограничен. В силу бочечности C^b_u это означает, что Φ_0 сходится к $d\lambda_0$ и в топологии Аренса. Дальнейшее вытекает из доказательства теоремы 1.

Теорема 2. *Если X локально компактно, $g \in C^b(X)$, K — конечномерное подпространство в $C^b(X)$, $d\lambda_0 \in M^b(X)$ и сужение на K канонического вложения l_0: $C^b_u — L^p(d\lambda_0)$ (p фиксировано) инъективно, то оператор* Pr *из $M^b_\varkappa$ в $K \subset C^b_u$ непрерывен в точке $d\lambda_0$.*

Доказательство. Пусть Φ_0 — базис некоторого фильтра, сходящегося к $d\lambda_0$ в $M^b_\varkappa$. Обозначим через S сферу единичного радиуса с центром в нуле в C^b_u. В силу конечномерности K пересечение $S \cap K$ компактно в C^b_u. По условию сужение на K вложения l_0 определяет топологический изоморфизм на свой образ, так что

$$\sup_{f \in S \cap K} \| f \|_{\lambda_0} = c_0, \quad 0 < c_0 < \infty,$$

$$\sup_{\varphi \in l_0(S \cap K)} \| l_0^{-1} (\varphi) \|_u = c_0', \qquad 0 < c_0' < \infty,$$

где $\|\cdot\|_{\lambda_0}$ и $\|\cdot\|_u$ обозначают нормы в $L^p(d\lambda_0)$ и C^b_u соответственно. Сходимость Φ_0 в $M^b_\varkappa$ обеспечивает существование множества $A \in \Phi_0$, так что для любой меры $d\lambda \in A$

$$\sup_{f \in S \cap K} \| f \|_\lambda = c_\lambda, \qquad 0 < c_\lambda < \infty,$$

$$\sup_{\varphi \in l_\lambda(S \cap K)} \| l_\lambda^{-1} (\varphi) \|_u = c_\lambda', \qquad 0 < c_\lambda' < \infty,$$

причем $\inf c_\lambda > 0$ и $\sup c_\lambda' < \infty$ при $d\lambda \in A$. Таким образом, сужения на K канонических вложений l_λ, $d\lambda \in A$ инъективны, кроме того,

$$\lim_{d\lambda, \Phi_0} c_\lambda = c_0, \quad \lim_{d\lambda, \Phi_0} c_\lambda' = c_0'. \tag{7}$$

Из определения метрической проекции и конечномерности K вытекает

$\| y_\lambda \|_\lambda \leqslant \| g \|_\lambda$, где y_λ — метрическая проекция g на K в $L^p(d\lambda)$. Принимая во внимание (7), отсюда получаем

$$\| y_\lambda |_u \leqslant c \| g \|_u, \qquad d\lambda \in A. \tag{8}$$

В (8) использовалась инъективность на K вложений l_λ, что позволяло отождествить $y_\lambda \in L^p(d\lambda)$ со своим прообразом в C^b. Неравенство (8) показывает, что множество $K_A = \bigcup_{\lambda \in A} y_\lambda$ ограничено в C_u^b. Принимая во внимание конечномерность пространства K, из предыдущего получаем, что K_A относительно компактно в C_u^b. Применение теоремы 1 к замкнутой выпуклой оболочке K_A завершает доказательство этой теоремы.

Следствие 1. *Если в условиях теоремы* 2 X — *локально компактное польское пространство, а* $d\lambda_0 \in M_+^b$, *то оператор* Pr *из* M_{+n}^b *в* $K \subset C_u^b$ *непрерывен в точке* $d\lambda_0$.

Следствие 2. *В условиях теоремы* 2 (*соответственно следствия* 1) *оператор* Pr, *рассматриваемый как отображение из* $M_\varkappa^b \times C_u^b$ (*соответственно* $M_{+n}^b \times C_u^b$) *в* $K \subset C_u^b$ *непрерывен в точке* $d\lambda_0 \times g$, *где* $g \in C^b$.

Доказательство. Неравенство (8) показывает, что семейство $(\mathrm{Pr}_\lambda)_{\lambda \in A}$, $A \in \Phi_0$, равностепенно непрерывно в точке $g \in C^b$. Выбирая в качестве Φ_0 базис фильтра окрестностей $d\lambda_0$ в $M_\varkappa^b$ (соответственно в M_{+n}^b), получаем требуемый результат.

Замечание 2. Условия следствий из теорем 1 и 2 выполняются, в частности, если X — какое-либо нетощее ограниченное подмножество в R^m, интегрируемое относительно меры Лебега, а $d\lambda_0$ — индуцированная на X мера Лебега. Тогда для любой последовательности $(d\lambda_k) \in M_{+n}^b$, сходящейся в узкой топологии к мере $d\lambda_0$, соответствующая последовательность метрических проекций α-сходится (сходится) для любого выпуклого компакта (соответственно конечномерного подпространства) в C_u^b.

Пример. Пусть S — сфера единичного радиуса в R^m, а $(d\lambda_n)$ — последовательность положительных дискретных мер, сходящаяся к мере Лебега $d\lambda_0$ на тотальном в $C_u^b(S)$ подмножестве. Если последовательность $(d\lambda_n)$ ограничена (что имеет место для мер $d\lambda_n$, отвечающих квадратурам Чебышева), то последовательность соответствующих метрических проекций на любое выпуклое и компактное подмножество $K \subset C_u^b(S)$ α-сходится. Если же K — конечномерное подпространство в $C_u^b(S)$, то метрические проекции сходятся в $L^p(d\lambda_0)$.

1. *Klee V. L.* Convexity of Chebyshev sets // Math. Anal.— 1961.— **142**, N 3.— P. 292—304.
2. *Singer I.* Some remarks on approximative compactness // Rev. Roum. Math. Pur. Appl.— 1964.— 9, N 2.— P. 167—177.
3. *Власов Л. П.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Успехи мат. наук.— 1973.— 28, вып. 6.— С. 3—66.
4. *Кузнецов С. В.* О сходимости метрических проекций // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 10.— С. 1411—1413.
5. *Барбашин Е. А.* К теории обобщенных динамических систем // Уч. зап. Моск. ун-та. Сер. мат.— 1949.— 2, вып. 135.— С. 110—134.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование.— М. : Наука, 1977.— 600 с.

Получено 03.04.90