УДК 519.21

Т. Л. Коваль, асп. (Киев. ун-т)

Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для двупараметрических мартингал-разностей

Приведена оценка скорости сходимости к нормальному закону оценки наименьших квадратов коэффициента регрессии случайного поля, являющегося двупараметрической мартингал-разностью.

Наведена оцінка швидкості збіжності до нормального закону оцінки найменших квадратів коефіцієнта регресії випадкового поля, яке являеться двопараметричною мартингал-різницею.

Центральная предельная теорема для случайных последовательностей, являющихся одно- и двупараметрическими мартингал-разностями, изучалась в работах многих авторов (см., например, [1—5]). В работе [5] можно найти обзор литературы по этой тематике. Вопросы сходимости к нормальному закону оценок наименьших квадратов коэффициентов регрессии случайного поля в случае, когда «случайный шум» представляет собой мартингал-разность на плоскости, рассматривались в работах [6, 7]. Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для мартингал-разностей получены в работах [8, 9].

В данной статье один из результатов работы [8] (теорема 1) обобщается для оценок наименьших квадратов коэффициента регрессии случайного поля, являющегося двупараметрической мартингал-разностью. При доказательстве теоремы используется метод, предложенный Болтхаузеном [8], приспособленный для случайных полей.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. Семейство σ-алгебр $(\mathcal{F}_{i,j};\ i, j = \overline{1, n})$ назовем потоком, если $\mathcal{F}_{i,j} \subset \mathcal{F}$ и выполнены условия

1) $\mathcal{F}_{i,j} \subset \mathcal{F}_{i,j+1},\ i, j = \overline{1, n}$;

2) $\mathcal{F}_{i,j} \subset \mathcal{F}_{i+1,j},\ i, j = \overline{1, n}$.

Для данного потока σ-алгебр $(\mathcal{F}_{i,j};\ i,\ j=\overline{1,\ n})$ введем следующие семейства σ-алгебр [10]:

$$\mathcal{F}^1_i=\bigcup_{j=1}^{n}\mathcal{F}_{i,j},\quad \mathcal{F}^2_j=\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{F}_{i,j},\quad G_{i,j}=\mathcal{F}^1_i\cup\mathcal{F}^2_j.$$

Случайную функцию $\varepsilon(i,\ j)$, $i,\ j=\overline{1,\ n}$, назовем сильной мартингал-разностью относительно потока σ-алгебр $(\mathcal{F}_{i,j};\ i,\ j=\overline{1,\ n})$, если 1) $\varepsilon(i,\ j)$ является $\mathcal{F}_{i,j}$-измеримой для $i,\ j=\overline{1,\ n}$; 2) $M\,|(\varepsilon(i,\ j))|<\infty$; 3) $M(\varepsilon(i+1,\ j+1)\,|\,G_{i,j})=0$ п. н.

Рассмотрим случайное поле

$$\xi(i,\ j)=\theta\varphi(i,\ j)+\varepsilon(i,\ j),$$

где $\varphi(i,\ j):N^2\to R^1$ — известная функция, $\varepsilon(i,\ j):N^2\to R^1$ — сильная мартингал-разность, θ — неизвестный параметр, который необходимо оценить по данным наблюдения случайного поля $\xi(i,\ j)$; $i,\ j=\overline{1,\ n}$.

Оценка наименьших квадратов параметра θ имеет вид

$$\hat{\theta}_n=\sum_{i,j=1}^{n}\varphi(i,\ j)\xi(i,\ j)/\sum_{i,j=1}^{n}\varphi^2(i,\ j).$$

Очевидно, что $\hat{\theta}_n$ — несмещенная оценка для θ. Обозначим

$$M(\varepsilon^2(i,\ j)\,|\,G_{i-1,j-1})=\sigma^2_{i,j},$$

$$M(\varepsilon^2(i,\ j))=\bar{\sigma}^2_{i,j},\quad d_n=\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\varphi^2(i,\ j)\Big)^{1/2},$$

$\Phi(t)$ — функция распределения стандартного нормального закона. В дальнейшем под c_i, $i=\overline{1,\ 6}$, подразумеваем некоторые положительные постоянные.

Теорема. *Пусть последовательность* $(\varepsilon(i,\ j);\ i,\ j=\overline{1,\ n})$ *является сильной мартингал-разностью относительно потока σ-алгебр* $(\mathcal{F}_{i,j};\ i,\ j=\overline{1,\ n})$ *и выполнены условия:* 1) $\bar{\sigma}^2_{i,j}=\sigma^2_{i,j}=1$ *п. н.*; 2) $M\,|\,\varepsilon^3(i,\ j)\,|\leqslant\gamma<\infty$; 3) $\sup\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|\,\varphi(i,\ j)\,|/\Big(\sum\limits_{i,j=1}^{n}\varphi^2(i,\ j)\Big)^{1/2}\leqslant c_1/n$. *Тогда* $\Delta_n=\sup\limits_t|\,P(\hat{d}_n(\theta_n-\theta)\leqslant t)-\Phi(t)\,|\leqslant c_6/\sqrt{n}$.

Доказательство. Введем случайные величины $(Z_{i,j};\ i,\ j=\overline{1,\ n})$, ξ-независимые между собой и с $\varepsilon(i,\ j)$, нормально распределенные с нулевыми средними и $MZ^2_{i,j}=\varphi^2(i,\ j)$,

$$M\xi^2=v^2_n=\sup_{1\leqslant i,j\leqslant n}|\,\varphi(i,\ j)\,|\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\varphi^2(i,\ j)\Big)^{1/2},$$

$\sum\limits_{i,j=1}^{n}Z_{i,j}/d_n$ имеет стандартное нормальное распределение. Применяя лемму 1 [8], получаем

$$\Delta_n\leqslant 2\sup_t\Big|P\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\varphi(i,\ j)\varepsilon(i\ j)/d_n+\xi\leqslant t\Big)-P\Big(\Big(\sum_{i,j=1}^{n}Z_{i,j}+\xi\Big)/d_n\leqslant t\Big)\Big|+$$

$$+2\sup_t\Big|P\Big(\Big(\sum_{i,j=1}^{n}Z_{i,j}+\xi\Big)/d_n\leqslant t\Big)-\Phi(t)\Big|+(5/2\pi)^{1/2}\,\Big\|M\Big(\xi^2/d^2_n\ \Big|$$

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{n}\varphi(i,\ j)\varepsilon(i,\ j)\Big)\Big\|^{1/2}_{\infty}.$$

Обозначим $S_n = \sum_{i,j=1}^{n} X_{i,j}$, $X_{i,j} = \varphi(i,j)\,\varepsilon(i,j)$,

$$\| M(\xi^2/d_n^2 \mid S_n) \|_\infty^{1/2} = \| M(\xi^2/d_n^2) \|_\infty^{1/2} = v_n/d_n \leqslant c_2/\sqrt{n}.$$

Учитывая, что $\Big(\sum_{i,j=1}^{n} Z_{i,j} + \xi\Big)/d_n$ имеет нормальное распределение с $N(0,\ 1 + (v_n/d_n)^2)$, второе слагаемое допускает оценку

$$\sup_t \Big| P\Big(\Big(\sum_{i,j=1}^{n} Z_{i,j} + \xi\Big)/d_n \leqslant t\Big) - \Phi(t) \Big| \leqslant \sup_t \Big| (2\pi(1 + v_n^2/d_n^2))^{-1/2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{t} \exp(-u^2/(2(1 + v_n^2/d_n^2)))\,du - (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{t} \exp(-u^2/2)\,du \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \exp(-t^2/2)\,|t|\,v_n d_n^{-1} \leqslant c_3/\sqrt{n}.$$

Таким образом,

$$\Delta_n \leqslant 2 \sup_t \Big| P((S_n + \xi)/d_n \leqslant t) - P\Big(\Big(\sum_{i,j=1}^{n} Z_{i,j} + \xi\Big)/d_n \leqslant t\Big) \Big| + c_4 n^{-1/2}.$$

Для $1 \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant l \leqslant n$ определим величины

$$U_m = \Big[\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n} X_{i,j} + \sum_{j=1}^{l-1} X_{m,j}\Big]/d_n,$$

$$W_m = \Big[\sum_{i=m+1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Z_{i,j} + \sum_{j=l+1}^{n} Z_{m,j} + \xi\Big]/d_n.$$

Тогда можно записать представление

$$P((S_n + \xi)/d_n \leqslant t) - P\Big(\Big(\sum_{i,j=1}^{n} Z_{i,j} + \xi\Big)/d_n \leqslant t\Big) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} [P(U_m + W_m +$$

$$+ X_{m,l}/d_n \leqslant t) - P(U_m + W_m + Z_{m,l}/d_n \leqslant t)], \qquad (1)$$

$$\lambda_m^2 = \Big[\sum_{i=m+1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi^2(i,j) + \sum_{j=l+1}^{n} \varphi^2(m,j) + v_n^2\Big]/d_n^2.$$

Учитывая независимость U_m, $X_{m,l}$ и $Z_{m,l}$, сумму (1) представляем в виде

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} M\{\Phi((t - U_m)/\lambda_m - X_{m,l}/(\lambda_m d_n)) - \Phi((t - U_m)/\lambda_m - Z_{m,l}/(\lambda_m d_n))\}. \qquad (2)$$

Разлагая функцию Φ в ряд Тейлора в точке $(t - U_m)/\lambda_m$ до второго члена с остаточным членом в форме Лагранжа, выражение (2) записываем в виде

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} M\{(-X_{m,l}(\lambda_m d_n)^{-1} + Z_{m,l}(\lambda_m d_n)^{-1}\varphi((t - U_m)\lambda_m^{-1}) +$$

$$+ (X_{m,l}^2 - Z_{m,l}^2)\varphi'((t - U_m)\lambda_m^{-1})/(2\lambda_m^2 d_n^2) - X_{m,l}^3(6\lambda_m^3 d_n^3)^{-1}\varphi''((t - U_m)\lambda_m^{-1} -$$

$$- \theta_m X_{m,l}(\lambda_m d_n)^{-1}) + Z_{m,l}^3(6\lambda_m^3 d_n^3)^{-1}\varphi''((t - U_m)\lambda_m^{-1} - \theta_m' Z_{m,l}(\lambda_m d_n)^{-1})\},$$

где $0 \leqslant \theta_m$, $\theta_m' \leqslant 1$, $\varphi(x) = \exp(-x^2/2)$.

Оценим первое слагаемое:

$$M(X_{m,l}\varphi((t - U_m)/\lambda_m)) = M[\varphi((t - U_m)/\lambda_m)\,M(X_{m,l} \mid G_{m-1,l-1})] = 0,$$

$$M(Z_{m,l}\varphi((t - U_m)/\lambda_m)) = 0.$$

Для второго слагаемого имеем

$$M[X^2_{m,l}\varphi'((t-U_m)/\lambda_m)] = M[M(X^2_{m,l}\varphi'((t-U_m)/\lambda_m) \mid G_{m-1,l-1})] = \\ = \varphi'((t-U_m)/\lambda_m)\varphi^2(m, l),$$

$$M[Z^2_{m,l}\varphi'((t-U_m)/\lambda_m)] = \varphi'((t-U_m)/\lambda_m)\varphi^2(m, l).$$

Получаем, что первые два слагаемых равны нулю. По условию теоремы $M|\varepsilon^3(i, j)| \leqslant \gamma < \infty$, $Z_{m,l}$ — гауссовская. Следовательно,

$$\Delta_n \leqslant \sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\Big[|\varphi^3(m, l)|/\Big(\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi^2(i, j) + \sum_{j=l+1}^{n}\varphi^2(m, j) + v_n^2\Big)^{3/2} +$$

$$+ c_4 n^{-1/2} \leqslant c_5 \sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}[n(n-m) + 2n - l]^{-3/2} + c_4 n^{-1/2} \leqslant c_6/\sqrt{n}.$$

Теорема доказана.

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер.— М. : Наука, 1977.— 351 с.
2. *Русас Дэк.* Контигуальность вероятностных мер.— М. : Мир, 1975.— 320 с.
3. *Ширяев А. Н.* Вероятность.— М. : Наука, 1989.— 640 с.
4. *Морквенас Р.* Принцип инвариантности для мартингалов на плоскости // Лит. мат. сб.— 1984.— 24, № 4.— С. 127—132.
5. *Dependence* in Probability and Statistics. A survey of Recent Results.— New York: Springer, 1986.— 450 p.
6. *Кнопов П. С.* Оптимальные оценки параметров стохастических систем.— Киев : Наук. думка, 1981.— 152 с.
7. *Леоненко Н. Н., Мишура Ю. С.* О принципе инвариантности для многопараметрических мартингалов // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1980.— № 24.— С. 51—60.
8. *Bolthausen E.* Exact convergence rates in some martingale central limit theorems // Ann. Probab.— 1982.— **10**, N 3.— P. 672—688.
9. *Кирьянова Л. В., Ротарь В. И.* О скорости сходимости в ЦПТ для мартингалов // Докл. АН СССР.— 1990.— **311**, № 5.— С. 1042—1045.
10. *Гихман И. И.* Двупараметрические мартингалы // Успехи мат. наук.— 1982.— **37**, вып. 6.— С. 3—28.

Получено 16.05.91